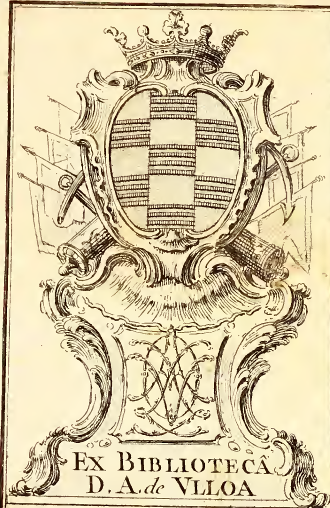




EX BIBLIOTECÂ
D. A. de VLLOA



PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

TOMI TERTII PARS I.



GENEVÆ,

Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.

MDCCXLII.

SERENISSIMO PRINCIPI

ARMANDO GASTONI DE ROHAN DE SOUBISE

S. R. E. CARDINALI AMPLISSIMO

EPISCOPO & PRINCIPI ARGENTINO

&c. &c. &c.

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

Thomas LE SEUR & *Franciscus* JACQUIER.

MONITUM.

PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Libros tres totidem voluminibus complecti meditabamur, idque jam in alterâ operis nostri parte fueramus polliciti. Cur tertium Newtoni Librum in duas dividamus partes datamque fidem non liberemus, in causâ sunt præclara de fluxu & refluxu maris opera quæ anno 1740. à Celeberrimâ Parisiensi Academiâ præmio fuere condecorata. Tot & tam eximia in hisce operibus continentur quæ non ad fluxum refluxumque maris duntaxat, sed etiam ad generales attractionis leges universamque Astronomiam referuntur ut Clariss. Vir D. J. L. CALANDRINUS cujus consilia impensè veneramur, nos optimè facturos judicaverit, si prædicta opuscula iis adjungeremus propositionibus quas de fluxu & refluxu maris habet Newtonus; quod quidem commodè fieri non poterat, nisi tertium librum in duas partes divideremus. Quamvis eam religiosè servemus legem, sinè quâ honestus scriptor nemo esse potest, ut scilicet nihil insigne ex aliquo Autore in usum nostrum convertamus quin ei quod suum est, dùm locus occurrit, tribuatur, specialem nihilominùs grati animi significationem profiteri volumus Clarissimis omnique

lau-

laude noſtrâ majoribus Viris D D. Caſſini, De Mairan, De Maupertuis, quorum præclaris inventis plurimùm debent hæc noſtra Commentaria. Sed tanta ſunt in univerſum hocce noſtrum opus prælaudati Clariſſ. D. J. L. CALENDRINI beneficia, ut huic Doctiſſimo Viro pares meritis gratias referre non poſſimus.

Jam ſub prælo eſt altera & ultima commentariorum noſtrorum pars; quia verò nullus eſt tam mediocris ingenii, quem uſus & exercitatio non edoceant, hinc factum eſt ut aliqua nobis in mentem venerint quæ brevi collecta appendice ſimul cum reliquâ tertii Libri parte juſti voluminis molem component.

Datum Romæ
in Contu. SSæ. Trinitatis
Anno 1742.

P P.

PP. LE SEUR ET JACQUIER

DECLARATIO.

NEWTONUS in hoc tertio Libro telluris motæ hypothesim assumit. Autoris propositiones aliter explicari non poterant, nisi eâdem quoquè factâ hypothesi. Hinc alienam coacti sumus gerere personam. Cæterum latis à summis Pontificibus contrà telluris motum Decretis nos obsequi profitemur.



EDI-

EDITORIS MONITUM.

INtelleximus quosdam malignè interpretari notulas quas adjecimus Commentariis PP. LE SEUR *&* JACQUIER, *quasi sæpius Newtoni mentem non attigissent; ne autem ipsis vitio vertatur quod concesserint ob ipsorum absentiam ab urbe in quâ liber edebatur, ut nempe quæcumque viderentur corrigenda ab Editore ipso mutarentur sive levia sive gravia forent, monendum puto me Autorum diligentiam & Doctrinam nusquam desiderasse, correctiones quas feci levissimi esse momenti, nec esse tales ut propter ipsas quidquam ex debitâ Autoribus gloriâ tollatur quod meæ opellæ tribuatur, & asterisco notatas fuisse, non quod aliquid laudis exinde speraverim, sed quia si illic aliquid vitii irrepserit æquum est ut in Editorem non in Autores ea culpa transferatur; Ne similibus cavillationibus occasio in posterum detur, tales distinctionis notulæ non adhibebuntur in IIa hujus Voluminis parte, in quâ speramus calculos Newtonianos circa Lunam potissimum satis intricatos, in apertam lucem expositum iri.*

I N-

INTRODUCTIO AD TERTIUM LIBRUM.

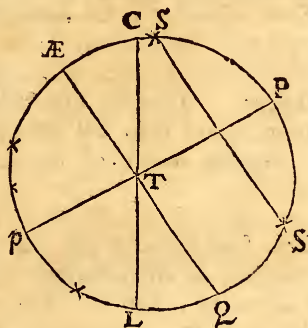
Phil. Natural. JS. NEWTONI.

CAPUT PRIMUM.

Quale oculo nudo appareat mundi systema paucis exponitur, & prima Astronomiæ Elementa breviter revocantur.

1. FIGURA telluris est propemodùm sphærica, & ideò gravium directio (ut pote quæ aquarum stagnantium superficiei perpendicularis est) ad centrum terræ tendit quam proximè. Patet per Eclipses Lunares in quibus umbra terrestris, in quamcumque cœli plagam vergat, est semper ad sensum circularis.

2. Spectatori terrestri cælum apparet tanquam superficies sphærica concava, stellis plurimis distincta, cujus ipse spectator centrum occupat, quæque circà puncta fixa ceù cardines ab ortu ad occasum æquabiliter convertitur, & 24 circiter horis integram revolutionem absolvit. Puncta illa opposita P & p circà quæ rotari videtur sphæra, *Poli* mundi dicuntur, quorum is qui nobis conspicuus est, ut P, arcticus vel borealis dicitur, ipsi verò oppositus p antarcticus seu australis appellatur. Recta linea P p utrumque polum connectens *Axis mundi* vocatur.

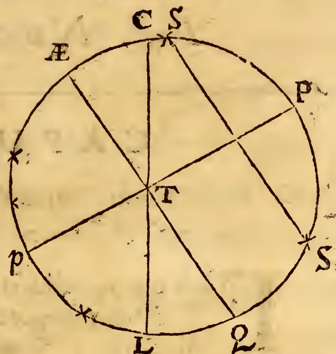


Æquator sivè *æquinoctialis* est circulus sphæræ cælestis maximus cujus poli iidem sunt cum polis mundi; proindéque sphæram mundanam dividit in duo hemisphæria, Boreale Æ P Q, in quo est polus borealis P, & australe Æ p Q, in quo est polus australis p.

3. Stellæ singulæ, ut S, in circulis S s æquatori Æ Q parallelis, communi sphæræ cælestis motu revolvi quotidie videntur. *Fixæ* nominantur

tur quæ eandem inter ſeſe diſtantiam perpetuò ſervant; *Erraticæ* verò ſeu *Planetæ* vocantur quæ diſtantias ſuas à fixis in dies mutant & motu proprio ferri conſpiciuntur. Planetæ ſunt ſeptem ſuis propriis ſignis notati, videlicet Sol ☉, Luna ☽, Mercurius ☿, Venus ♀, Mars ♂, Jupiter ♃ & Saturnus ♄; Terræ verò ſignum eſt hoc ♁.

4. *Ecliptica* eſt circulus ſphæræ maximus quem centrum ſolis motu proprio ab occaſu ad ortum ſingulis annis deſcribere videtur. Hic circulus Æquatorem obliquè interſecat ſub angulo inclinationis Æ T C, graduum $23\frac{1}{2}$ circiter. Puncta duo oppoſita in quibus æquator & ecliptica ſeſe mutuò ſecant, *Æquinoctialia* dicuntur quod ſole in iis poſito dies ubique terrarum nocti æqualis ſit, & indè tempus quo Sol punctum alterutrum æquinoctiale attingit, vocatur æquinoctium. Punctum æquinoctiale vernale eſt undè Sol motu proprio versùs polum borealem aſcendit in Ecliptica, autumnale verò undè Sol versùs polum auſtralem deſcendit, ideóque æquinoctium eſt vernale vel autumnale. Puncta *Sólſtitialia* ſunt Eclipticæ puncta duo oppoſita quæ à punctis æquinoctialibus toto circuli quadrante diſtant, quæque proindè maximè recedunt ab æquatore & in quibus aſcenſus Solis ſuprà æquatorem & deſcenſus infrà eundem terminatur. Horum punctorum prius æſtivum appellatur quo nimirum terminatur Solis aſcenſus ſuprà æquatorem; poſterius brumale vel hybernum. Dicuntur ſolſtitialia quod ſole in iis verſante, per aliquot dies ex eodem Horizontis puncto oriri, & é regione, in eodem puncto occidere videatur. Tempus quo Sol puncta ſolſtitialia ingreditur vocatur Solſtitium, quod ideò vel æſtivum vel brumale eſt.



Signum cæleſte eſt duodecima pars eclipticæ & in 30 gradus rurſus dividitur. Primi Signi principium eſt in puncto æquinoctiali vernali à quo ſigna ab occaſu in ortum juxtà motum proprium Solis numerantur. Sex ſunt borealia per borealem eclipticæ partem diſtributa, hiſque nominibus ac characteribus deſignata: Aries ♈, Taurus ♉, Gemini ♊, Cancer ♋, Leo ♌, Virgo ♍. Sex etiam auſtralia videlicet Libra ♎, Scorpius ♏, Sagittarius ♐, Capricornus ♑ vel ♑, Aquarius ♒, Piſces ♓. Aries, Taurus ac Gemini quæ inter punctum æquinoctiale vernum & punctum ſolſtitiale æſtivum continentur dicuntur ſigna vernalia; Cancer, Leo, Virgo à ſolſtitiali æſtivo ad æquinoctiale autumnale numerata appellantur æſtiva; Libra, Scorpius & Sagittarius autumnalia;

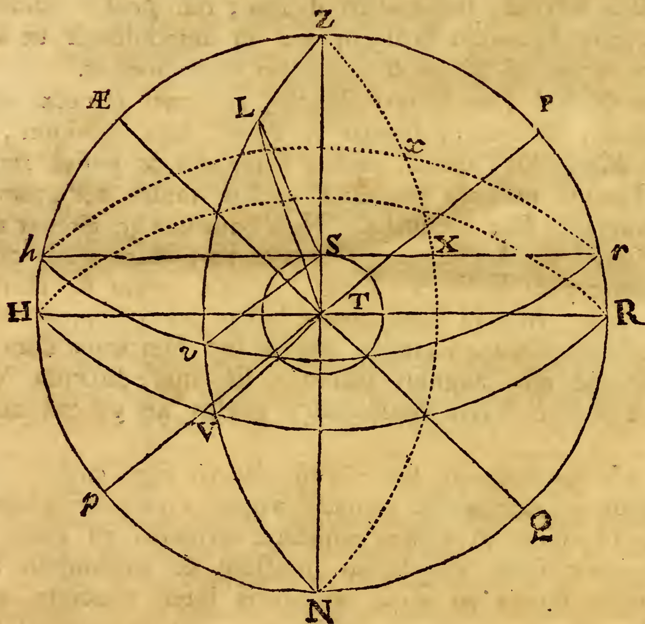
lia; Capricornus, Aquarius & Pifces, hyberna. Signa afcendentia à puncto folftitiali hyberno ad æftivum, defcendentia verò à folftitiali æftivo ad hybernum computantur.

5. *Zodiacus* eft fphæræ cæleftis portio feu zona duobus circulis Eclipticæ parallelis & gradibus 8 vel 9 hinc indè ab Eclipticâ diftantibus terminata, fub quâ planetæ omnes motus fuos abfolvunt. Dum planeta ab occafu in ortum feu fecundum ordinem fignorum, aut quod idem fonat, in figna confequentia nimirùm ab ariete ad taurum, à tauro ad geminos &c., motu proprio fertur, ille planeta tunc temporis directus vocatur; cum ipfius motus proprius ceffare videtur, feu dum planeta in eodem cœli puncto morari per aliquot dies cernitur, eumdem fitum fixarum refpectu fervans, ftationarius dicitur; retrogradus tandem appellatur ubi contrà fignorum ordinem feu in antecedentia ut à tauro ad arietem, ab ariete ad pifces &c. proprio motu incedit.

6. Luna & Sol funt femper directi; at cæteri planetæ tum fuperiores, videlicet, Saturnus, Jupiter & Mars, tum inferiores, nimirum, Venus & Mercurius, directi deindè ftationarii & poftea retrogradi videntur. Eorum tempora periodica quibus totum zodiacum in confequentia peragrant, funt inæqualia. Nam Saturnus 30 circiter annis periodum fuam abfolvit; Jupiter annis circiter 12, Mars annis duobus ferè, Luna diebus 27 & horis 7 circiter, Venus autem & Mercurius cum Sole anno uno. Nam hi duo planetæ Solem ità conftanter comitantur ut Venus nunquam ultrà 47 circiter gradus nec Mercurius ultrà 28 à Sole digrediatur, id eft, angulus maximus fub quo diftantia Veneris aut Mercurii à Sole è Terrâ confpicitur, gradus 47 vel 28 nunquam fuperat.

7. *Circuli declinationis* feu *circuli horarii* funt circuli maximi per mundi polos tranfeuntes & proindè æquatori perpendiculares. Sideris vel puncti cujuflibet in fphærâ mundanâ *declinatio* eft arcus circuli declinationis inter fidus vel datum punctum & æquatorem interceptus. *Afcenfio recta* fideris eft arcus æquatoris inter punctum æquinoctiale vernum & circulum declinationis fideris illius comprehenfus ac fecundum ordinem fignorum numeratus. *Circuli latitudinis* fiderum funt circuli fphæræ maximi per polos eclipticæ & per fidera tranfeuntes, atquè ideò Eclipticæ perpendiculares. Hinc *Latitudo* fideris eft arcus circuli latitudinis inter fidus & Eclipticam interceptus. *Longitudo* fideris eft arcus eclipticæ ab arietis initio versùs ortum feu in confequentia ufquè ad latitudinis circulum numeratus. Punctum interfectionis Eclipticæ cum circulo latitudinis fideris dicitur locus fideris Eclipticus five locus in Eclipticâ vel locus ad Eclipticam reductus.

8. Si per locum quemvis S in ſuperficie terræ ducatur per terræ centrum T linea recta ZSN quæ ſphæræ cæleſti occurrat in Z & N, punctum Z dicitur loci S *Zenith* ſeu vertex, & punctum N vocatur ejuſdem loci *Nadir*. *Horizon ſenſibilis* ſeu apparens loci S, eſt ſphæræ circulus h v r x centrum habens in S, & polos in Z & N. *Horizon*



rationalis ſeu verus eſt circulus HVRX, centrum habens in T, & polos in Z & N, ideóque horizonti ſenſibili parallelus.

Circulus verticalis eſt circulus quilibet maximus ZVNX per Zenith atquè Nadir & per aliud quodcumque punctum in ſphærâ mundanâ tranſiens, ideóque horizonti perpendicularis.

Meridia-

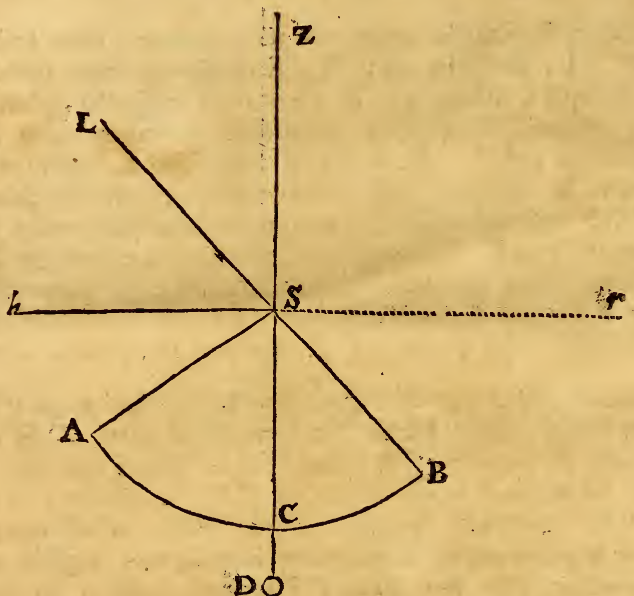
Meridianus eſt circulus verticalis PZNR per polos mundi P & p tranſiens, ac proindè æquatori perpendicularis & circulos omnes æquatori parallelos bifariam dividens. Interſectio plani Meridiani cum plano horizontis HR vel hr dicitur *Linea meridiana*. Circulus *Verticalis primarius* eſt ille verticalis qui per polos meridiani tranſit. Sit ZVNX verticalis primarius horizontem rationalem HVRX interſecans in V & X, quem meridianus etiam ſecat in H & R. Puncta quatuor R, X, H, V, dicuntur *cardines mundi*; punctum quidem R in hemiſpherio boreali cardo *Septentrionis*, H cardo *Meridiei*, V ad partes Orientis cardo *Orientis* & punctum oppoſitum X cardo *Occidentis*.

9. Diſtantia horizontis apparentis ab horizonte vero ſivè telluris ſemidiameter ST, ſenſibilis non eſt, ſi conferatur cum ſtellarum (Lunâ ferè ſolâ exceptâ) diſtantiis, & ideò terra reſpectu ſphæræ ſtellarum tanquam punctum, & quilibet terræ locus tanquam hujus ſphæræ centrum conſiderari poteſt. Nam omnes ferè Aſtronomorum obſervationes id ſupponunt & computa indè inita cum phænomenis cæleſtibus quadrant. Porrò quemadmodum ſingula terræ loca pro centro ſphæræ ſtellarum uſurpari poteſt, ità fingi poteſt in ſpatiis cæleſtibus ſphærica ſuperficies cujus tanta ſit diameter ut illius reſpectu evaneſcat Solis vel ſtellæ datæ à Tellure diſtantia, & hujus ſphæræ centrum poterit collocari indifferenter vel in terrâ vel in ſole aut in ſpatio intermedio.

10. *Altitudo poli P ſuprà horizontem* eſt meridiani arcus PR à polo ad horizontem interceptus. Ea ſemper æqualis eſt arcui ZÆ à vertice Z ad æquatorem ÆQ intercepto; Nam ſi ex circuli quadrantibus ZPR & ÆZP ſubducatur arcus communis ZP, remanebunt arcus æquales ÆZ & PR. *Altitudo æquatoris ſuprà horizontem* eſt arcus meridiani ÆH, inter æquatorem & horizontem interceptus; æqualis eſt complemento altitudinis poli ſeu arcui ZP, quod, ablato ex quadrantibus HÆZ & ÆZP communi arcu ÆZ manifeſtum eſt. *Altitudo apparens* ſideris vel puncti cujuſlibet L in ſphærâ mundanâ, eſt angulus LSv, ſub quo ex centro S horizontis ſenſibilis videtur arcus Lv circuli verticalis per L ducti uſquè ad horizontem ſenſibilem hvrx. Altitudo vera puncti L eſt angulus LTV, ſeu ipſius menſura arcus LV in circulo verticali per L ducto uſquè ad horizontem rationalem HVRX. Undè (9) ſtellarum fixarum & ſolis altitudines apparentes & veræ coincidunt.

11. Jam verò quâ ratione phænomena quæ ſuprà retulimus & alia quæ deinceps referemus obſervari potuerint, paucis exponemus; & quidem ab obſervatione altitudinis apparentis ſiderum quæ præcipuum

totius Astronomiæ fundamentum est, initium ducemus. Circuli quadrans S A B cujus limbus A C B in gradus & minuta divisus est ità statuitur ut filum S C D pondere D tensum ideòque verticale, limbum illius tangat, deindè ità vertitur ut sidus L cujus altitudo observanda est, per dioptras aut per telescopium lateri S B affixum videatur in eodem latere S B producto. Quo facto, habetur arcus A C, mensura altitudinis apparentis L S h; nam cum filum è quadrantis centro S, pendens sit semper in plano verticali, quadrans A S B erit etiam in eodem plano, (Eucl. 18. X I.) ideòque h r ad S D perpendicularis, erit intersectio

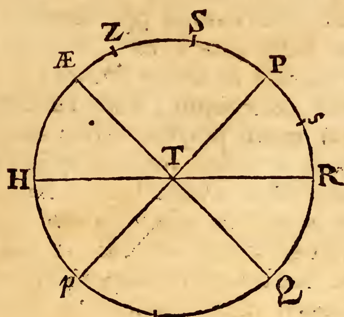


horizontis sensibilis & plani verticalis per L ducti, atquè angulus L S h sideris L altitudo apparens. Sed si ab angulis rectis L S A, & h S D, subducatur communis h S A, remanent æquales anguli L S h & A S C; hujus verò mensura est arcus A C.

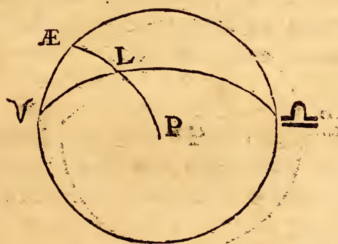
12. Hinc describi potest linea meridiana suprà quam si statuitur perpendiculariter quadrans circuli, observari poterit altitudo meridiana sideris. Nam meridianus portiones illas circulorum æquatori parallelorum, quæ suprà horizontem eminent & qui arcus diurni dicuntur, bifariam secat (per El. X I. 19. & 4., & El. III. 30.) cum sit illis circulis & horizonti eos arcus terminanti perpendicularis, & propterea si in circulo quolibet diurno sumantur puncta duo hinc indè orientem & occi-

occidentem versùs à meridiano æquidistantia, ea puncta erunt suprà horizontem sensibilem æquè alta, & contrà si æquè alta sint, à meridiano hinc indè æquidistabunt. Quarè si stellæ fixæ meridiano vicinæ altitudo observetur versùs orientem, & deindè quadrans circà filum verticale immotum ceù circa axem convertatur versùs occidentem & expectetur donec stella eandem altitudinem habeat, recta quæ bifariam dividet angulum inter duas quadrantis cum horizonte intersectiones comprehensum, erit linea meridiana.

13. Datis per observationes duabus ejusdem stellæ nunquam occidentis altitudinibus meridianis SR, sR, dantur poli P & æquatoris ÆQ altitudines PR & ÆH suprà horizontem HR. Nam datis arcubus SR & sR datur eorum differentia Ss; & quia stella S circulum describit æquatori parallelum (3) cujus P est polus, erit SP = sP; undè datur Ps, cui si addatur sR, habebitur arcus PR altitudo poli. Est autem HÆ æqualis arcui ZP seu complemento altitudinis poli ad rectum (10), datur ergò HÆ altitudo æquatoris.



14. Datâ stellæ S altitudine meridianâ SR cum æquatoris vel poli altitudine, datur illius declinatio SÆ; est enim arcus SÆ æqualis differentiæ arcuum ÆPR & SR. Sic observando quotidiè altitudinem meridianam centri Solis & indè eruendo ipsius declinationem, determinatum est planum eclipticæ & ejus ad æquatorem inclinatio seu maxima ab æquatore declinatio quæ inventa est $23\frac{1}{2}$ grad. aut verius $23^{\circ}.\ 29'$. Datâ autem inclinatione eclipticæ ad æquatorem cum solis declinatione, datur ascensio recta Solis ac longitudo. Sit enim P polus mundi, ♈Æ♎ æquator, ♈L♎ ecliptica, & PLÆ, circuli quadrans æquatori perpendicularis in Æ, & datis in triangulo sphærico Æ♈L rectangulo in Æ, latere seu declinatione Solis LÆ, & angulo Æ♈L, $23^{\circ}\ 29'$, dantur latus ♈Æ ascensio recta solis, seu puncti L, & latus ♈L quod est ejusdem longitudo, imò datur etiam angulus ÆL♈, quem circulus declinationis efficit cum Eclipticâ; Cum verò præter angulum Æ♈L, data fuerit longitudo ♈L, dabitur tum ♈Æ ascensio recta, tum ÆL, declinatio.



15. Si

15. Si quotidie obſervetur meridiana Solis altitudo, atquè indè eruantur ipſius declinatio, aſcenſio recta & longitudo, dabuntur motus Solis in Ecliptica, motus puncti declinationis in Æquatore & temporis momenta quibus declinatio vel nulla eſt vel maxima, ſeu dabuntur Æquinoctiorum & Solſtitiorum momenta (4). Porrò obſervatum eſt nec longitudinem nec aſcenſionem rectam ſolis uniformiter creſcere & proindè dies ſolares eſſe inæquales. Nam dies ſolaris eſt tempus unius revolutionis diurnæ ſolis à meridiano ad eundem meridianum; dies ſidereus ſeu primi mobilis (qui ſemper idem manet) eſt tempus revolutionis diurnæ ſtellæ fixæ à meridiano ad eumdem. Undè cum Sol motu proprio ab occaſu in ortum feratur, ſi ſtella fixa & Sol in eodem meridiano ſimul obſerventur, ſtella ad eumdem meridianum priùs redibit quam Sol qui motu proprio versùs orientem tendit. Attamen ſi aſcenſio recta Solis ex ipſius motu proprio in Ecliptica uniformiter creſceret, dies Solares, licet diebus ſidereis longiores, eſſent tamen intèr ſe æquales; Quarè cum Solis aſcenſio recta non augeatur uniformiter, neceſſe eſt ut dies Solares inæquales ſint. Simili modo collatis inter ſeſe Æquinoctiorum & Solſtitiorum obſervationibus deprehenſum eſt Solem intervallo 8 ferè dierum diutiùs morari in ſignis borealibus quam in ſignis auſtralibus; ac tandem comparando antiquas obſervationes ad determinandum momenta æquinoctiorum vel ſolſtitiorum cum recentioribus, definita eſt quantitas anni æquinoctialis, ſivè tempus quo Sol motu proprio ab uno æquinoctio ad idem æquinoctium, vel ab uno ſolſtitio ad idem ſolſtitium progreditur, & ab Authoribus Calendarii Gregoriani Lahirio, Caſſino & Blanchinio inventa eſt $365^{dier.}\ 5^{hor.}\ 49'$.

16. Datâ quantitate anni æquinoctialis, datur motus Solis medius pro quolibet dato tempore, hoc eſt motus qui Soli competeret ſi uniformiter in Ecliptica ferretur. Eſt enim ut $365^{d.}\ 5^{h.}\ 49'$ ad tempus datum, ità 360° quos Sol anni æquinoctialis tempore deſcribit proprio motu ad arcum eclipticæ dato tempore conficiendum. Hâc proportione arcus eclipticæ anno communi $365^{dier.}$ deſcribendus eſt XI Signorum $29^{\circ}.\ 45'\ 40''$, die uno eſt $59'\ 8''\ 20'''$, horâ unâ eſt $2'\ 28''$, minuto uno eſt $2''\ 28'''$.

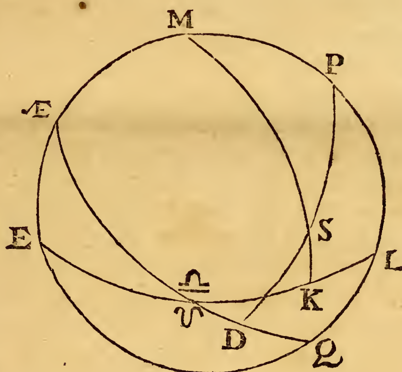
Arcus æquatoris qui dato tempore ſub Meridiano tranſit ſimili modo invenietur; nam quæratur arcus æquatoris dato tempore ſidereo ſub meridiano tranſiens, dicendum eſt: ut 24 horæ ſidereæ ad tempus datum, ità 360 grad. ad arcum quæſitum, is ergo horâ unâ erit 15°; minuto uno primo $15'$, minuto ſecundo $15''$. Cum autem Sol die uno deſcribat motu proprio medio ad Æquatorem reluto arcum $59'\ 8''\ 20'''$ ab occaſu ad ortum, ut inveniatur arcus æquatoris dato tempore ſolari medio ſub Meridiano tranſiens, dicatur ut 24 horæ Solares ad datum tempus Solare, ità 360°

59'

$59' \, 8'' \, 20'''$ ad arcum quæſitum. His igitur proportionibus tempus ſolare medium vel tempus ſidereum convertitur in gradus æquatoris & contrà. Facilè autem patet ex dictis diem ſolarem medium æqualem eſſe 24 horis ſidereis cum $3' \, 56'' \, 32'''$.

17. Si obſervetur altitudo meridiana Solis & dato ante vel poſt meridiem tempore obſervetur etiam altitudo meridiana ſtellæ alicujus, ſtellæ hujus dabuntur declinatio & aſcenſio recta. Nam ex datâ altitudine meridianâ Solis datur ejus aſcenſio recta (14) & tempore quod inter duas obſervationes intercedit in arcum æquatoris converſo (16) datur arcus æquatoris qui tempore inter duas obſervationes elapſo per Meridianum tranſit; hic arcus addatur vel ſubducatur aſcenſioni rectæ Solis, & ſumma vel differentia erit aſcenſio recta ſtellæ. Declinatio autem ſtellæ ex ipſâ altitudine ejus meridianâ eruitur (14). Quod ſi centrum Solis & centrum ſtellæ in meridiano ſimul reperiantur, eadem eſt utriuſque aſcenſio recta.

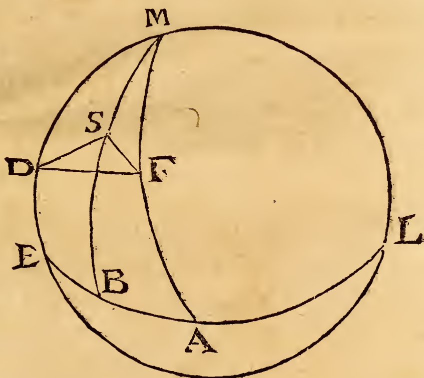
18. Datis declinatione & aſcenſione rectâ ſtellæ, dantur ipſius longitudo & latitudo. Sunto ÆQ æquator, EL ecliptica, P polus mundi, M polus eclipticæ, S ſtella, PSD quadrans circuli declinationis, & MSK, quadrans circuli latitudinis. Quæruntur arcus ♈ vel ♎ K & KS. In triangulo PSM datur latus PM ſeu diſtantia polorum P & M $23^\circ \, 29'$, datur quoque latus PS declinationis SD complementum & angulus MPS ſeu ÆPD, cujus menſura eſt arcus ÆD datus ob datos per aſcenſionem rectam arcum ♈ D vel ♎ D & quadrantem Æ♈. Quarè (per trig. ſphær.) invenitur latus MS latitudinis SK complementum & angulus M, cujus menſura eſt arcus KL; ex circuli quadrante ♈L vel ♎L ſubducatur KL, & dabitur ♈K longitudo ſtellæ S. Hinc etiam facilè patet quomodò datis longitudine ♈K & latitudine KS ſtellæ S inveniri poſſit ipſius aſcenſio recta & declinatio. Nam dato ♈K datur KL, & indè datur angulus SMP, & dato SK, datur SM, undè cum datum ſit MP, dantur in triangulo SMP latus PS complementum declinationis & angulus ÆPD, cujus eſt menſura ÆD, ex quâ ſi auferatur quadrans Æ♈, dabitur aſcenſio recta ♈D.



19. Ex hujuſmodi obſervationibus & calculis inventum eſt fixa-

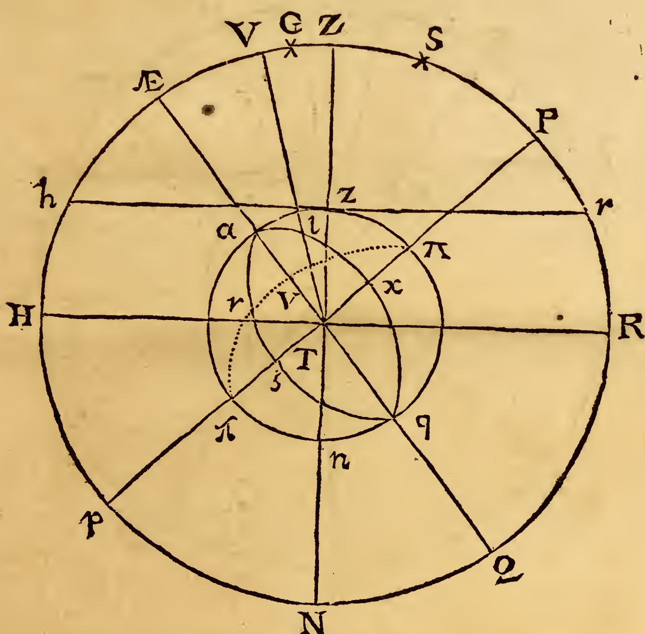
rum latitudines immutabiles eſſe, longitudines verò per ſingulos annos 50 ſecundis, & per annos 72 gradu uno quamproximè augeri. Undè manifeſtum fit ſtellas fixas motu proprio ſed lentiſſimo in circulis eclipticæ parallelis progredi in conſequentia, aut ſi ſtellæ fixæ omni proprio motu priventur, puncta æquinoctialia ſingulis annis in antecedentia moveri per arcum $50''$, atquè hæc eſt præceſſio æquinoctiorum ex quâ fit ut Sol motu proprio ab æquinoctio ad idem æquinoctium citiùs revertatur quam à ſtellâ fixâ ad eandem. Annus igitur Solaris æquinoctialis brevior eſt anno Solari ſidereo, hoc eſt brevior eſt tempore unius revolutionis Solis à ſtellâ fixâ ad eandem fixam; differentia eſt $20' \, 17''$ quo tempore Sol motu proprio arcum $50''$ conficit. Eſt ergò annus ſidereus $365^{\text{dier.}} \, 6^{\text{hor.}} \, 9' \, 17''$.

20. Stellarum diſtantiam dicimus arcum circuli maximi inter ſtellarum centra comprehenſum, aut, quod eodem redit, angulum quem rectæ à centris ſtellarum ad oculum ſpectatoris ductæ efficiunt. Si ope ſemicirculi vel quadrantis obſerventur diſtantiæ ſtellæ alicujus ab aliis duabus ſtellis quarum longitudo & latitudo notæ ſunt, illiùs quoque longitudo & latitudo dabuntur. Nam eſto ecliptica E L, polus ejus M, ſtellæ notæ longitudinis & latitudinis S & F, tertia ſtella D. Ducantur tres circuli latitudinis M D E, M S B & M F A, ſintque datæ diſtantiæ D S & D F. Quia dantur latitudines S B & F A ſtellarum S & F, dabuntur earum complementa S M & F M cum angulo B M A, cujus menſura eſt arcus B A, differentia longitudinis ſtellarum S & F, & ideò in triangulo S F M, dabitur S F, cum angulo M S F. Datis in triangulo D S F, tribus lateribus dabitur angulus D S F, & ſi ex $360°$ ſeu quatuor angulis rectis ſubducatur ſumma angulorum datorum D S F & F S M, dabitur angulus D S M, cum quo & notis lateribus D S & S M, reperientur latus M D complementum quæſitæ latitudinis ſtellæ D, & angulus EMB cujus menſura eſt arcus E B, differentia longitudinum ſtellarum D & S; hæ autem obſervationes diſtantiarum Aſtrorum inter ſe propter Aſtrorum continuam converſionem non facile ad ſummam acribeiam perducuntur.



21. Sit Π z æ π q telluris globus per cujus centrum T tranſit axis mundi P p. Loci z ſit horizon ſenſibilis h r, horizon rationalis H R, &

& meridianus PZHN. His ità conſtitutis, axis telluris dicitur pars Ππ, axis mundi Pp telluris ſuperficie terminata in punctis Π & π, quæ poli terræ vocantur. Polus Π polo cœleſti P nobis conſpicuo ſubjectus borealis vel arcticus, alter π auſtralis vel antarcticus appellatur. Interſectio plani æquatoris cœleſtis cujus eſt diameter Æ Q, cum telluris ſuperficie, ſivè circulus maximus æ s q x, cujus poli ſunt Π & π, dicitur æquator terreſtris aut etiam circulus æquinoctialis vel κατ' ἐξοχὴν linea. Latitudo loci cujuſvis z in ſuperficie terræ eſt diſtantia ejus ab æquatore, ſi-



vè eſt meridiani terreſtris arcus z æ inter locum z & æquatorem æ z q x interceptus. Undè patet latitudinem loci z in ſuperficie terræ numero graduum æqualem eſſe declinationi cœleſti verticis Z ejuſdem loci, ſeu elevationi poli PR. Nam arcus PR & ZÆ, ſunt æquales (10) & arcus ZÆ ac z æ ſimiles; Per locum in ſuperficie terræ pro arbitrio determinatum ducatur meridianus Π r π æquatorem æ s q x ſecans in r; dicaturque Π r π primus meridianus, & loci cujuſvis alterius z longitudo dicetur æquatoris arcus r æ inter meridianum primum Π r π & meridia-

ridianum zæπq loci z interceptus atquè ab occaſu ad ortum numeratus.

22. Si per trigonometriam menſuretur diſtantia z l duorum locorum z & l ſub eodem meridiano ſitorum & ope quadrantis circuli ex iiſdem locis obſerventur diſtantiæ S Z & S V, ſtellæ fixæ S à locorum verticibus Z & V, dabitur telluris ſemidiameter z T. Nam datis arcubus S V & S Z, dabitur eorum differentia vel ſumma V Z, & hinc



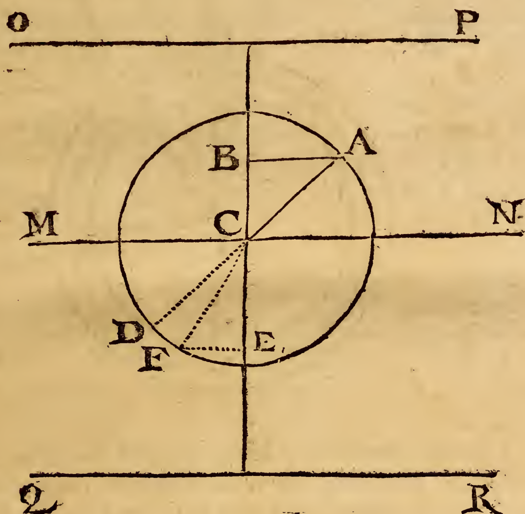
datur arcus l z qui arcui V Z ſimilis eſt. Quarè per obſervationes aſtronomicas notum erit quot gradus vel minuta in arcu l z contineantur & per trigonometricas menſuras ejuſdem arcûs longitudo hexapedis vel pedibus aut aliis menſuris notis data erit, & indè inferendo ut numerus minutorum in arcu l z contentorum ad 360° ſeu ad 21600', ità longitudo l z menſuris notis expreſſa ad circulum telluris maximum, dabitur hic circulus ex quo invenietur ſemidiameter z T.

CAPUT

CAPUT II.

Siderum refractio & parallaxis breviter explicantur.

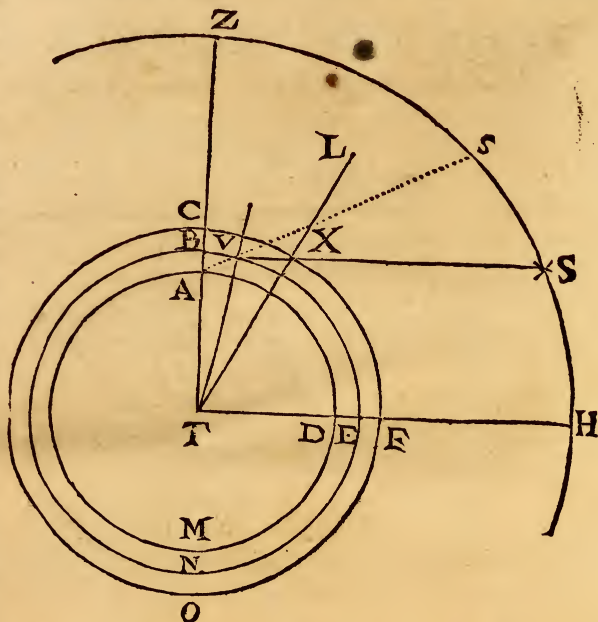
23. SIt M N plana superficies quâ aer rarior M O P N aerem densiorem contingit. Radius lucis per rectam A C propagatus



ex aere rariori in densiorem obliquè transeat per punctum C & indè feratur per C E, per C ducatur B F ad M N perpendicularis, experientiâ certum est radium A C in aere densiori non propagari per rectam continuam A C D, sed in puncto C ità refrangi per C E accedendo ad perpendicularem B C F, ut sinus anguli cujusvis A C B sit semper ad sinum anguli E C F in datâ ratione. A C dicitur radius incidens, C punctum incidentiæ, C E radius refractus, A C B angulus inclinationis, E C F angulus refractus, & D C E angulus refractionis.

b 3 24. Si

24. Si atmoſphæra C X F O M A terræ A D M circumfuſa, diviſa intelligatur in innumeras ſuperficies ſphæricas telluris ſuperficiei concentricas C X F O, B V E N aer inter duas hujuſmodi ſuperficies contentus & aeris ſuperioris pondere compreſſus eò denſior erit quò minùs à telluris centro T diſtabit. Sit Z S H circulus verticalis ex centro telluris T deſcriptus, arcus S H altitudo ſideris S ſuprà horizontem rationalem T H, & Z S diſtantia ſideris à vertice Z. Si radius lucis S X è ſidere S propagatus incidat in atmoſphæram in X, is refringetur in X per X V accedendo ad ſemidiametrum T X ſuperficiei ſphæricæ C X F O perpendicularem (23) & quoniam aëris denſitas in V major eſt quam in X radius in puncto V, ſuperficiei B V E rursùs refringetur accedendo ad T V, atquè ità continuò incurvabitur & in lineam



X V A versùs T cavam flectetur. Hanc curvam tangat in A recta A s, circulo verticali Z H occurrens in s, & quoniam radius lucis S X V A oculum ſpectatoris in A ingreditur ſecundum directionem tangentis A s, ſidus, quod eſt reverâ in S, videbitur in s, in loco nempe altiore; notum enim eſt ex opticâ objectum videri in eâ rectâ ſecundum quam fit directio radiorum oculos ingredientium.

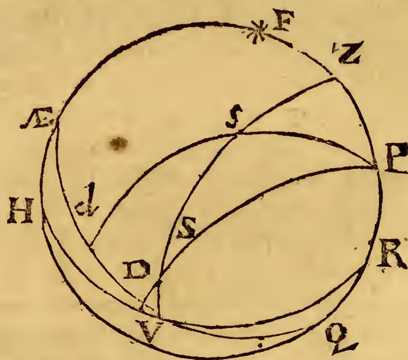
25. Producatur T X ad L, ut ſit S X L angulus inclinationis radii S X in atmoſphæram incidentis, & V X T angulus refractus, data erit ratio ſinus anguli S X L, ad ſinum anguli V X T (23) ac proindè ſinus angulorum inclinationis erunt ſemper ut ſinus angulorum refractorum. Quarè ſideris in vertice Z conſtituti, ubi nullus eſt angulus inclinationis, nulla erit refractio, & ſiderum in æqualibus à vertice diſtantiis ſitorum, ubi æquales ſunt inclinationum anguli, æquales erunt refractiones. Solis igitur, Lunæ, fixarum ac ſiderum omnium extrà terreſtrem atmoſphæram conſtitutorum, in paribus à vertice diſtantiis refractiones ſunt æquales.

26. Si-

26. Siderum refractio ad singulos altitudinis gradus, observatione definiri potest. Esto HR horizon, P polus mundi, ÆQ æquator, PZH Meridianus, ZSV circulus verticalis, PSD & Psd, circuli declinationis. Stellæ fixæ F propè Zenith constitutæ observetur altitudo meridiana HF, quæ à refractione libera est, & indè eruatur ejus declinatio FE (14). Deindè observetur ejusdem stellæ in S positæ altitudo quælibet SV, & ope horologii oscillatorii notetur tempus quod inter primam & secundam observationem intercedit, & inveniatur arcus æquatoris ÆD qui eo tempore per meridianum transiit (16). Stella quæ ob refractionem in loco altiori s apparet sit reverâ in S, erit PSD circulus declinationis stellæ in S constitutæ, & in triangulo PZS, dabitur angulus ZPS, cujus mensura est arcus ÆD cum latere PZ quod est distantiâ poli à vertice & latere PS, quod est declinationis DS seu ÆF complementum, undè invenitur latus ZS cum altitudine SV, complemento lateris ZS. Si ergò ex altitudine observatâ SV, subducatur altitudo inventa SV, quæ à refractione libera est, dabitur arcus Ss, refractio stellæ in quolibet gradu altitudinis. Hoc modo D. De la Hire in tabulis Astronomicis observavit refractiones siderum diversis anni tempestatibus, in pari altitudine easdem esse exceptis refractionibus circà horizontem quas nonnullis inconstantiis obnoxias expertus est, atquè hinc unicam tabulam refractionum ex ipsis observationibus deductam constituit, quam postea correxit D. Cassinus & eâ correctâ utuntur Astronomi. Quoniam verò radiorum lucis in atmosphæram incidentium obliquitas cum sideris à vertice distantiâ crescit, iisdem observationibus invenit refractiones siderum à vertice ad horizontem usquè ubi maximæ sunt, continuò augeri; at quod ex alienis observationibus supponebat, videlicet refractiones borealium regionum ipsâ etiam æstate, longè majores esse quam in zonis temperatis, id minimè verum esse ostendunt accuratiores observationes ab Academicis Parisiensibus ad circulum polarem habitæ, quibus refractiones etiam horizontales Parisiensibus æquales invenerunt. Vide Domini De Maupertuis nobilissimum opus de figurâ telluris per observationes ad circulum polarem definitâ.

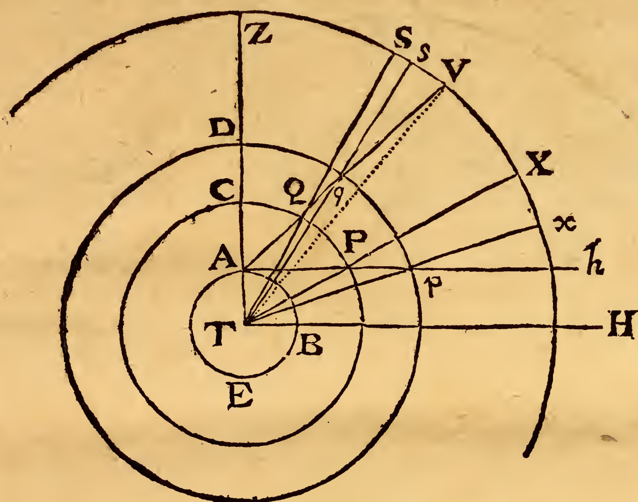
27. Refractio sideris declinationem, ascensionem rectam, longitudinem ac latitudinem afficit & arcus circuli maximi quo sideris declinatio, ascensio recta, longitudo & latitudo minuitur vel augetur per refractio-

fractionem, dicitur refractio declinationis vel ascensionis rectæ &c.; at ex datâ altitudinis refractione aliæ refractionum species inveniri possunt. Nam in figurâ superiori dantur in triangulo sZP latera Zs & ZP cum angulo sZP & indè reperitur latus sP cum angulo sPZ cujus mensura est arcus Æd, undè cum detur arcus ÆD, dabitur arcus dD refractio ascensionis rectæ sideris S; & quia dantur arcus ds & DS, dabitur etiam horum arcuum differentia, quæ est refractio declinationis. Sed datis declinatione & ascensione rectâ: puncti cujusvis in sphærâ mundanâ, dantur ipsius latitudo & longitudo (18); patet igitur quomodo latitudinis & longitudinis refractiones possint inveniri.



28. Jam de *Parallaxibus* pauca nobis delibanda sunt. Cætera, ubi opus fuerit, suis locis exponemus. Itaque distantia locorum in sphærâ cælesti ad quæ sidus vel phænomenon quodvis è superficie telluris & ex ejus centro spectatum refertur, sivè arcus circuli maximi inter illa duo loca interceptus, ipsius sideris aut phænomeni parallaxis appellatur, quæ proindè nulla est nisi terræ semidiameter sensibilem habeat rationem ad distantiam sideris à terrâ. Sit T centrum telluris ac cœli; A oculus in superficie terræ; Z zenith loci A; Q sidus vel phænomenon quodvis; CQP verticalis per Q transiens; ZSXH verticalis in superficie sphæræ cælestis; ABE verticalis in superficie terræ; TH horizon rationalis & Ah horizon sensibilis. His ità constitutis, locus physicus sideris Q, est punctum illud in quo sideris centrum hæret. Locus opticus apparens seu visus est punctum V in superficie sphæræ cælestis, in quo recta ex oculo A per centrum sideris Q ducta terminatur. Locus opticus verus est punctum S in superficie sphæræ cælestis in quo terminatur recta linea TQS ex terræ centro T per Q ducta. *Parallaxis* est arcus SV sivè differentia duorum locorum opticorum. *Angulus parallacticus* qui plerumque etiam *Parallaxis* vocatur, est angulus AQT quem in centro sideris efficiunt rectæ AQ & TQ ex oculo A & ex centro terræ T ad sideris centrum Q ductæ. Parallaxis altitudinis quæ & parallaxis simpliciter dicitur, est differentia inter distantiam ZV à zenith Z ex loco A visam & distantiam veram ZS, sivè est arcus SV in circulo verticali ZSVH, undè manifestum est altitudinem sideris veram per parallaxim minui & ejus à vertice distantiam augeri, atquè ideò parallaxim esse refractioni contrariam. Parallaxis horizontalis est parallaxis Xh, sideris P in horizonte sensibili Ah apparentis. 29.

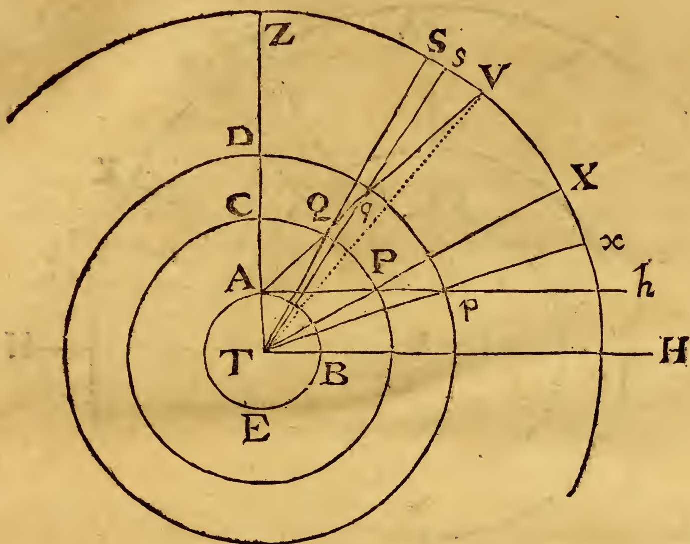
29. Parallaxis S V est mensura anguli parallactici A Q T. Jungatur T V, & angulus externus A Q T æqualis erit duobus internis oppositis Q T V & Q V T; sed angulus Q V T sivè A V T, evanescente A T respectu T V, nullus est (9), ergò angulus parallacticus A Q T, æqualis est angulo Q T V, seu S T V, cujus mensura est arcus S V.



30. Manente sideris à centro terræ distantiâ; sinus parallaxeos est ad sinum distantiæ visæ sideris à vertice in ratione datâ semidiametri telluris ad distantiam sideris à centro terræ. Nam in triangulo A Q T, est A T ad Q T, in ratione sinûs anguli parallactici A Q T seù sinus parallaxeos ad sinum anguli T A Q sivè ad sinum distantiæ visæ Z V à vertice, & ideò, datis A T & Q T, data est ratio sinuum illorum. Hinc verò sequitur sideris in vertice Z, constituti parallaxim esse nullam, eandem crescere cum distantiâ à vertice & in horizonte fieri maximam. Sequitur quoquè sinus parallaxium in paribus sideris à centro terræ distantiis esse ut sinus distantiarum visarum à vertice, & ideò si detur parallaxis sideris in aliquâ à vertice distantiâ, dabitur in aliâ quâvis distantiâ à vertice.

31. Datâ sideris Q, parallaxi A Q T; cum angulo Z A V seu distantiâ apparente à vertice, datur in semidiametris terræ tum distantia Q T sideris Q à centro terræ, tum distantia ejus A Q à loco A. Dato enim angulo Z A Q datur T A Q complementum illius ad duos rectos,

ctos, undè, ob datum etiam angulum A Q T, dantur tres anguli trianguli Q A T, ex quibus datur ratio laterum inter se. Hinc datâ sideris P parallaxi horizontali, si inferatur ut sinus parallexeos ad sinum totum, ità semidiameter telluris A T ad quartum obtinebitur distantia P T sideris à centro terræ ob angulum T A P rectum.



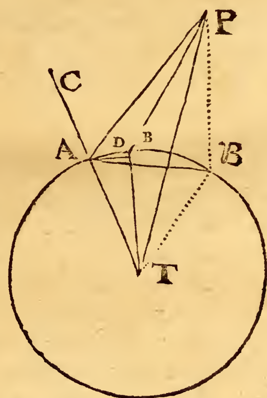
32. Sinus parallaxeon siderum Q & q in æqualibus distantiis apparentibus à vertice, sunt in ratione reciprocâ distantiarum siderum à centro terræ. Etenim ut sinus parallaxeos A Q T, ad sinum anguli Z A V, ita est A T ad Q T & ut sinus anguli Z A V, ad sinum parallaxeos A q T, itâ q T ad A T, ideòque ex æquo, sinus parallaxeos A Q T est ad sinum parallaxeos A q T ut q T ad Q T. Ex quo etiam sequitur siderum in eâdem altitudine apparente existentium, hujus majorem esse parallaxim quod minùs distat à centro terræ.

33. Parallaxis altitudinis, uti de refractione dictum est, sideris declinationem, ascensionem rectam, longitudinem & latitudinem mutat; & eodem modo quo ex refractione altitudinis inveniuntur aliæ refractionum species, sic ex datâ parallaxi altitudinis eruuntur parallaxes declinationis, ascensionis rectæ, longitudinis & latitudinis; illud quoque observandum est sideris in meridiano existentis nullam esse ascensionis rectæ refractionem nec parallaxim; cum enim altitudinis refractio sidus attollat, & altitudinis parallaxis illud deprimat, in eodem meridiano

seu

ſeu circulo declinationis (per hyp.) aſcenſio recta indè non mutatur. Similiter ſi circulus verticalis in quo ſidus reperitur ſit ad eclipticam perpendicularis, nulla erit longitudinis refractio nullaque parallaxis; nam in hoc caſu circulus verticalis eſt ſimul circulus latitudinis, & ſiderum in eodem latitudinis circulo exiſtentium longitudo eſt eadem.

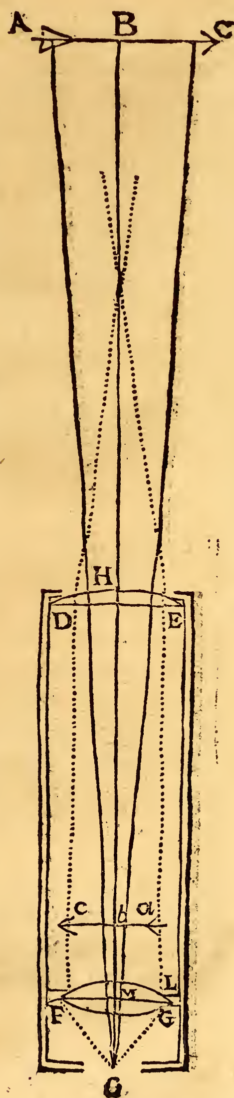
34. Datâ differentiâ longitudinis locorum duorum in ſuperficie terræ, ſeu dato arcu æquatoris inter locorum illorum meridianos intercepto, datur tempus quo Sol vel ſtella fixa ab uno meridiano ad alterum motu diurno tranſit (16); & indè definiri poteſt utrum obſervationes in illis duobus locis habitæ, reſpondeant eidem temporis abſoluti momento an non. Facilè idem innoteſcit per Lunæ & Jovis Satellitum eclipſes; eodem enim momento temporis eclipſis initium ac finis, & macularum in Lunâ notarum immerſio in umbram vel emerſio ex umbrâ ex omnibus terræ locis undè conſpici poſſunt videntur, atquè ex his phænomenis differentia longitudinis locorum determinatur. His poſitis ſi ex locis duobus A & B, quorum diſtantia ADB data eſt, Phænomeni vel ſideris P in plano verticali APBT, exiſtentis altitudines apparentes & à refractionibus liberæ obſervatæ fuerint eodem tempore, inveniri poterit puncti P parallaxis & diſtantia à centro terræ PT. Nam per obſervationem altitudinis apparentis in loco A, datur angulus CAP, diſtantia apparens ſideris à vertice & indè datur angulus PAT, anguli CAP complementum ad duos rectos, eodemque modo per obſervationem in loco B factam invenitur angulus PBT. Sed dato arcu ADB, datur angulus ATB & hinc in triangulo iſoſcele ATB, dantur anguli æquales TAB & TBA. Quarè dantur etiam in triangulo ABP, anguli PAB, & PBA quos latera PA & PB efficiunt cum chordâ AB. Ergò triangula duo ABT & ABP dantur ſpecie ac proindè datur ratio PB ad BT, & quia datis angulis ABT & ABP datur angulus PBT, ductâ rectâ PT, dabuntur in triangulo PTB, angulus TBP, & ratio laterum TB & BP, atquè ideò triangulum hoc ſpecie dabitur. Innoteſcet igitur tum angulus parallacticus BPT, tùm diſtantia PT, ſeu ejus ratio ad telluris notam ſemidiametrum. Hâc igitur ratione inveniri poteſt parallaxis ſideris aut Phænomeni vel quieſcentis vel utlibet moti. Verùm Aſtronomi recentiores plures invenerunt methodos quibus unicus obſervator in eodem loco manens ſiderum



motu diurno ac proprio agitatorum parallaxes poteſt determinare. De his, ubi è re viſum fuerit, dicemus. Vid. Keill. in Introductione ad veram Aſtronomiam.

CAPUT III.

De Teleſcopii ac Micrometri uſu & Phænomenis horum Inſtrumentorum beneficio obſervatis pauca.

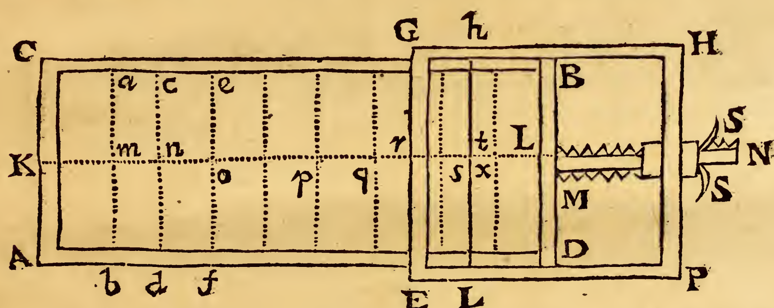


35. SIt Teleſcopium Aſtronomicum DFGE, vitrum objectivum DE, oculare FG; objectum AC; itâ remotum ut radii qui ex ſingulo illius puncto in totam vitri objectivi ſuperficiem incidunt pro parallelis poſſint uſurpari. Radii illi ex eodem puncto v. gr. A propagati, à vitro objectivo ità franguntur ut poſt vitrum DE coeant in unum punctum a, quod eſt puncti A imago, & ſimiliter punctum C pingitur in c, totumque objectum AC in ac, ſitu inverſo, eſtque c a foci locus in quo proindè oculus O, trans virtum oculare FG, videt objectum AC, ſeu ipſius imaginem a c. Hinc ſi in foci loco c a poſitum ſit corpus aliquod opacum, oculus illud diſtinctè videbit tanquam objecto AC, ſeu potiùs imagini ejus a c contiguum.

36. Sit BO Radius ad AC normalis & per centra H & M vitrorum tranſiens, ideóque irrefractus. Jungatur recta AO, & objectum AB, oculo nudo videretur ſub angulo AOB, eſtque proindè angulus AOB, magnitudo apparens objecti AB. Quoniam verò radii ex punctis imaginis b & a parallelè propagati colliguntur à vitro oculari FG in ejus foco O ubi oculus verſatur, pars objecti AB, ſeu ejus imago a b, videtur ſub angulo MOL, & (per probl. 31. Element. Dioptr. Clariſſ. Wolf.) diſtantia foci lentis objectivæ Hb, eſt ab diſtantiam foci lentis ocularis bM, ut angulus MOL ad angulum AOB, ſeu ut magnitudo apparens imaginis a b ad magnitudinem apparentem objecti AB nudo oculo viſi, ex quo pa-

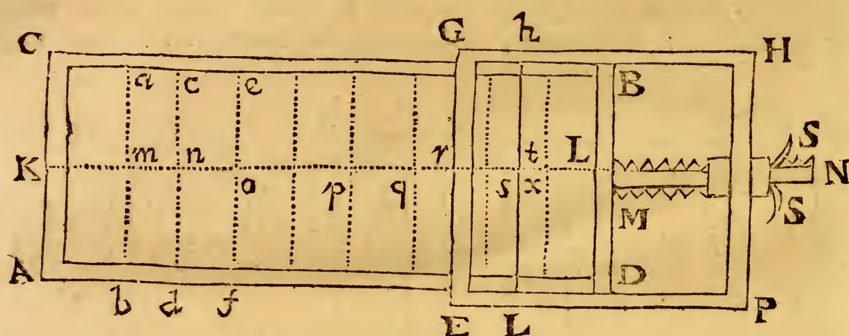
ter quod in eodem Telescopio magnitudines apparentes objectorum sunt proportionales magnitudinibus imaginum in foco positarum & trans vitrum oculare visarum.

37. His positis, facile est micrometri usum intelligere. Est autem micrometrum instrumentum quod in foco lentis objectivæ telescopii aptatur ad magnitudines apparentes quæ gradum unum vel gradum cum semisse non superant, dimetiendas. Illius constructionem quam D. De-la-Hire in tabulis Astronomicis veluti usibus Astronomicis accommodatiorem dedit, referemus. Constat ex duobus quadris rectangulis quorum alterum A B C D, ut plurimum longitudinem habet duorum pollicum cum semisse & latitudinem unius pollicis cum semisse. Hujus quadri, latera longa A D, C B, in partes æquales & tertiâ parte unius pollicis inter se distantes dividuntur, ità tamen ut lineæ ductæ per singu-



las divisiones sint ad latera A D, C B, perpendiculares. Hisce divisionibus fila serica benè tensa applicantur, glutinanturque cerâ. Additur filum sericum K L, dictum transversale, quod ad angulos rectos fila parallela modò descripta a b, c d, e f, &c. secet & in medio laterum A C, B D glutinatur. Alterum quadrum E F G H cujus longitudo E F non superat unum pollicem cum semisse, ita priori accommodatur ut ejus latera E F, G H, moveantur super latera A D, C B, alterius quadri nec ab ipso separentur. Facies hujus secundi quadri quæ divisam faciem prioris respicit, filo etiam serico & tenso h L, instruitur, quod, cum movetur quadrum ubiquè prioris quadri filis parallelum maneat, eaque superlabitur quam proximè, nec tamen eis occurrit. Cochlea deindè M N, lateri B D, longioris quadri affigitur, cujus striatum receptaculum lateri F H alterius adhæret & in foramine rotundo circumvolvitur. Cochlea ejusque receptaculum auriculis S, S instructum ità inter se aptari debent ut receptaculum & quadrum E H, ne minimùm quidem moveri possit, nisi receptaculi motu conversionis.

Quadrum A B C D, telescopii cujusvis longitudinis tubo in distantiâ foci objectivæ lentis ità aptatur ut ipsius quadri planum perpendiculare sit ad telescopii axem. His ità constitutis, telescopium in cœlum convertatur & ità disponatur ut duæ stellæ fixæ quarum distantia apparens in minutis secundis aliundè nota sit, sint in filo transversali K L, positæ verseturque cochlea donec filum mobile h L, per centrum x, stellæ unius transeat, alterius stellæ centro m, vel n, existente in alio filo a b, vel c d. Hâc observatione notum erit cuinam distantiæ apparenti respondeat longitudo m x, vel n x, in lineis & lineæ partibus data, & indè per proportionis regulam, observatâ quâlibet aliâ siderum distantiâ



n q, dabitur angulus sub quo hæc distantia nudo oculo videretur, inferendo sic: ut m x vel n x ad n q, ità distantia apparens stellarum duarum m, vel n, & x ad distantiam apparentem punctorum n & q. Moveatur jam quadrum E F G H ope receptaculi striati donec filum ejus sericum h l, exactè conveniat cuilibet ex filis parallelis alterius quadri, noteturque positio auricularum receptaculi & iterum moveatur receptaculum donec idem filum quadri E F G H proximo filo alterius congruat, vel, quod idem est, moveatur quadrum E F G H, per spatium quatuor linearum, numerenturque revolutiones receptaculi & partes unius revolutionis quæ filorum intervallo linearum quatuor conveniunt. Condatur tandem tabula revolutionum receptaculi & partium ejus quæ singulis minutis primis & secundis ex noto superiùs toto intervallo debentur.

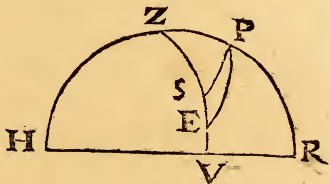
38. Ubi diameter planetarum erit observanda, directo telescopio cum micrometro ad planetam ità disponantur fila movendo telescopium ut sideris limbus unum ex filis parallelis immobilibus percurrat; deindè receptaculum convertatur, donec filum mobile limbum alterum Planetæ contingat. Manifestum est ex distantiâ cognitâ inter fila micrometri

quæ

quæ planetam comprehendunt, notam fieri Planetæ diametrum apparentem.

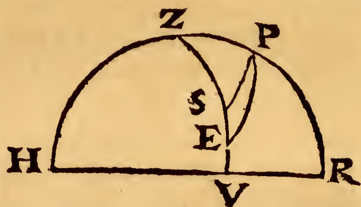
39. Datâ declinatione & afcenfione rectâ ftellæ fixæ, inveniri poteft alterius ftellæ declinatio & afcenfio recta, modò tamen duæ illæ ftellæ tranfire viciffim poffint per campum telefcopii immoti. Ità enim difponantur fila parallela micrometri ut motus diurnus ftellæ quæ alteram præcedit fiat fuper unum ex illis V G. Super a b, in quo fitu filum c d, exponet portionem exiguam paralleli quem ftella defcribit, & filum K L illud ad angulos rectos interfecans, circulum aliquem declinationis. Notetur temporis momentum quo ftella præcedens filo transverfali occurrit in m. Similiter immoto telefcopio obfervetur tempus appulsûs alterius feu fequentis fideris ad idem filum tranfverfale feu circulum declinationis, & fi intereà filum parallelum mobile h L, fideri huic aptetur, immoto manente micrometro ope diftantiæ m x, filorum a b & h L, diftantiam apparentem inter parallelos fiderum duorum quæ eft differentia declinationis fiderum, obtinebimus. Sed fi differentia temporis inter utriufque fideris tranfitum per filum tranfverfale in minuta tam prima quam fecunda gradûs convertatur (16) differentiam afcenfionalem fiderum habebimus.

40. Hæc obfervatio fupponit nullum effe fideris motum proprium nullamque parallaxim. Si fidus motum proprium habeat, illum oportet ex obfervationibus determinare quoad declinationem & afcenfionem rectam illiúfque rationem habere. Quo peracto, fi aliqua fit fideris parallaxis poterit ità reperiri. Obfervetur fideris ad meridianum appellentis afcenfio recta quæ parallaxi obnoxia non eft (33), & differentia inter hanc afcenfionem rectam fideris in meridiano exiftentis & afcenfionem rectam ejufdem fideris alibi exiftentis obfervatam, erit parallaxis afcenfionis rectæ ex qua parallaxis altitudinis inveniri poterit. Sit enim H R horizon, H Z R meridianus, Z zenith, P polus mundi, Z S E V circulus verticalis, S fidus obfervatum in loco S & deindè in meridiano, E locus fideris vifus, S locus verus, & ideò S E parallaxis altitudinis; S P & P E circuli declinationis. Datur, (per hyp.) angulus S P E, cujus menfura eft parallaxis afcenfionis rectæ fideris obfervata. Datur etiam punctum illud quod eft interfectio æquatoris & meridiani tempore obfervationis fideris in E, apparentis, undè habetur arcus æquatoris inter meridianum R Z H & circulum declinationis P E interceptus qui eft menfura anguli Z P E. Quarè in triangulo Z P E, dantur latus Z P diftantia poli à vertice, & latus Z E diftantia vifa



fideris

ſideris à vertice cum angulo ZPE. Innoteſcet igitur angulus PZE: ab angulo ZPE, ſubducatur datus SPE, & dabitur angulus ZPS. Denique in triangulo ZPS, ex datis angulis PZS & ZPS, cum latere ZP, dabitur latus ZS, vera ſideris à vertice diſtantia quæ ex visâ ZE, ablata relinquet SE parallaxim altitudinis.



41. Teleſcopium maculas quamplurimas variabiles quæ ſuper corpus Solis incedere videntur oſtendit, ex earum motu ſolem circà proprium axem $25\frac{1}{2}$ diebus revolvi infertur. In Venere pro variâ ejus ad Solem & Terram poſitione phaſes diverſæ conſpiciuntur phaſibus Lunaribus ſimiles ità ut partem illuminatam Soli conſtanter obvertat. Præterea Mercurius & Venus tanquam maculæ nigræ & rotundæ diſcum Solis trajicere viſi ſunt. Undè notum factum eſt Planetas illos eſſe corpora opaca à Sole illuſtrata. In Jove, Marte ac Venere maculæ obſervatæ fuerunt quarum motus rotationem illorum planetarum circà proprium axem probat. Circà Jovem quatuor revolvi videntur lunulæ Jovis corpus perpetuò comitantes. Sunt omnes ut & Jupiter ipſe corpora opaca lumen ſuum à Sole mutuantia; nam Jove inter ipſas & Solem diametraliter interpoſito, lumine privantur & cælo ſereno evaneſcunt; ubi verò aliqua Jovialis Lunula inter Solem & Jovem tranſit, ejus umbra inſtar maculæ nigræ ac rotundæ obſervatur in ipſo Jovis diſco. Quinque pariter Lunulæ Saturnum comitantur & circà eum revolutiones ſuas agunt lumineque privantur dum radii Solares à Saturni corpore opaco intercipiuntur. Hugenius ex propriis obſervationibus intulit Saturnum cingi annulo tenui, plano, nuſquam cohærente cum corpore Saturni & ad Eclipticam inclinato; quæ hypotheſis, ſi ità nunc poteſt appellari, non ſolùm Phænomenis ab Hugenio obſervatis, ſed & aliis plurimis quæ magnâ diligentiâ à Caſſino & Maraldo obſervata fuere ſatisfacit. Tandem per teleſcopium ſtellæ longè plures quam oculo nudo cernuntur; Stellæ illæ quas nebuloſas dicunt & integra via lactea nihil aliud ſunt quam plurimarum ſtellarum quæ oculo non diſtinguuntur congeries. Novæ quoque in cælis ſtellæ apparent & quæ antè videbantur, nonnunquam inconſpicuæ fiunt, illarum quædam apparitionis & diſparitionis periodos habent quæ quámdam regularitatem obtinere videntur, earumque magnitudo ſub initio apparitionis creſcit & ſub finem decreſcit.

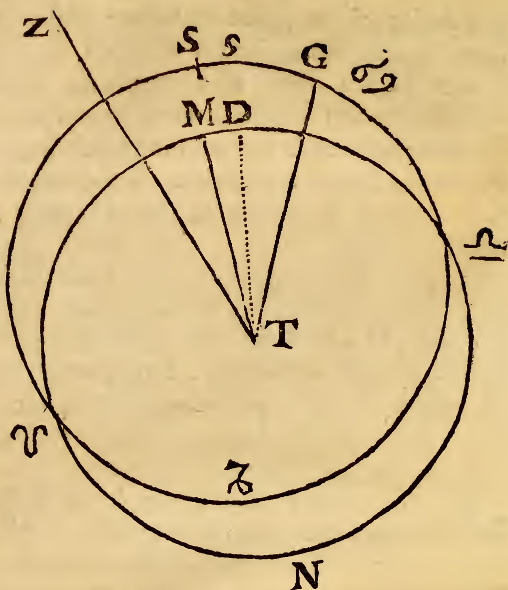
42. Si ſæpius obſervetur tum motus Solis in Eclipticâ (15) tum ipſius diameter apparens (39) quam fieri poteſt accuratiſſimè, circà datum punctum in plano deſcribi poterit curva ſimilis orbitæ quam Sol circà terram percurrere videtur. Nam cum diametri Solis apparentes ſint

ſint reciprocè ut ipſius à tellure diſtantiæ, ex datis diametris apparentibus dantur diſtantiarum rationes & ex dato Solis motu in Eclipticâ, dantur anguli inter illas diſtantias contenti. Si verò ex hujuſmodi obſervationibus conferantur diametri apparentes Solis cum ipſius angulari velocitate circà terram, apparet areas quas Sol radio ad terram ducto verrit, eſſe temporibus proportionales, Soliſque orbitam non multum differre à circulo & haberi poſſe pro ellipſi cujus umbilicum alterum occupat terra. Eſt autem Solis diameter apparens maxima 32′ 40″, & minima 31′ 36″ juxtà D. Caſſini in tabulis Aſtronomicis & ideò maxima diſtantia Solis à terrâ eſt ad diſtantiam minimam ut 32′ 40″ ad 31′ 36″, ſivè ut 1960 ad 1896 circiter, ſive 245 ad 237. Ex ſimilibus obſervationibus, tum diametri apparentis Lunæ, tum velocitatis ipſius in unâ revolutione colligitur hunc planetam radio ad centrum terræ ducto areas deſcribere temporibus circiter proportionales.

43. Si itaquè obſervetur locus Solis in Eclipticâ quandò tum ipſius velocitas tum diameter apparens minima eſt, dabitur tempore dato locus Apogæi Solis & collatis plurium annorum obſervationibus innoteſcet Apogæi motus annuus qui juxtà D. Caſſini eſt 1′ 2″ & indè per proportionis regulam habetur motus Apogæi pro quolibet dato tempore. Hinc ſi tempore quovis obſervetur Solis longitudo vera, dabitur eodem tempore locus Apogæi Solis & ipſius anomalia vera ex quâ eruetur ejuſdem anomalia media (per ſchol. ad prop. 31. lib. 1.) ac proindè longitudo media habebitur tempore obſervationis. Hæc longitudo media aſſumatur tanquam radix ſeu principium motuum mediorum Solis & tempus obſervationis tanquam epocha temporum mediorum computandorum & dato quolibet alio tempore medio inveniri poterit medius Solis motus huic tempori proportionalis, & indè habebitur ipſius longitudo media & diſtantia ejus media ab Apogæo ſeu anomalia media dabitur ex quâ deindè eruetur anomalia coæquata, ac proindè longitudo vera Solis habebitur.

44. Quia verò dies Solares ſunt inæquales (15), neceſſe eſt ut tempus apparens quod diebus ſolaribus conſtat, fluat etiam inæquabiliter. Differentia quæ eſt inter tempus apparens ſeu verum & tempus æquabile ſeu medium dicitur æquatio temporis quâ indigemus ut tempus medium convertatur in tempus apparens & viceversâ, ideóque ut invento loco Solis pro tempore medio, inveniatur etiam pro tempore vero & contrà.

45. Sit T, Cœli & Terræ centrum T Z, planum immobile circuli alicujus horarii, ♈ M ♎ N æquator, ♈ S ♋ ♎ ♑ Ecliptica, S Sol, ♈ S Solis longitudo vera, ♈ S ejuſdem longitudo media, cui æqualis capiatur arcus æquatoris ♈ M, & ♈ D ſit Solis aſcenſio recta vera. Ducantur ad puncta mobilia M & D radii æquatoris T M & T D qui ſemper moveantur cum punctis M & D, in conſequentia. Quoniam æquator per circulum horarium T Z, motu æquabili diurno nempè qui fit ab oriente in occidentem, tranſit; ſi punctum D aſcenſionis rectæ Solis etiam æquabiliter progrederetur in æquatore ab occidente in orientem, dies Solares ſeu revolutiones ſingulæ puncti D à circulo horario T Z ad eundem, eſſent æquales & tempus apparens à medio non differret. Sed cum motus aſcenſionis rectæ D, inæquabilis ſit, dies & horæ Solares ſunt quoquè inæquales. At punctum M, æquabiliter progreditur in æquatore ab occaſu ad ortum, & ideò motus illius conſtitui poteſt pro menſurâ temporis medii. Itaque longitudo Solis media ♈ S vel æqualis eſt aſcenſioni rectæ ♈ D vel eâ major eſt aut minor. In primo caſu punctum M coincidit cum puncto D, in ſecundo caſu eſt ultrà D, versùs orientem & in tertio caſu eſt citrà D, versùs occidentem. Temporis abſoluti momentum quo punctum M, coincidit cum puncto D, ſumatur tanquam principium à quo tempus apparens & tempus medium incipiunt computari & quo ſimul coincidunt; & in aliis caſibus tempus apparens à medio differet pro quantitate arcûs M D in tempus ſolare converſi (16); Nam dum punctum D, eſt ſub meridiano T Z, horâ 12ª computatur in loco cujus meridianus eſt T Z, & ubi punctum M diſtat à puncto D, arcus M D, in tempus ſolare converſus, dabit differentiam inter meridiem apparentem & meridiem medium qui contingit quandò punctum M eſt in meridiano T Z.



46. Itaquè tempus medium in apparens ſic convertitur. Quæritur longitudo Solis tum media, tum vera tempori dato reſpondens (44) indè eruitur longitudinis veræ aſcenſio recta (14), ſi hæc major eſt mediâ Solis longitudine, differentia in tempus ſolare converſa ſubtrahitur ex tempore medio ut fiat apparens, additur ſi minor eſt. At tempus apparens in medium ità mutatur. Tempus apparens tanquam medium conſideratur, & inquiritur pro dato tempore longitudo Solis tùm media, tum vera, & indè eruitur longitudinis veræ aſcenſio recta; ſi hæc mediam Solis longitudinem ſuperat, differentia in tempus ſolare converſa additur tempori apparenti ut fiat medium. Si verò longitudinis veræ aſcenſio recta minor eſt mediâ Solis longitudine, differentia in tempus ſolare converſa à tempore apparente ſubducitur. Quod ſi media Solis longitudo æqualis ſit aſcenſioni rectæ longitudinis veræ, tempus apparens congruit cum medio nullâque eget æquatione. Hæc omnia ex modò dictis (46) manifeſta ſunt; ſi enim punctum D eſt orientalius puncto M, hoc citiùs ad meridianum T Z, pervenit quam illud, ac proindè hora 12ª temporis medii computatur, cum nondùm eſt meridies temporis apparentis, & contrarium contingit, ſi punctum D puncto M fuerit occidentalius. Ubi tempus apparens in medium oportet converti, tempore apparente utimur tanquam medio ad locum Solis inveniendum; cum enim tempus apparens non multum differat à tempore medio, differentia inter aſcenſionem rectam & longitudinem mediam Solis eſt quam proximè eadem, ſivè per tempus medium, ſivè per tempus apparens inquiratur.

47. Jam verò ſi tempore quovis apparente obſervetur Solis aſcenſio & longitudo vera, indèque eruatur ipſius longitudo media (44) ac tempus apparens convertatur in tempus medium (47) habebimus locum Solis medium pro dato temporis medii momento, & hic locus erit radix motuum Solis, momentum verò temporis medii datum epocha temporum computandorum; quibus ſemel conſtitutis ad quodlibet aliud datum tempus medium vel apparens inveniri poterit locus Solis verus vel medius in Eclipticâ & contrà. Expoſuimus jam (44) quomodò locus Solis dato tempore medio inquiratur. Si datum ſit tempus apparens, hoc tanquam tempus medium uſurpetur & quæratur locus Solis verus huic correſpondens (44); Deindè longitudini Solis ſic inventæ tantum longitudinis addatur vel dematur quantum temporis æquationi debetur & ità prodibit locus Solis tempori apparenti reſpondens. Facile eſt ex dictis problema inverſum ſolvere, ſeu ex dato loco Solis medio aut vero tempus medium aut apparens huic Solis loco reſpondens invenire.

48. Nec opus eſt ut moneamus eaſdem eſſe motuum cæleſtium apparentias, ſive cœlum omne cum ſtellis circà tellurem motu diurno revolvatur ab oriente in occidentem, ſive terra circà proprium axem eodem tempore ab occidente in orientem converti ſupponatur immoto cœlo; ſive etiam terra immota maneat & Sol proprio motu ab occaſu ad ortum feratur, ſeu circa Solem immotum terra motu annuo circumvolvatur in Eclipticâ. Nam in utrâque ſuppoſitione diametri apparentes & velocitates relativæ ſunt eædem.



DE MUNDI SYSTEMATE.

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus Principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantùm, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maximè ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi ſcholiis quibuſdam philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maximè fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque lucis & ſonorum. Supereſt ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem ſyſtematis mundani. De hoc argumento compoſueram librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus à multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius transtuli in propoſitiones, more mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui principia prius evolverint. Verumtamen quoniam propoſitiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere poſſint, auctor eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis definitiones, leges motuum & ſectiones tres priores libri primi ſedulò legat, dein tranſeat ad hunc librum de mundi ſyſtemate, & reliquas librorum priorum propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

De Mundi Systemate

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I. (a).

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum phænomenis explicandis sufficiant.

Dicunt utique philosophi: Natura nihil agit frustra, & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideóque effectuum naturalium ejusdem generis eædem assignandæ sunt causæ, quâtenus fieri potest.

Uti respirationis in homine & in bestiâ; descensus lapidum in *Europâ* & in *Americâ*; lucis in igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in terrâ & in planetis.

RE-

(a) 49. * *Regula prima.* Hæc regula duas habet partes; prima est, ne Philosophia in vana abeat opinionum commenta, causæ rerum naturalium non aliæ admitti debent quam quæ reverâ existunt & quæ phenomenis explicandis sufficiunt; unde si velimus cum evidentiâ ac certitudine philosophari, omnes hypotheses negligendæ nobis sunt; hypothesis enim si legitima est, causæ quidem possibilitatem, minimè verò existentiam adstruit, cum effectus idem pluribus modis produci possit. Verumtamen ubi certitudinis obtinendæ ab Experimentis & indè Mathematicâ via procedendo spes non affulget hypothesibus quibusdam particularibus uti licet ad veritatem novis experimentis indagandam, quemadmodum Astronomi varias adhibuerunt hypotheses ut phænomena cælestia prædicere & accuratius observare, atquè ità veras eorum causas conjectando investigare possent. Altera pars regulæ ea scilicet quæ præscribit non plures admittendas esse rerum naturalium causas quam quæ eorum phænomenis explicandis sufficiunt, manifesta est; nam cum vera effectûs causa per experientiam semel inventa est, & matheseos ope præsertim demonstratum est causæ illius eam esse vim quæ ad effectum producendum sufficiat, liquet aliam quamlibet causam esse inutilem.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideoque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem somnia temerè confingenda non sunt, nec à naturæ analogiâ recedendum est, cum ea simplex esse soleat & sibi semper consona. Extensio corporum non nisi per sensus innotescit, nec in omnibus sentitur: sed quia sensibilibus omnibus competit, de universis affirmatur. Corpora plura dura esse experimur. Oritur autem durities totius à duritie partium, & inde non horum tantùm corporum quæ sentiuntur, sed aliorum etiam omnium particulas indivisas esse duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia esse non ratione sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem esse proprietatem corporum universorum. Corpora omnia mobilia esse, & viribus quibusdam (quas vires inertiæ vocamus) perseverare in motu vel quiete, ex hisce corporum visorum proprietatibus colligimus. Extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extensione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras esse & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc est fundamentum philosophiæ totius. Porro corporum partes divisas & sibi mutuò contiguas ab invicem separari posse, ex phænomenis novimus, & partes indivisas in partes minores ratione distingui posse (b) ex mathematicâ certum est. Utrum verò partes illæ distinctæ

(b) 50. * *Ex mathematicâ certum est.* Demonstrationes passim repeiiuntur apud eos autores qui de materiæ divisibilitate tractant, ut ex incommensurabilitate lateris quadrati & ejus Diagonalis &c.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tinctæ & nondum divisæ per vires naturæ dividi & ab invicem separari possint, incertum est. At si vel unico constaret experimento quod particula aliqua indivisa, frangendo corpus durum & solidum, divisionem pateretur: (c) concluderemus vi hujus regulæ, quod non solum partes divisæ separabiles essent, sed etiam quod indivisæ in infinitum dividi possent.

Denique si corpora omnia in circuitu terræ gravia esse in terram, idque pro quantitate materiæ in singulis, & lunam gravem esse in terram pro quantitate materiæ suæ, & vicissim mare nostrum grave esse in lunam, & planetas omnes graves esse in se mutuo, & cometarum similem esse gravitatem in Solem, per experimenta & observationes astronomicas universaliter constet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in se mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate universali, quam de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœlestibus nullum experimentum, nullam prorsus observationem habemus. Attamen gravitatem corporibus essentialem esse minimè affirmo. Per vim insitam intelligo solam vim inertiæ. Hæc immutabilis est. (d) Gravitas recedendo à terrâ, diminuitur.

R E-

(c) * *Concluderemus vi hujus regulæ*, seu ex analogiâ naturæ quæ simplex esse solet & sibi semper consona. * Hinc patet differentia Newtonianismi & hypotheseos Atomorum; Atomistæ necessariò & Metaphysicè atomos esse indivisibiles volunt, ut sint corporum Unitates; Metaphysicam hanc quæstionem missam facit Newtonus, & huc redit ejus sententia, si illæ partes quas Deus condidit indivisas, quæque ideo sunt corporum Physica Elementa seu Physicæ Monades, frangendo dividerentur, tunc exinde edocti, statueremus eas posse dividi, ideoque ulterius ulteriusque sine fine divisibiles esse diceremus, omnem hâc de re Theoriam Metaphysicam experimentis facile postponentes. Hæc etiam fluunt ex Lockii, de ratione quâ agnoscimus qualitates essentiales, Doctrinâ; Ignoramus planè, inquit ille, quænam qualitates cum subjecti natura sint conjunctæ si rem Metaphysicè spectemus; sed fit ut experientiâ Magistrâ, has aliasve qualitates ad universa subjecta quæ ad eamdem Classem referimus pertinere deprehendamus, aut saltem ad omnia in quæ experimenta instituere licuit & eas essentiales dicere lubuit. Hinc infert Newtonus, eadem istâ regulâ quâ utimur vulgo ad agnoscendas eas qualitates, eâdem etiam regulâ in rebus Philosophicis uti debemus ubi experientiâ quidem, sed minus obviâ ac vulgari, similem Inductionem instituere dabitur. Adjungit quidem præter eam Inductionem, caracterem hunc Metaphysicum, ut illæ qualitates intendi ac remitti nequeant, etenim qualitates quæ remitterentur, gradatim eâdem ratione quâ remittuntur, aboleri possent, sicque Universorum corporum qualitates non amplius forent.

(d) * *Gravitas recedendo à terrâ diminuitur*, ut infrà demonstrabitur.

REGULA IV.

In Philoſophiâ experimentali, propoſitiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut accuratè aut quamproximè haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

([c]) Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheſes.

(c) * *Hoc fieri debet.* Hanc regulam in quæſtionibus opticis hoc ferè modo exponit Newtonus. In Phyſicis non ſecus ac in Mathematicis Scientiis, ad res difficiles inquirendas methodus analytica priùs eſt uſurpanda quam ſynthetica methodus in auxilium vocetur. Hæc prima methodus in eo poſita eſt ut adhibeantur experimenta atquè obſervationes ex quibus deindè per inductionem concluſiones generales deducantur, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, niſi eas aliquo experimento aut certâ aliquâ veritate nixas eſſe contigerit. Nam quod hypotheſes ſpectat, eæ in Philoſophiâ experimentali locum habere non debent. Quamvis ratiocinia ab experimentis & obſervationibus per inductionem deducta ad ſtabiliendas modo demonſtrativo concluſiones generales ſatis non ſint, hic tamen ratiocinandi modus eſt omnium quos rerum naturâ admittere poſſit optimus, iſque eò tutior reputari debet quo generalior eſt inductio; Si autem nulla repugnaverint phænomena, generalem concluſionem deducere licebit. Sin verò deinceps contraria occurrant phænomena, exceptionibus neceſſariis limitanda erit atquè reſtringenda concluſio. Hujus analyſeos auxilio à compoſitis ad ſimplicia, à motibus ad vires producentes, & generatim ab effectibus ad eorum cauſas perveniri poteſt. Quod ad ſyntheſim pertinet, hæc cauſas cognitas atquè probatas tanquam principia aſſumit quorum ope phænomena indè nota explicantur. 5 *.

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

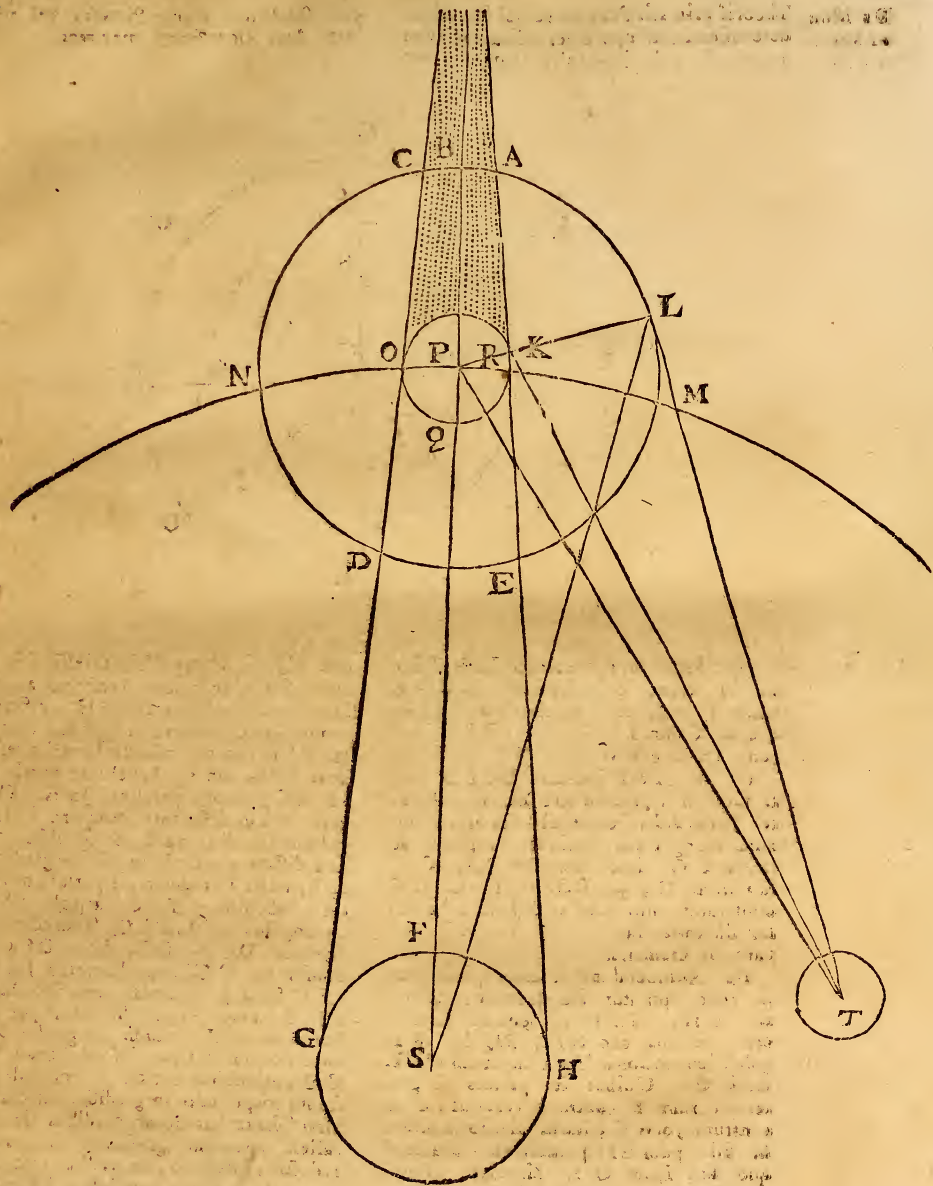
(f) *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum ab ipsius centro.*

(f) 51. * *Planetæ circumjoviales.* Lemma ..... Satellitum Jovis & Saturni orbes ac motus determinare.

Sit HFGH Sol, cujus centrum S, T Terra; KOQ Jupiter vel Saturnus circà Solem S describens orbitam MPN, ACDEL orbita satellitis; radii Solis extremi GO, HR paulo plusquam dimidium planetæ P illustrant, & producti umbram conicam R ACO terminant, cujus axis est recta SPB per Solis & Planenetæ centra transiens. Dum satelles in orbitâ suâ LCDE girans, conum umbrosum attingit in A, in umbram immergitur & cessat videri; deindè ex umbrâ emergens in C rursus apparet. Attamen satellitum Saturni, ob nimiam illorum à Sole & Tellure distantiam, eclipses observari huc usquè non potuerunt, sed omnium satellitum Jovis eclipses è terrâ conspici possunt, cum hoc tamen discrimine quod immersiones & emersiones quarti & tertii & nonnunquam secundi in eâdem eclipsi cernantur, primi verò immersio tantum vel emersio observari possit. Sit jam satelles in L, & ductis è terrâ T rectis TP, TL, angulus PTL, dicitur elongatio seu digressio geocentrica satellitis L à Planetâ primario P. Ducatur etiam recta TK discum primarii Planetæ tangens in K, & angulus PTK erit semidiameter primarii è tellure visâ seu apparens, ideóque elongatio geocentrica erit ad semidiametrum apparentem ut angulus PTL ad angulum PTK. Observatis pluribus hujusmodi elongationibus geocentricis & semidiametris apparentibus, iisque inter se collatis, inveniuntur elongationes maximæ ubi ratio anguli PTL ad angulum PTK maxima est, & hoc modo observatum est elongationes maximas geocentricas ejusdem satellitis in variis orbitæ suæ locis æquales esse inter se quam proximè, ideóque satellites describunt circulos Planetæ primario concentricos. Quia ergò, ubi elongatio maxima est, PK est quamproximè ad PL, ut angulus PTK ad angulum PTL, ob datam rationem horum angulorum & datam quoquè semidiametrum PK, datur & PL, seu distantia satellitis à centro primarii. Angulus PSL sub quo è centro Solis S videretur distantia satellitis à centro primarii P, dicitur ejus elongatio heliocentrica quæ maxima est, cum angulus SPL rectus est. Quia verò PL data est, elongationes maximæ heliocentrica & geocentrica æquales sunt, ubi planeta P à Sole & terrâ æquè distat.

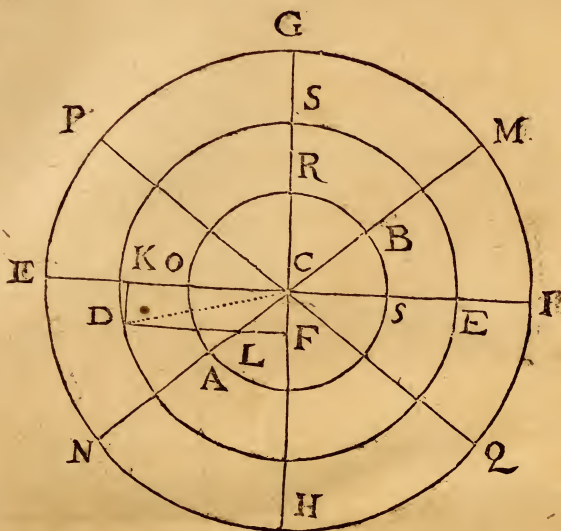
Cognitis orbitarum diametris, tempora periodica satellitum inveniri possunt per eorum eclipses maximæ durationis, atquè etiam per transitum satellitis aut umbræ illius per medium discum Planetæ primarii. Nam cum radius circuli sit æqualis arcui grad. 57.29578, (lib. 1. not. 372.) & data sit ratio radii PL ad diametrum Planetæ primarii OR, erit quamproximè ut PL ad OR, ità gradus 57.29578 ad numerum graduum arcûs exigui CA, qui ferè æqualis est diametro OR, ob parallelas OC, RA. Fiat deindè ut numerus graduum aut partium gradûs CA vel OR ad gradus 360, ità tempus quo describitur CA vel OR ad tempus periodicum satellitis, quod ità dabitur. Suppositâ

Theo-


C
B
A
L
O
P
R
K
N
M
Q
D
E
F
G
S
H
T

De Mundi Systemate.

Theoriâ primarii Planetæ per obſervationes determinatâ, tempora periodica inveniuntur menſurando intervalla temporis inter duas ſatellitum conjunctiones, vel etiam inter duas digreſſiones maximas.



52. 52. Satellitum à centro Jovis diſtantias obſervandi & in diametri partibus æſtimandi triplicem methodum deſcribit Clariſſ. Caſſinus in Elementis Aſtronomiæ anno 1740. editis.

1°. Sit A R B Jupiter, D S E D orbita ſatellitis, micrometro capiatur diameter Jovis A B, deindè ubi ſatelles in maximâ elongatione verſatur, capiatur diſtantia D C, inter centrum Jovis C, & ſatellitem D, quo facto, diſtantia D C, conferatur cum diametro Jovis, habebitur diſtantia ſatellitis à centro Jovis in partibus diametri.

2°. Adhibendum eſt teleſcopium in cujus foco aptantur fila quatuor, quorum duo G H, E I ſeſe perpendiculariter ſecent, reliqua duo N M, P Q his ad angulos ſemirectos inſiſtant in communi ſectione C. Quibus ità paratis dirigatur teleſcopium & continuò vertatur, d nec centrum Jovis C, motu diurno unum ex his filis, putà E I, percurrere videatur, in quo ſitu filum G H circulum aliquem horarium repræſentabit. Obſervetur deindè differentia temporis inter appulſum centri Jovis & appulſum ſatellitis in maximâ ſuâ elongatione verſantis ad eundem circulum horarium G H, differentia temporis convertatur in gradus & minuta, ità ut quatuor minutis horariis reſpondeat gradus unus, habebitur portio D F vel K C, circuli paralleli Jovis. Obſervetur etiam differentia temporis inter appulſum ſatellitis ad L, & appulſum ad F, quæ differentia ſimili modo in gradus circuli paralleli graduumque partes convertatur, habebitur L F, cui æqualis eſt F C, ob angulos L C F, F L C, ſemirectos. Datis verò D F & F C, datur D C. Jam conferatur D C, cum diametro Jovis A B vel O S, cujus diametri menſura habebitur, ſi tempus quo diameter per filum horarium G H, tranſit in gradus & minuta convertatur, utriuſque diametri DC, O C obtinebitur ratio, & eorumdem abſoluta magnitudo in gradibus circuli maximi ſphæræ habebitur, gradibus circuli paralleli Jovis ad gradus circuli maximi reductis, dicendo, ut radius circuli maximi ad radium paralleli, ità numerus graduum & minutorum in arcu circuli paral-

Conſtat ex obſervationibus aſtronomicis. (g) Orbes horum planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica eſſe in ſeſquiplicatâ ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt aſtronomi; & idem ex tabulâ ſequente manifeſtum eſt.

(h) *Satellitum jovialium tempora periodica.*

$1^d.18^h.27'.34''$ $3^d.13^h.13'.42''$. $7^d.3^h.42'.36''$. $16^d.16^h.32'.9''$.

(i) *Diſtantiæ ſatellitum à centro jovis.*

Ex obſervationibus.	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Caſſini *per teleſcop.*	5	8	13	23	
Caſſini *per eclipſ. ſatell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
(l) *Ex temporibus periodicis.*	5,667	9,017	14,384	25,299	

Elon-

paralleli ad numerum graduum & minutorum in arcu circuli maximi. Nam in circulis inæqualibus, gradus qui æqualibus arcubus continentur eſſe reciprocè ut circulorum radios ex elementis patet.

3°. In Eclipſibus Satellitum centralibus, dum nempè duratio eſt omnium maxima, obſervetur tempus quod ab ingreſſu centri ſatellitis in diſcum Jovis uſquè ad illius egreſſum interfluxit. Deindè fiat, ut tempus periodicum ſatellitis ad tempus moræ in diſco Jovis, ità 360° ad quartum proportionalem, hoc eſt, ad gradus quos continet arcus æqualis diſco Jovis ſatellitis orbitæ applicato. Iterum (ex trigon.) inferatur, ut ſinus ſemiſſis ejuſdem arcûs ad ſinum totum, ità ſemidiameter Jovis ad ſemidiametrum orbitæ ſatellitis, ideóque comparari poterit ſemidiameter Jovis cum ſemidiametro orbitæ ſatellitis, hoc eſt, cum diſtantiâ ſatellitis à centro ac proindè habebitur diſtantia ſatellitis à centro Jovis in partibus ſemidiametri Jovis.

Quod Saturnum ſpectat, ſolis oculis Teleſcopio adjutis diſtantias ſatellitum à centro Saturni cum diametro annuli comparare ſolent Aſtronomi. 52.

(g) * *Orbes horum planetarum* (51).

(h) * *Satellitum Jovialium tempora periodica* (ibid.).

* In noviſſimo Caſſini Opere ſuprà laudato tempora Periodica paulo majora conſtituuntur, ſcilicet, primus Satelles, 62″, 2us. Sat., 4′ 12″; 3us. Sat., 17′; 4us. Sat., 1h., 32′, 58″, tardius revolutiones ſuas abſolvere ſtatuuntur; illæ autem differentiæ totius temporis Periodici reſpectu minimæ ſunt, maximæ enim differentiæ non excedunt trecenteſimam partem durationis totius revolutionis.

(i) * *Diſtantiæ ſatellitum à centro Jovis* (52).

(l) * *Ex temporibus periodicis.* Newtonus computum iniit hoc modo. Aſſumpſit diſtantiam obſervatam primi Satellitis $5\frac{2}{3}$, ſeu 5′667, & deindè per tempora periodi-

DE MUNDI SYSTEMATE.

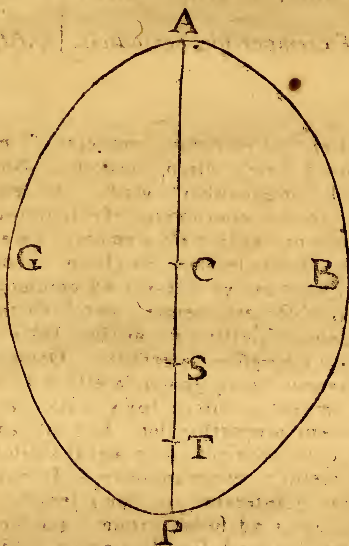
Elongationes satellitum jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit ut sequitur. (m) Elongatio maxima heliocentrica satellitis quarti à centro jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, & prodiit in mediocri jovis à terrâ distantiâ 8′. 16″ circiter. Ea satellitis tertii micrometro in telescopio pedes 123 longo capta fuit, & prodiit in eadem jovis à terrâ distantiâ 4′. 42″. Elongationes maximæ reliquorum satellitum in eâdem jovis à terrâ distantiâ ex temporibus periodicis prodeunt 2′. 56″. 47‴, & 1′. 51″. 6‴.

Diameter jovis micrometro in telescopio pedes 123 longo sæpius capta fuit, & (n) ad mediocrem jovis à sole vel terrâ

---

52. riodica etiam observata quæsivit aliorum Satellitum distantias, supponendo quadrata temporum periodicorum cubis distantiarum proportionalia. Nam si Logarithmi temporum periodicorum primi & secundi Satellitis dicantur l, L, & Logarithmi distantiarum d, D, erit $2\,l$ ad $2\,L$, arithmeticè ut $3\,d$ ad $3\,D$, ideóque $2\,l + 3\,D = 2\,L + 3\,d$, undè invenitur $D = d + \frac{2\,L}{3} - \frac{2}{3}\,l$. Est autem $d = 0{,}7533532$, $\frac{2}{3}\,L = 2{,}3245915$, & $\frac{2}{3}\,l = 2{,}1228512$, quare habetur $D = 0{,}9550935$, cui respondet numerus 9,07, uti Newtonus invenit; & ità inveniuntur cæterorum Satellitum distantiæ per eorum tempora periodica.

(m) 53. * *Elongatio maxima heliocentrica satellitis in mediocri Jovis à Sole distantiâ* æqualis est ipsius elongationi maximæ geocentricæ in mediocri distantiâ ejusdem Jovis à Terrâ. Sit enim ABPG orbita Jovis, Sol in S, A aphelium Jovis; P perihelium, T Terra, erit AS maxima distantia Jovis à Sole, SP minima; AT verò maxima distantia Jovis à Terrâ, PT minima, & ideò mediocris distantia Jovis à Sole seu $\frac{1}{2}$ AP $= \frac{1}{2}$ AS $+ \frac{1}{2}$ SP, & mediocris distantia Jovis à Terrâ erit $\frac{1}{2}$ AT $+ \frac{1}{2}$ TP $= \frac{1}{2}$ AP. Quare duæ illæ mediocres distantiæ sunt æquales, ideóque elongationes maximæ heliocentricæ & geocentricæ in mediocribus illis distantiis sunt etiam æquales.



(n) 54. * *Et ad mediocrem Jovis à Sole.* Datur positio lineæ ductæ ab oculo spectatoris ad Jovem tempore observationis,

râ distantiam reducta, semper minor prodiit quam 40'', nunquam minor quam 38'', sæpius 39''. In telescopiis brevioribus hæc diameter est 40'' vel 41''. (o) Nam lux jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum jovis in longioribus & perfectioribus telescopiis quam in brevioribus & minus perfectis. Tempora

nis, & per theoriam Solis, datur etiam positio lineæ ductæ ab oculo ad Solem (47) eodem tempore; undè datur angulus his duabus lineis interceptus, seu elongatio Jovis à Sole. Insuper datur, per theoriam Jovis, locus ejus in propriâ orbitâ; & ideò notus est angulus quem comprehendunt duæ lineæ à centro Solis ductæ ad Jovem & ad Terram seu oculum observatoris. In triangulo igitur ex tribus illis lineis facto cujus angulus unus est in oculo spectatoris seu in Terrâ, alter in Sole & tertius in Jove, dantur anguli omnes & exindè datur ratio laterum seu ratio distantiæ Jovis à Sole ad distantiam Jovis à Terrâ tempore observationis. Datur verò, per theoriam Jovis ex observationibus constitutam, ratio distantiæ Jovis à Sole tempore observationis ad ipsius distantiam mediocrem à Sole vel à Terrâ. Quare datur ratio distantiæ Jovis à Terrâ tempore observationis ad distantiam ejus mediocrem à Sole vel à Terrâ. Sed diametri apparentes Jovis è Terrâ visi sunt inter se inversè ut distantiæ Jovis à Terrâ, dabitur itaque ratio diametri apparentis tempore observationis ad diametrum apparentem in mediocri distantiâ Jovis à Terrâ vel Sole.

(o) 55. * *Nam Lux Jovis.* Newtonus prop. 7. lib. 1. optices experimentis & calculo invenit quod, si ex puncto lucido in axem telescopii posito ad ingentem distantiam, radii in vitrum objectivum incidant axi paralleli, distincta & minima hujus puncti imago in vitri foco depicta, est circulus, non verò punctum ut esse deberet, obstante nimirum non tantum vitri sphæricitate, sed præcipuè radiorum inæquali refrangibilitate quâ Lux ea dilatatur. Nam in vitro plano convexo cujus convexitas puncto lucido obvertitur cujusque sphæricitas diametrum habet 100 ped. seu 1200 digit. apertura verò 4 digit. diameter circelli qui ex vitri sphæricitate oritur erit ad diametrum ejusdem circelli maximè distincti qui ex inæquali refrangibilitate provenit ut $\frac{961}{72000000}$ ad $\frac{4}{250}$, seu ut 1 ad 1200; distincta siquidem ejus puncti lucidi imago & maximè splendida continet partem 250^{am}. aperturæ vitri objectivi optimè elaborati, neglectâ luce debili & subobscurâ quæ imaginem illam circumdat. Undè in Telescopio cujus apertura est 4 digit. & longitudo 100 ped. hujus imaginis diameter trans vitrum oculare visa occupat 2'' 45''' vel 3'', & in Telescopio cujus apertura est duorum digitorum & longitudo 20 aut 30 ped. occupabit imago 5'' vel 6''. Itaque in Telescopio optimo Hugeniano 123 ped. error erit circiter 2'' in minoribus major. 55

* In Telescopiis autem rectè constitutis sive secundum Theoriam Prop. 56. Dioptrices Hughenii, id curatur ut aberratio lucis circa imaginem puncti lucidi æquale occupet spatium super retinâ, sed imago ipsius objecti in Telescopiis majoribus majus occupat spatium in retina idque secundum rationem Radicum quadratarum longitudinis Telescopiorum, Ergo lux erratica quæ dilatat objecti imaginem ab utraque ejus extremitate, minorem habet rationem ad illius objecti apparentiam in majoribus Telescopiis quam in minoribus, in ratione nempe inversâ Radicum quadratarum longitudinis Telescopiorum.

Hæc omnia ex Doctrina Newtonianâ circa colores ita jam sunt cognita ut ea fusius & accuratius demonstrare necessarium non judicemus.

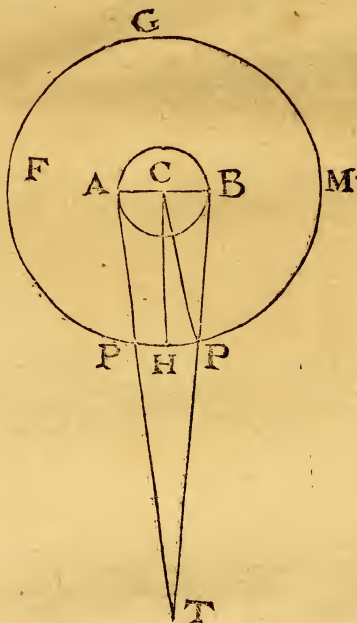
56.

De Mundi Systemate. pora quibus satellites duo, primus ac tertius, transibant per corpus jovis, ab initio ingressus ad initium exitus, & ab ingressu completo ad exitum completum, observata sunt ope telescopii ejusdem longioris. Et (p) diameter jovis in mediocri ejus à terrâ distantiâ prodiit per transitum primi satellitis $37\frac{1}{8}''$, & per transitum tertii $37\frac{3}{8}''$. Tempus etiam quo umbra primi satellitis transiit per corpus jovis observatum fuit, & inde diameter jovis in mediocri ejus à terrâ distantiâ prodiit $37''$ circiter. Assumamus diametrum ejus esse $37\frac{1}{4}''$ quamproximè; & elongationes maximæ satellitis primi, secundi, tertii, & quarti æquales erunt semidiametris jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 respectivè.

PHÆ-

56. 56. Hugenius planetarum lucem obstaculo quodam intercipiens majores invenit planetarum diametros quam ab aliis micrometro definitum est; nam lux erratica, ubi tegitur planeta, vividioribus radiis minus extenuatur, ideóque latius propagari videtur. Contrariam ob causam fit quod planetæ in Sole visi, dilatatâ luce non parum attenuentur. Mercurius in Sole Hevelio, Galletio & Halleio observantibus, non superavit 12″ vel 15″, & Venus Crabtrio solum 1′ 3″, Horroxio 1′ 12″ occupare visa est, quæ tamen juxtà mensuras Hevelii & Hugenii extrà discum Solis captas implere debuisset 84″ ad minimum. Sic & Lunæ diameter apparens quæ anno 1684, paucis diebus antè & post Eclipsim Solis mensurata fuit in observatorio Parisiensi 31′ 30″, in ipsâ Eclipsi non superabat 30′ vel 30′ 5″. Quarè patet diametros planetarum extrà Solem minuendas esse & intrà Solem augendas minutis aliquot secundis.

(p) 57. * *Et diameter Jovis in mediocri &c.* Sit T tellus, A B diameter Jovis, P F G M orbita satellitis, ductis è terrâ radiis T A, T B ferè parallelis, dum satelles describit arcum P p, videbitur è terrâ describere diametrum Jovis A B cui æqualis est arcus P p quamproximè, propter distantiæ T P magnitudinem. Datis autem tempore periodico & tempore quo describitur P p, datur ratio P p ad totum circulum, seu datur arcus P p, in gradibus vel partibus gradûs, & inde datur dimidius arcus P H, hincque habetur angulus P C H seu A P C. Jam verò datur P C ob datas per observationem elongatio-



PHÆNOMENON II.

Planetas circumsaturnios, radiis ad saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum ab ipsius centro.

(†) *Cassinus* utique ex observationibus suis distantias eorum à centro Saturni & periodica tempora hujusmodi esse statuit.

Satellitum saturniorum tempora periodica.

$1^d. 21^h. 18'. 27''$. $2^d. 17^h. 41'. 22''$. $4^d. 12^h. 25'. 12''$. $15^d. 22^h. 41' 14''$. $79^d. 7^h. 48'. 00''$.

Distantiæ satellitum à centro Saturni in semidiametris annuli

Ex observationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis.	1,93	2,47.	3,45.	8.	23,35.

Quarti satellitis elongatio maxima à centro Saturni ex observationibus colligi solet esse semidiametrorum octo quamproximè.

gationes maximas satellitum à centro Jovis in mediocri Jovis à Tellure distantiâ; quarè si fiat AB ad PC ut duplus sinus anguli dati PCH, ad sinum totum, dabitur (ex trig.) diameter apparens Jovis seu angulus ATB, sub quo videtur in mediocri ejus à Tellure distantiâ. Eodem modo patet determinari diametrum Jovis per transitum umbræ hanc diametrum percurrentis.

(†) *Cassinus utique &c.* Hæc ex Philosophicis Transactionibus n. 187. sunt deprompta: Exigua quædam est horum differentia à numeris quos in Elementis Astronomiæ assignat Cassinus filius, ille ita determinat satellitum Sat. Tempora Periodica, & distantias.

Primi	$1^d. 21^h. 18'. 27''$.	1. 933.	&c.
Secundi	$2^d. 17^h. 44'. 22''$.	2. 5.	
Tertii	$4^d. 12^h. 25'. 12''$.	3. 5.	
Quarti	$15^d. 22^h. 34'. 38''$.	8.	
Quinti	$79^d. 7^h. 47'. 0''$.	23. paulo plus.	

Observat autem primi & secundi satellitis distantias à Saturno æstimatione solummodo potuisse determinari; motibus verò eorum satis accuratè nunc cognitis ex unius nempe quarti cognitâ distantiâ 8 semi-Diametrorum annuli per Regulam Kepleri reliquorum distantias posse exquiri, atque ita inveniri.

Distantia primi	1.	93.
Secundi	2.	47.
Tertii	3.	45.
Quarti (ex observat.)	8.	
Quinti	23.	23.

Quæ quidem, inquit, adeò congruunt cum observationibus immediatis ut sine errore sensibili adhiberi possint. *Elem. Ast. Tom. I. pag. 640. & seq.*

De Mundi Systemate. mè. At elongatio maxima ſatellitis hujus à centro ſaturni, micrometro optimo in teleſcopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit ſemidiametrorum octo cum ſeptem decimis partibus ſemidiametri. Et ex hâc obſervatione & temporibus periodicis, diſtantiæ ſatellitum à centro ſaturni in ſemidiametris annuli ſunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem teleſcopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, & diameter annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719. prodiit 43″. Et (q) inde diameter annuli in mediocri ſaturni à terrâ diſtantiâ eſt 42″, & diameter ſaturni 18″. (r) Hæc ita ſunt in teleſcopiis longiſſimis & optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœleſtium in longioribus teleſcopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quam in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter ſaturni haud major quam 16″.

PHÆ-

57. (q) * *Et indè diameter annuli.* Quia diametri apparentes ſunt in diſtantiarum ratione reciprocâ, datis diametro annuli diebus Maii 28 & 29 anno 1719, & diſtantiâ Saturni à terrâ iiſdem diebus datâ (per theoriam planetæ) dabitur quoque diameter annuli in datâ mediocri diſtantiâ Saturni à terrâ, hæc autem diameter prodiit 42″; ſed Saturni diameter erat ad diametrum annuli ut 3. ad 7 (per obſ.) quarè diameter Saturni in mediocri à terrâ diſtantiâ eſt 18″.

(r) * *Hæc itâ ſunt* (55). * Si in hoc Teleſcopio Lux erratica ſubtendat angulum duorum ſecundorum, fiet diameter annuli 40″ & Saturni 16″ ut revera ſint in ratione 5 ad 2. hinc autem ut id obiter notemus cum Parallaxis Solis in diſtantiâ terræ mediocri à Sole ſit 10″ ſive diameter Telluris à Sole tunc viſa ſit 20″, diſtantia verò mediocris terræ à Sole ſit ad mediocrem diſtantium Saturni à Terrâ vel à Sole, quod idem eſt (n. 53.) ut 100 ad 954, hinc Diameter terræ erit ad Diametrum annuli ut 100 ad 1908, ſive ut 1 ad 19 & ad Diametrum ipſius Saturni ut 1 ad $7\frac{3}{5}$.

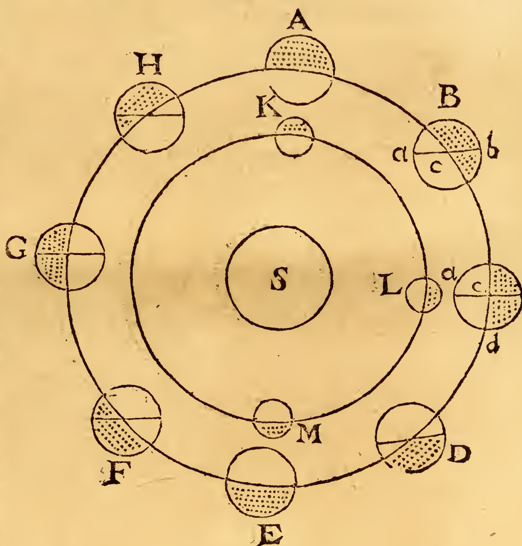
Pariter, cum Diameter Jovis in mediocri ejus à Sole diſtantiâ ſit $37\frac{1}{4}$″ ſitque mediocris diſtantia terræ ad mediocrem diſtantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52; erit Diameter terræ, ad Diametrum Jovis ut 1 ad $\frac{52 \times 37\frac{1}{4}}{200}$. Sive ut 1 ad 9. 685; ſicque Diameter Jovis eſt circiter dimidia Diametri annuli Saturni & eſt ad ipſius Saturni Diametrum ut 5 ad 4. Solis autem Diameter vera eſt circiter Decupla Diametri Jovis.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios mercurium, venerem, martem, jovem & saturnum orbibus suis solem cingere.

Mercurium & venerem circa solem revolvi ex (f) eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra solem siti sunt; dimidiatâ è regione solis; falcatâ cis solem, per discum

57.

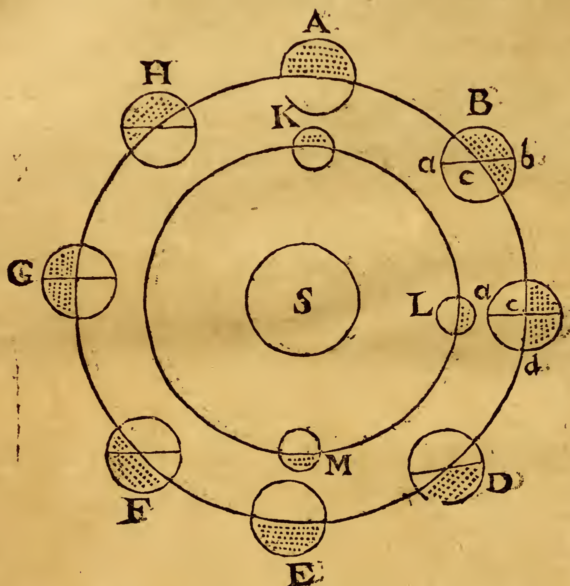


(f) * *Ex eorum phasibus Lunaribus.* Si Veneris faciem telescopio contemplemur, in unâ ejus conjunctione cum Sole plenâ facie fulgere cernitur, deinde phases habere phasibus Lunaribus simillimas partemque illuminatam Soli constanter obvertere videtur. Dum verò ad alteram conjunctionem cum Sole pervenit, tenebris obvolvitur & nonnunquam per discum Solis ad modum maculæ nigræ & rotundæ transit, nunquam verò Soli opponitur neque ab eo digreditur ultrà gradus 47. Eadem ferè de Mercurio observantur quantùm licet per ejus exiguitatem cum hoc tamen discrimine quod ejus elongationes maximæ à Sole 28 gradus nunquam superent. Sunt igitur Venus & Mercurius corpora opaca & rotunda quorum pars circiter dimidia Soli obversa illustratur & pars altera à Sole aversa lumine privatur. Undè cum Venus & Mercurius in unâ conjunctione in E vel M hemisphærium obscurum telluri T obvertant, hemisphærium verò illustratum Soli S, necesse est ut in illâ conjunctione inter solem & tellurem constituantur; è contrà ubi in alterâ proximè sequenti conjunctione in A vel K versantur, totam faciem illustratam & Soli obversam è tellure T, observamus, hinc necesse est ut tunc temporis Sol S, inter ipsos atque tellurem T positus sit. Ubi verò Venus aut Mercurius à Sole digreditur, primum gibbosa apparet, tum dimidiatâ facie lucet, posteà falcata fit & denique tota obscuratur ut in locis B, C, D, E, & contrariâ ratione splendescere in locis, F, G, H, videtur. Si verò ex tellure T, ad Veneris centrum ducatur linea recta ad quam ducatur planum perpendiculare a b, per centrum Veneris transiens, ea pars tantum apparet quæ est inter planum a c, & planum c d, undè cum projectio plani C c d, sit ellipsis, hinc gibbosa apparet planetæ pars visa in B, in C dimidiata & in D, falcata &c., quia à puncto A, con-

De Mundi Systemate.

discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex martis quoque plenâ facie prope solis conjunctionem, & gibbosâ in quadraturis, certum est, quod is solem ambit. De jove etiam & saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur: hos enim luce à sole mutuatâ splendere ex umbris satellitum in ipsos projectis manifestum est.

P H Æ-



T

17. Conjunctionis superioris cum Sole, elongatio seu angulus A T B, crescit usquè ad situm C è regione Solis, ubi digressio maxima est & deindè decrescit in D, atque evanescit in E, ac posteà rursùs crescit usquè ad G, ac deindè decrescit & denique rursùs evanescit in A. Evidens ergò est quod Venus & Mercurius circà Solem revolvantur in orbitis quæ tellurem excludunt. Jam cum maximæ elongationes Veneris à Sole majores sint elongationibus maximis Mercurii, necesse est ut orbita Veneris orbitam Mercurii complectatur.

Mars, Jupiter & Saturnus Soli S oppositi, è tellure M in E plenâ facie lucentes conspiciuntur, ideóque tellus tunc temporis inter solem & planetas illos colloca-

loca-

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel ſolis circa terram vel terræ circa ſolem tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ mediocrium diſtantiarum à ſole.

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. (t) Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemque orbium dimenſiones, ſive ſol circa terram, ſive terra circa ſolem revolvatur. Ac de menſurâ quidem temporum periodicorum convenit inter aſtro-

locatur. At verò in conjunctione ut in A, iidem planetæ pleno orbe fulgent, proindéque partem illuſtratam ſoli ac terræ obvertentes, ſunt ultrà ſolem poſiti; deindè verò digrediuntur à Sole & Mars quidem in quadrato cum Sole aſpectu ut in C, aliquantulum gibboſus apparet, quod hemiſpherium ipſius illuſtratum & ſoli obverſum non poſſit totum terræ ſenſibiliter obverti, quià non ſatis magna eſt ejus à tellure diſtantia. At Jupiter & Saturnus cum longiùs à Sole & tellure diſtent, hemiſphærium illuminatum Soli ac telluri ſemper obvertunt ſenſibiliter; nam cum (ex obſ.) Mars Jovem & Jupiter Saturnum nonnunquam tegant, neceſſe eſt ut orbita Saturni orbitam Jovis & hæc orbitam Martis complectatur, tres verò orbitæ illæ terram & ſolem ambiant. Quia verò diametri apparentes planetarum ſuperiorum multò minores videntur in oppoſitionibus quam in conjunctionibus planetarum, & diſtantiæ à terrâ ſunt ut diametri apparentes inversè, neceſſe eſt ut orbitæ Martis, Jovis & Saturni ſint telluri admodum excentricæ.

(t) 58. * *Eadem utiquè ſunt tempora periodica.* Tempora periodica planetarum circà ſolem hoc modo poſſunt inveniri. Obſerventur planetarum oppoſitiones & conjunctiones cum Sole, tunc enim planeta è Sole videtur in loco qui oppoſitus eſt loco Solis è terrâ viſi, undè dato Solis loco datur planetæ locus in cœlo. Jam verò obſervatis pluribus oppoſitionibus cum temporum intervallis inter ſingulas oppoſitiones interceptis, 58. datur tempus quo planeta circà ſolem motu vero deſcribit angulos ad ſolem inter oppoſitiones contentos & per regulam proportionis habetur tempus quo planeta 360 gradus ſeu revolutionem unam abſolvit. Tempore periodico ità craſsè determinato, habetur numerus revolutionum planetæ tempore ſatis longo peractarum. Si autem capiantur duæ oppoſitiones valdè diſſitæ iiſque addatur arcus neceſſarius ut planeta ad idem orbitæ ſuæ punctum redeat, totumque tempus dividatur per numerum revolutionum, habebitur tempus periodicum accuratiùs, ſupponendo quod aphelia planetæ non aliter moveantur quam fixæ. Sufficit verò in his Newtoni Phænomenis ut hæc tempora, neglectis minutiis, definiantur.

Poteſt etiam tempus periodicum determinari per obſervationes latitudinum planetæ. Nam dum latitudo nulla eſt, planeta verſatur in plano Eclipticæ, ſeu in nodo orbitæ ſuæ; invenitur autem tempus, ubi latitudo nulla eſt, obſervando illam antequam nulla ſit & ubi decreſcit, aut poſtquam nulla fuit & ubi creſcit, atquè per regulam proportionis ex incrementis vel decrementis, determinatur tempus, quandò nulla fuit. Si itaque obſervetur hoc modo tempus elapſum inter appulſum planetæ ad nodum & reditum ejuſdem ad eundem nodum, hoc erit tempus periodicum planetæ; conſtat enim planetarum nodos vix in unâ revolutione planetæ moveri.

59. Longitudo ac latitudo planetæ obſervari

De Mundi Systemate.

astronomos universos. Magnitudines autem orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentissimè ex observationibus determinaverunt: & distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibiliter à distantiis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediæ; uti in tabulâ sequente videre licet.

Planetarum ac telluris tempora periodica circa solem respectu fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

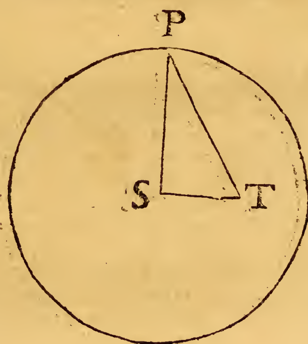
Planetarum ac telluris distantiæ (u) *mediocres à sole.*

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

De

59. servari possunt (per not. 17. 18. 20.) & indè determinatur tempus Syzigiarum, cum videlicet longitudo planetæ non differt à longitudine solis quo tempore fit conjunctio, vel differt semicirculo ut in oppositione. Quod Mercurium spectat, determinatur ipsius conjunctio inferior cum sole per ipsius transitum in disco solis qui vicibus octo observatus fuit, dum transitus Veneris semel tantum visus est, in his verò non supponitur telluris motus nec quies. Determinato tempore periodico planetæ, habetur motus ejus medius in orbitâ & ex observatis pluribus locis planetæ è Sole visis per oppositiones vel conjunctiones aut per digressiones, dantur etiam ipsius motus veri, ac proindè dantur differentiæ inter motus veros & motus medios. Indè verò determinantur aphelia & perihelia planetarum cum ipsorum excentricitate, atquè construi possunt tabulæ per quas tempore quolibet inveniri potest eorum locus in propriâ orbitâ. Quæ omnia quomodò ex observationibus determinari possint independenter ab hypothesibus tom. 1. Element. Astronom. exposuit celeberrimus Cassinus.

(u) 60. * *Distantiæ mediocres à Sole.*



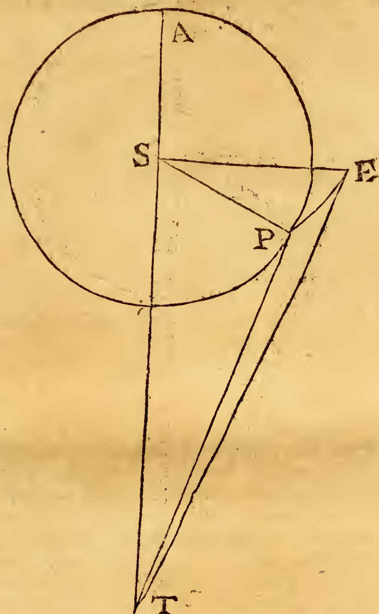
Planetarum distantiæ à Sole per observationes possunt definiri. Hic autem non quæruntur absolutæ distantiæ planetarum à Sole, sed solummodò rationes illarum distantiarum ad distantias solis à tellure. Itaque sit Sol in S, terra quiescens vel mota in T, planeta in P; observetur locus planetæ in cœlo, & per theoriam solis, dabitur locus solis tempore observationis seu positio lineæ TS, undè datur angulus STP. Quæratur etiam locus planetæ

(x) De distantiis mercurii & veneris à sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum elongationes à sole determinentur. De distantiis etiam superiorum planetarum à sole tollitur

61.

tæ P, in propriâ orbitâ per theoriam planetæ, & quia datur locus terræ T e Sole visus atque locus planetæ P, dabitur angulus PST. In triangulo igitur PST, dantur tres anguli ac proinde datur etiam ratio laterum PS & ST, sed, per theoriam solis, datur ratio ST ad mediocrem distantiam Solis à terrâ, & per theoriam planetæ P, datur ratio distantiæ SP, ad mediocrem distantiam planetæ à Sole, ergò dabitur ratio distantiæ mediocris planetæ à Sole ad distantiam mediocrem solis à terrâ. Negligimus autem minutias quæ ex inclinatione orbium planetarum ad eclipticam oriri possunt; & prætereà observationes possunt fieri dum planeta est prope nodos, ubi ferè in plano Eclipticæ versatur.

(x) 61. * *De distantiis Mercurii & Veneris.* Sit ABP orbita Veneris, S Sol, Terra T, Venus P in maximâ suâ elongatione. Quia orbita Veneris est ferè circularis, linea TP tanget orbitam in P, ideóque angulus SPT, rectus. Undè est ut sinus totus ad sinum elongationis maximæ seu anguli observati STP, ità distantia Solis à Terrâ ST ad distantiam SP, Veneris à Sole. Supponitur autem orbita circularis, quia Venus nunquam digreditur à Sole ultrà 47° 30′ & ejus elongationes maximæ nunquam minores sunt gradibus 45° 30′. Quarè angulus SPT est ferè rectus. Si verò considerare velimus inclinationem orbitæ Veneris, sit latitudo Veneris ex tellure observatâ PTE, è Sole visa PSE, E punctum in Eclipticâ, erit ut PS ad PT, ità tangens latitudinis PTE, ad tangentem latitudinis PSE. Nam ob angulos EPT & EPS rectos, est PT ad PE ut sinus totus ad tangentem anguli PTE; & similiter PS ad PE ut sinus totus ad tangentem anguli PSE, ideóque ut PS ad PT, ità tangens anguli PTE ad tangentem anguli PSE, quaré dabitur angulus iste cum recto EPS, & ideò erit SP ad SE ut sinus anguli SEP, complementi PSE ad rectum ad sinum anguli PSE, dabitur ergò SE, seu ratio ejus ad ST, sicque observatis variis distantiis SP, dabitur mediocris; quia verò datur ratio ST ad mediocrem distantiam Solis à terrâ tempore observationis, dabitur ratio distantiæ mediocris Veneris ad distantiam mediocrem Solis à terrâ. Mercurii distantiæ à terrâ determinantur etiam per elongationes ejus maximas à Sole, sed quia orbita Mercurii est admodum excentrica, si Mercurius sit in P, in maximâ digressione, per observationem notus sit oportet angulus STP & per Theoriam motuum Mercurii angulus PST unde deducetur angulus TPS, quia angulus ille rectus non est, unde tandem cætera determinentur ut in Venere neglectis minutiis.



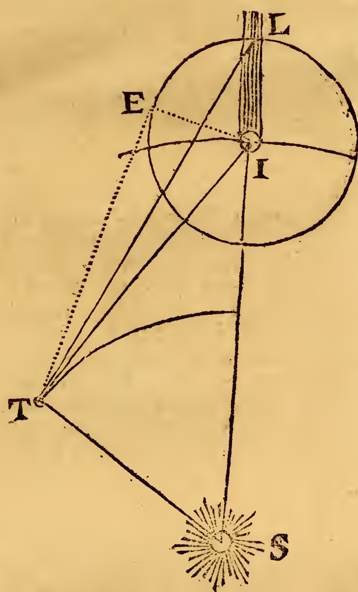
DE MUNDI SYSTEMATE.

tur omnis disputatio per eclipses satellitum jovis. (y) Etenim per eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ & geocentricâ inter se collatis determinatur distantia jovis.

PHÆ.

62. (y) 62. * *Etenim per Eclipses* Jovis *determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentricâ.*

* Sit S Sol; T terra; I Jupiter; L Satelles ejus per medium umbræ I L transiens: Ex Terrâ T observetur in partibus semi-Diametri Jovis, distantia centri Jovis à Satellite in umbram sese immergente & ex eâ emergente, medium inter eas distantias erit distantia à centro Jovis ad Satellitem in medio umbræ immersum in partibus semi-Diametri Jovis, eadem distantia in minutis & secundis observari poterit, eritque mensura anguli I T L; Ducatur T E tangens ad orbitam satellitis, & I E quæ erit in E T perpendicularis, quia cognoscitur ratio maximæ elongationis hujus satellitis ad semi-Diametrum Jovis, & hic habetur in secundis semi Diameter Jovis habebitur in secundis angulus I T E sub quo apparere deberet lineâ I E, si Satelles foret in maximâ suâ elongatione eo temporis momento; sed ex Trigonometricis, est sinus anguli I T E, ad sinum totum sive sinum anguli E, ut est I E ad T I, rursus in Triangulo T I L est I L (sive I E ipsi æqualis) ad T I ut sinus anguli observati I T L ad sinum anguli T L I; Itaque ut sinus anguli I T E ad sinum totum, ita sinus anguli I T L ad sinum anguli T L I sive TLS; unde in Triangulo T L S, cognito per observationem angulo S T L & invento ut



indicatum est angulo TLS, habetur angulus T S L, qui additus vel detractus è longitudine Heliocentricâ terræ dat Jovis Heliocentricam longitudinem. Q. E. I.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad terram ductis, areas describere temporibus minimè proportionales; at radiis ad solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in periheliis ac tardius in apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est astronomis notissima, & (z) in jove apprimè demonstratur per eclipses satellitum, quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & distantias à sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum à vi solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce phænomenis negligo.

(z) *Et in Jove apprimè demonstratur.* Nam per eclipses satellitum determinatur locus Jovis è Sole visus ejusque à Sole distantia, & ideò collatis plurium eclipsium observationibus, habetur motus verus Jovis in propriâ orbitâ circà Solem & orbita ipsa describi potest; undè quemadmodum de Sole diximus (43) patet Jovem describere areas temporibus proportionales circà Solem. 62.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus suis retinentur, respicere centrum jovis, & esse reciprocè ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

PAtet pars prior propositionis per phænomenon primum, & propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per phænomenon primum, & corollarium sextum propositionis quartæ ejusdem libri.

Idem intellige de planetis qui Saturnum comitantur, per phænomenon secundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus suis retinentur, respicere solem, & esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior propositionis per phænomenon quintum, & propositionem secundam libri primi: & pars posterior per phænomenon quartum, & propositionem quartam ejusdem libri. Accuratissimè autem demonstratur hæc pars propositionis per (a) quietem apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicatâ (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) motum apsidum

62.

(a) * *Per quietem apheliorum.* * Astronomi motus cœlestes calculant referendo Astra ad Eclipticam, cujus initium per intersectionem æquatoris & Eclipticæ determinatur; sed illud initium fixum non est, & propter axis terræ nutationem intersectio illa in antecedentia fertur 51 circiter secundis singulo anno, hinc fixæ totidem secundis progredi videntur, Aphelia Planetarum etiam progredi videntur respectu ejus initii Eclipticæ, progreditur ergo singulo anno. - - -

ſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

LIBER TERTIUS. PROP. III. THEOR. III.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim, quâ luna retinetur in orbe ſuo, reſpicere terram, & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior per phænomenon ſextum, & propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per motum tardiſſimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium & minutorum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) quod ſi diſtantia lunæ à centro terræ ſit ad ſemidiametrum terræ ut D ad 1; vis à quâ motus talis oriatur ſit reciprocè ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt, reciprocè ut ea

Aphelium terræ	- - -	62″.
Saturni	- - -	78″.
Jovis	- - -	57″.
Martis	- - -	72″.
Veneris	- - -	86″.
Mercurii	- - -	80″.

Sed multum abeſt quam ut ille Apheliorum motus, certiſſimè determinetur, & uniformis eſſe deprehendatur; ex obſervationibus motûs Aphelii terræ nunc plus procedere quam 50″ nunc minus deprehenditur, unde quidam Aſtronomi non alium eſſe ejus motum præter motum ipſius initii Eclipticæ cenſent. Pariter ex obſervationibus Aphelii Saturni, ejus motus irregularis videretur, aliquando accelerari aliquando retrocedere, ex. gratia, ab anno 1694 ad finem anni 1708, minutis ferè 33 retroceſſiſſe teſtatur Caſſinus. Aphelium Jovis ad motum fixarum proximè accedere videtur, &c. Unde conſtat, Aphelia quamproximè quieſcere, & eam quantitatem exiguam motus ipſis aſſignati quæ excedit motum fixarum, forte obſervationum erroribus deberi, forte actioni mutuæ vicinorum Planetarum inter ſe; ſic cum anno 1703 Saturnus & Jupiter conjuncti fuerint, & cum nonniſi quinque annis nonaginta gradibus à ſe mutuo diſcedant patet quod ab anno 1698 ad annum 1708 Jupiter inter Solem & Saturnum erat verſatus, ejuſque actio in Saturnum adjuncta fuerat actioni Solis in Saturnum; Poſito autem quod reverâ vis Solis in Saturnum decreſcat ſecundum quadrata diſtantiarum, & Jovis interpoſitione vim qualemcumque illi addi quæ X dicatur, ex Propoſitione XLV. primi Libri habebitur angulum Apſidis imæ cum ſumma eſſe $180^{gr.} \sqrt{\frac{1+X.}{1+3X}}$ ſed $\frac{1+X}{1+3X}$ eſt fractio ideóque ille angulus eſt minor $180^{gr.}$ regreditur itaque Apſis ex his hypotheſibus planè ut obſervatione conſtat: Unde non obſcurè colligitur Apheliorum fixarum reſpectu quies (ſemotis his accidentalibus cauſis) ac per conſequens quod vires quibus Planetæ ad Solem retrahuntur ſunt in duplicatâ diſtantiarum ratione accuratè, ſiquidem ſi vel unâ ſexageſimâ parte, accederet ratio à duplicata ad triplicatam, Apſides tribus ad minimum gradibus progrederentur ut demonſtratum fuit in fine 1[i]. Coroll. Prop. 45[æ]. Lib. I.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ea ipſius D dignitas cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt, in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicatâ inversè, ſed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ proprius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione ſolis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. (b) Actio ſolis quâtenus lunam diſtrahit à terrâ, eſt (c) ut diſtantia lunæ à terrâ quamproximè; (d) ideoque (per ea quæ dicuntur in corol. 2. prop. XLV. lib. 1.) eſt ad lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglectâ ſolis vi tantillâ, vis reliqua quâ lunâ

(b) * *Actio Solis quâtenus Lunam diſtrahit à terrâ.* * Motus Apogæi Lunaris uniformis non eſt, ſed aliquando procedit, aliquando recedit, aliquando quieſcit, ſed ita ut omnibus compenſatis progrediatur, & octo aut novem annis 360. gr. percurrerit; Pariter & actio Solis quâ Lunam diſtrahit à terrâ non eſt continua, actio Solis Lunam à terrâ diſtrahit dum Luna à Syzygiâ non plus quam 55. gradibus hinc inde diſceſſit, circa quadraturas verò actio Solis cum terræ attractione conſentit, Lunamque ad terram attrahit, ſed tunc & debilior eſt & per pauciores gradus agit, quam circa Syzygias, hinc effectus qui reſultat pendet ex actione Solis quâ Luna diſtrahitur. (Lib. I. Prop. LXVI. Cor. 6. 7. 8, cum notis).

(c) * *Eſt ut diſtantia Lunæ à Terrâ quam proximè.* * Propter motum Telluris cum Lunâ circa Solem, omnia puncta Lunaris Orbitæ ſucceſſivè obvertuntur Soli, & verſantur in Syzygiâ, poſtea verò in quadraturâ, & cum ea orbita non ſit circulus cujus terra ſit centrum, patet puncta Syzygiarum & quadraturarum, nunc viciniora nunc remotiora fore terræ; Jam verò vis quâ Sol diſtrahit Lunam à terrâ, in Syzygiis, ſicut & vis quâ Sol Lunam attrahit terram verſus in Quadraturis creſcit ſecundum diſtantias Lunæ à terrâ, in iis autem punctis præcipua eſt Solis actio ad Apogæum Lunæ movendum, unde effectus reſultans pendebit à differentiâ earum actionum quæ erit ſicut diſtantia Lunæ à terrâ: Vel ut melius res concipiatur, fingatur Orbitam Lunæ cingi undique Solibus æqualiter à terrâ diſtantibus, ita ut ſingulum punctum Orbitæ Lunaris ſit ſimul in Syzygiâ & quadraturâ; cum actio Solis in Syzygia ſicut & actio Solis in quadratura ſit ut diſtantiæ Lunæ à terrâ, differentia earum actionum erit etiam ut diſtantia Lunæ à terra, ſed effectus differentiæ earum actionum erit idem ac id quod reſultabit ex tranſlatione dicti puncti per Syzygiam & poſtea per Quadraturam, hinc ſi motus Apogæi medius aſſumatur is pendebit ab actione quæ erit ut diſtantia Terræ à Lunâ; addit autem Newtonus quam proxime propter actionem in punctis inter Syzygias & quadraturas, ſed quæ parum hanc rationem turbant nam in punctis intermediis ubi actio quâ Luna diſtrahitur à Terra magis recederet ab hac ratione actiones compoſitæ ſeſe mutuò deſtruunt & in punctis à Syzygiis aut à quadraturis non remotis actio Solis ſequitur proxime eaſdem rationes ac in ipſis Syzygiis ac quadraturis; hinc actio Solis quâtenus Lunam diſtrahit à terra eſt proximè ut diſtantia terræ à Lunâ.

(d) * *Ideoque per ea quæ dicuntur in Cor. 2. Prop. XLV. Lib. I.* * Dicitur in eo Corollario, quod ſi ex vi decreſcente ſecundum quadrata diſtantiarum auferatur vis quæ creſcat ſecundum ipſas diſtantias, quæ ſit ad priorem ut 1 ad 357.45, motus progreſſivus Apogæi erit 1d. 31'. 28" in ſingulâ revolutione; motus autem progreſſivus Apogæi Lunaris eſt circiter duplo velocior, hinc vis illa ablatitiâ debet eſſe ad vim Lunæ centripetam ut 2 ad 357.45 ſive ut 1. ad 178.725.

lunâ retinetur in orbe erit reciprocè ut D^2. Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propositione sequente. LIBER TERTIUS. PROP. IV. THEOR. IV.

Corol. Si (e) vis centripeta mediocris quâ lunâ retinetur in orbe augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ semidiametri terræ ad mediocrem distantiam centri lunæ à centro terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad superficiem terræ, posito quod vis illa descendendo ad superficiem terræ perpetuo augeatur in reciprocâ altitudinis ratione duplicatâ.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi semper à motu rectilineo, & in orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris à terrâ in syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundum *Ptolemæum* & plerosque astronomorum 59, secundum *Vendelinum* & *Hugenium* 60, secundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, secundum *Streetum* $60\frac{2}{5}$, & secundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Ast *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones solis & lunæ (omnino (f) contra naturam lucis) majores quam fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, (g) auxerunt parallaxin lunæ scrupulis totidem, hoc est, quasi duodecimâ vel decimâ quintâ parte

(e) * *Si vis centripeta mediocris.* Quoniam vis ablatitia Solis est ad vim centripetam Lunæ ut 1 ad $178\frac{29}{40}$, si vis ablatitia Solis sit 1, erit vis centripeta Lunæ $178\frac{29}{40}$, ideóque detractâ vi ablatitiâ Solis, erit vis Lunæ quâ reverâ retinetur in orbitâ suâ per vim terræ minutam actione Solis $177\frac{29}{40}$. Quarè si vis mediocris quâ Luna retinetur in orbe, augeatur in ratione $177\frac{29}{49}$ ad $178\frac{29}{40}$, obtinebitur vera vis Lunæ centripeta, qualis foret si nulla esset actio Solis. Hinc posito quod vis illa descendendo ad superficiem terræ perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis seu distantiæ à centro terræ ratione duplicatâ, ut habeatur vis centripeta in superficie terræ, dicendum est ut quadratum semidiametri terræ ad quadratum distantiæ mediocris centri Lunæ à centro terræ, ità vis centripeta ad quartum quod erit vis in superficie terræ.

(f) * *Omninò contrà naturam lucis* (25).

(g) * *Auxerunt parallaxim Lunæ.* Tantùm augeri parallaxim Lunæ quantùm augetur refractio, patet si determinetur pa-

De Mundi Systemate.

te totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & (h) distantia evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium, ferè ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum in syzygiis; & lunarem periodum respectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab astronomis statuitur; atque ambitum terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti (i) à *Gallis* mensurantibus definitum est: &

62. rallaxis Lunæ, quod ità præstari potest. Sit ACT, tellus cujus centrum T, observetur altitudo meridiana centri Lunæ L ex loco A in Q à refractionibus libera, & ex tabulis eruatur pro tempore observationis longitudo & latitudo Lunæ; deindè (per trigon.) quæratur ipsius declinatio, habebitur ejus distantia à vertice Z seu locus P è terræ centro T visus, differentia PQ seu angulus PLQ aut æqualis ALT est parallaxis Lunæ. Porrò ut habeatur locus Q è loco A visus à refractione liber, quoniam refractio auget altitudinem, fit locus visus q, Q q metietur refractionem, undè arcus Q q, addendus est arcui P q ut habeatur parallaxis tota PQ; si verò refractio major assumatur ut q R, parallaxis erit major nempè PR, quasi Luna esset in l; undè tantum augetur parallaxis quantum refractio ipsa.

(h) * *Distantia evadet.* Sit T centrum terræ & angulus ALT parallaxis horizontalis mediocris. Ob angulum LAT rectum, erit semidiameter terræ AT ad distantiam mediocrem Lunæ à terrâ TL, ut sinus parallaxeos mediocris ad sinum totum. Est autem parallaxis ista 58′ circiter. Jam ducatur Tl, sitque angulus AlT 63′ vel 62′, ob refractionem malè constitutam, erit Tl ad Tl ferè ut 58 ad 62 vel 63, ideoquè cum sit juxtà Tychonem $Tl = 56\frac{1}{2}$ semid. terræ, erit ut 58 ad 62 vel 63 ità $56\frac{1}{2}$ ad $60\frac{23}{58}$ vel $61\frac{43}{116}$. Quarè si corrigatur error qui ex refractione malè constitutâ oritur, distantia mediocris Lunæ à terrâ evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semid. terrestr.

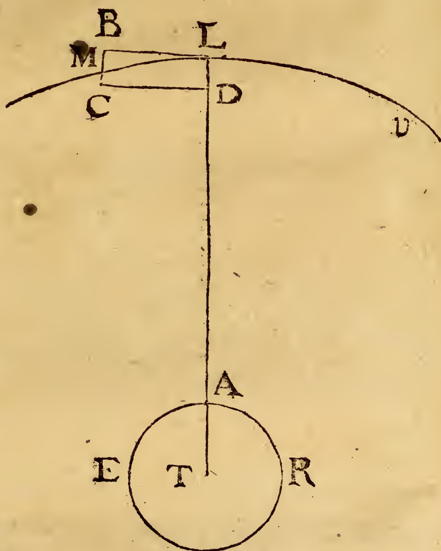
(i) * *A mensurantibus Gallis*, à Picar-

& si luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illâ omni, quâ (per corol. prop. III.) in orbe suo retinetur, descendat in terram; hæc spatio minuti unius primi cadendo describet pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$. (k) Colligitur hoc ex calculo vel per propositionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per corollarium nonum propositionis quartæ ejusdem libri, confecto. Nam arcus illius quem luna tempore minuti

carto nimirum inventum est gradui circuli maximi terrestris respondere hexapedas 57060 seu ped. Paris. 342360. Quare inferatur (22) ut numerus graduum arcus distantiæ duorum locorum ad 360°. seu peripheriam integram, ità idem arcus in milliaribus aut pedibus expressus ad ambitum telluris in eâdem mensurâ inveniendum, sicque definitum est ambitum telluris esse ped. Paris. 123249600 ejusque proinde diameter est ped. Paris. 39231566.

(k) 63. * *Colligitur hoc per propositionem XXXVI. lib. I.* * In hâc Propositione 36. sit S centrum terræ S A distantia medriocris Lunæ à Terra, S O dimidium ejus distantiæ mediocris, velocitas quâ corpus revolvi potest in circulo O K H erit ad velocitatem Lunæ in propriâ orbitâ ut $\sqrt{2}$ ad 1, sit X arcus quem Luna in propriâ orbita uno minuto primo describit, erit $X\sqrt{2}$ arcus O K eodem tempore descriptus in circulo O K H & area O K S erit $\frac{1}{2}SO \times X\sqrt{2}$, æqualis areæ $ASD = \frac{1}{2}AS \times CD$ (nam ob exiguitatem arcus A D pro rectâ sumi potest sive $\frac{1}{2}SO \times X\sqrt{2} = SO \times CD$ unde est $CD = \frac{X}{\sqrt{2}}$, sed est S C ad C D ut C D ad A C ergo $AC = \frac{CD^2}{SC} = \frac{X^2}{2SC}$ sed S C est proximè æqualis S A ergo $AC = \frac{X^2}{2SA}$; rursus sit 1 ad p ut radius ad circumferentiam, orbitæ Lunaris Peripheria erit pSA, & quoniam tota à Luna describitur tempore $27^d. 7^h. 43'$. sive minutis 39343; erit arcus $X = \frac{pSA}{39343}$ & $AC = \frac{p^2\overline{SA}^2}{2 \times 39343^2 \times SA} = \frac{p^2 SA}{3095743298}$, est verò $\frac{pSA}{60}$ ambitus terræ qui pedum 123249600 ex Picarto adsumptus fuit; ideoque $pSA = 7394976000$; unde divisione factâ est $AC = 2.388756p$; sed Radius est ad Peripheriam ut 1 ad 6.283185 &c. unde tandem habetur $AC = 15.00878$ &c. Alter autem calculus ex Cor. 9. Prop. IV. deductus ita se habet. 63.

DE MUNDI SYSTEMATE. minuti unius primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicatâ distantiæ ratione inversâ, ideoque ad superficiem terræ major sit partibus 60×60 quam ad lunam; corpus vi illâ in regionibus nostris cadendo, describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & spatio minuti unius secundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi gravia reverâ descendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Luteriæ Parisiorum ad singula minuta secunda oscillantis, longitudo est pedum trium Parisien-



63 Sit R A E terra, cujus centrum T, V L orbita Lunæ cujus pars L M à Lunâ percurritur minuti unius primi intervallo. Quoniam Luna periodum suam respectu fixarum complet diebus 27, hor. 7. minutis primis 43, ut ab astronomis statuitur, hoc est, minutis primis 39343, erit L M, $\frac{1}{39343}$ totius peripheriæ. Porrò ambitus terræ est ped. Paris. 123249600, unde dabitur orbitæ Lunaris circumferentia quæ ejus est sexagecupla 7394976000 ped. Paris. quæ si dividatur per 39343, quotus dabit longitudinem arcûs à Lunâ minuto primo descripti pedibus Parisiensibus expressam scilicet 187964. ped. circiter cujus quadrato 35330465296 per diametrum diviso, quæ est pedum 2353893976 habebitur sinus versus L D ped. Paris. 15.0093 &c. proximè ut priori calculo.

* Sed ex Corollario propositionis præcedentis, vis quâ Luna retinetur in orbe suo augeri debet in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ ut corrigatur vis ejus per Solis actionem diminutionem, & spatia per diversas vires iisdem temporibus percursa sunt ut illæ vires, ergo linea A C inventa $15^{ped}.009$ est ad spatium quod Luna dempta vi Solis describeret ut $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ illud ergo spatium est $15^{ped}.0934$, quæ $\frac{934}{10000}$ pedis efficiunt accuratè pollices 1. lin. $1\frac{4}{9}$.

rifienfium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut obfervavit *Hugenius*. Et (l) altitudo, quam grave tempore minuti unius fecundi cadendo defcribit, eft ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*) (m) ideoque eft pedum Parifienfium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis quâ luna in orbe fuo retinetur, fi defcendatur in fuperficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque (per reg. I. & II.) eft illa ipfa vis quam nos gravitatem dicere folemus. Nam fi gravitas ab eâ diverfa effet, corpora viribus utrifque conjunctis terram petendo duplo velocius defcenderent, & fpatio minuti unius fecundi cadendo defcriberent pedes Parifienfes $30\frac{1}{6}$: omninò contra experientiam.

LIBER TERTIUS. PROP. IV. THEOR. IV.

(n) Calculus hic fundatur in hypothefi quod terra quiefcit. Nam fi terra & luna moveantur circum folem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis diftantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ femidiametrorum terreftrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri poteft per prop. LX. lib. I.

Scho-

(l) * *Et altitudo.* (471. lib. I.).

(m) * *Ideóque eft ped. Parif.* (ibid.).

(n) 64. * *Calculus hic fundatur in hypothefi quod terra quiefcit.* * Undecima Sectione Libri I. quæfivit Newtonus qualis oriretur differentia inter motus corporum attractorum, quando tota vis uni immoto tribuitur, aut quando (ficut res fe habet) attractione mutuâ in fe agunt, & demonftravit Propofitione 58 & 59. Quod fi è duobus corporibus fe mutuo attrahentibus & circa commune gravitatis centrum Ellipfes fimiles defcribentibus, alterutrum fit noftra fedes, ita ut motum totum alteri tribuamus quod circa nos Ellipfim defcribere videretur; illud eâdem vi centripetâ eamdem Ellipfim circa nos fi immoti reverâ foremus nonnifi longiori tempore defcriberet, ita ut tempus quo mutuâ actione gravitatis circa nos *motos* revolvi videretur, foret ad tempus quo circa nos *immotos* revolveretur in ratione fubduplicatâ corporis Centralis immoti ad fummam duorum Corporum revolventium; Unde, manente eâdem gravitatis Lege, Ellipfis quæ defcriberetur circa nos *immotos* eodem tempore quo defcribitur Ellipfis relativa circa nos *motos*, minor foret quam ea Ellipfis relativa, & ratio axium invenietur dicendo, quadratum temporis quo hæc Ellipfis defcribitur five (ex hyp.) quadratum temporis quo defcribitur Ellipfis relativa circa nos, eft ad quadratum temporis quo Ellipfis relativæ ellipfi æqualis circa nos verè immotos defcribitur, ut Cubus femi Axis Ellipfeos minoris defcriptæ circa corpus immotum ad Cubum femi Axis Ellipfis majoris defcriptæ circa corpus etiam immotum & quæ Ellipfi relativæ eft æqualis, fed illa tempora erant in fubduplicatâ ratione maffæ corporis immoti

De Mundi Systemate.

Scholium.

Demonſtratio propoſitionis ſic fuſius explicari poteſt. Si lunæ plures circum terram revolverentur, perinde ut fit in ſyſtemate ſaturni vel jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) obſervarent legem planetarum à *Keplero* detectam, & propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro terræ, per prop. I. hujus. Et ſi earum infima eſſet parva, & vertices altiſſimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè, efficeretque ut eadem lunula, ſi motu omni quo pergit in orbe ſuo privaretur, defectu vis centrifugæ quâ in orbe permanſerat, deſcenderet in terram, idque eâdem cum velocitate quâ gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus deſcendunt. Et ſi vis illa quâ lunula illa infima deſcendit, diverſa eſſet à gravitate, & lunula illa etiam gravis eſſet in terram more corporum in verticibus montium: eadem lunula vi utrâque conjunctâ duplo velocius deſcenderet. Qua-

65. moti ad ſummam maſſarum duorum Corporum, ergo, ut maſſa corporis immoti ad ſummam maſſarum duorum Corporum, ſic Cubus ſemi-Axis Ellipſeos minoris deſcriptæ circa corpus immotum ad cubum ſemi-axis Ellipſis majoris reverâ deſcriptæ; Hinc cum hactenus immotam terram ſuppoſuerimus Lunamque revolventem tempore quo reverâ revolvitur & ſemiaxem orbitæ Lunaris 60 ſemi Diametrorum terræ aſſumſerimus, ſitque maſſa terræ ad maſſam Lunæ ut 42. ad 1. erit 42. ad 43. ut Cubus 60. ad Cubum ſemi axeos ejus Ellipſeos quam (manente eadem gravitatis Lege eodemque tempore Periodico) Luna relativè deſcribet circa terram dum ipſâ terrâ mutuâ Lunæ attractione circa centrum gravitatis commune reverâ revolvetur; ille ergo ſemi Axis erit $\frac{43 \times 216000}{42}$ cujus Radix Cubica eſt 60.47 fere $60\frac{1}{2}$ ut habet Newtonus.

65. Eodem modo quo Luna in orbitâ ſuâ revolvitur circà tellurem ità aliud quodvis grave ex puncto extrà telluris ſuperficiem ſecundum rectam horizontalem ſatis validè projectum orbitam deſcriberet & planetæ inſtar periodum ſuam compleret (10. lib. I.). Sed quò altius eſt ſuprà terram punctum illud ex quo grave projicitur, eò minori opus eſt vi projectili ut projectum in planetam mutetur, & quò humilius eſt eò majori (ibid.) hoc eſt, celeritas per vim projectilem impreſſa erit inversè ut diſtantia, v. gr. Si Luna eâdem celeri-

Quare cum vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum terræ respiciant, & sint inter se similes & æquales, eædem (per reg. I. & II.) eandem habebunt causam. Et propterea vis illa, quâ luna retinetur in orbe suo, ea ipsa erit quam nos gravitatem dicere solemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplò velocius cadat quam corpora gravia solent cadere.

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas circumjoviales gravitare in jovem, circumsaturnios in saturnum, & circumsolares in solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa jovem, circumsaturniorum circa saturnum, & mercurii ac veneris reliquorumque circumsolarium circa solem sunt phænomena ejusdem generis cum revolutione lunæ circa terram; & propterea (per reg. II.) à causis ejusdem generis dependent: præsertim cum demonstratum sit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra jovis, saturni ac solis, & recedendo à jove, saturno & sole decrescant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decrescit in recessu à terrâ.

Corol. I. (°) Gravitas igitur datur in planetas universos. Nam venerem, mercurium, cæterosque esse corpora ejusdem generis

leritate quâ nunc in orbitâ suâ revolvitur juxta terram projiceretur secundùm directionem horizontalem, circà tellurem non giraret, sed terrestrium projectilium more in terram caderet, antequam * per tertiam partem minuti esset mota. Nam arcus quem Luna 20 scrupulis secundis horariis in suo circulo percurrit est 11″ si juxta tellurem accedat & eadem celeritate moveatur ille arcus erit 11′; sinus versus Arcus 11′ est $\frac{51}{10.000.000}$ Radii qui Radius cum sit pedum 19615783 erit sinus ille versus pedum centum circiter, sed grave prope terram viginti istis scrupulis secundis cadendo percurrit 20 × 20 × 15 $\frac{1}{12}$, sivè 6033 ped. Unde Luna in circulo suo non manebit sed longè prius in terram impegerit quam 20 secunda elapsa fuissent.

(o) 66. * *Gravitas igitur datur in Planetas universos;* * Datur gravitas in terram & eâ gravitate Luna circa eam revolvitur per Prop. IV; datur gravitas in Jovem & Saturnum, nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & circum- 66.

DE MUNDI SYSTEMATE.

generis cum jove & saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis per motus legem tertiam mutua sit, jupiter in satellites suos omnes, saturnus in suos, terraque in lunam, & sol in planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. (p) Gravitatem, quæ planetam unumquemque respicit, esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Corol. 3. Graves sunt planetæ omnes in se mutuò per corol. 1. & 2. Et (q) hinc jupiter & saturnus prope conjunctionem se invicem attrahendo, sensibiliter perturbant motus mutuos, sol perturbat motus lunares, sol & luna perturbant mare nostrum, ut in sequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam quâ corpora cœlestia in orbibus suis retinentur centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem esse constat, & propterea gravitatem in posterum vocabimus. Nam causa vis illius centripetæ, quâ lunâ retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I. II. & IV.

PRO-

circumsaturniorum circa Saturnum sunt ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa terram, pendent ergo (per reg. 2.) ex gravitate eorum Satellitum in eos Planetas; Quamvis autem non sint aut non observati sint Satellites circa Martem, Venerem & Mercurium, attamen Jovi, Saturno, Terræ in cæteris ita sunt similes ut dubitandi locus non relinquatur quod si Satellites juxta ipsos collocarentur idem eveniret illis ac Lunæ & circumsaturniis aut circumjovialibus, unde sequitur Gravitatem etiam dari in illos Planetas; Postea propter mutuam attractionem, terram esse gravem in Lunam, &c. constabit.

(p) * *Coroll.* 2. Patet (ex reg. I. & prop. I.).

(q) * *Et hinc Jupiter.* Hæc mutua planetarum perturbatio ut potè cum sequentibus propositionibus conjuncta deinceps convenientius explicabitur, * sufficiant in præsentiarum quæ de eâ superius dictum est, occasione quietis Apheliorum, vide notam a ad Prop. 2.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in planetas singulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus distantiis à centro planetæ, proportionalia esse quantitati materiæ in singulis.

(r) Descensus gravium omnium in terram (demptâ saltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexigua resistentia oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum observarunt alii; & accuratissimè quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, sale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus suspendebam (quam potui exactè) in alterius centro oscillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, constituebant pendula, quoad pondus, figuram, & aëris resistentiam omnino paria: & paribus oscillationibus, juxta positæ, ibant unà & redibant diutissimè. (f) Proinde copia materiæ in auro (per corol. 1. & 6. prop. XXIV. lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejusdem actionem in totum lignum; hoc est, ut pondus ad pondus. Et sic in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quam pars millesima materiæ totius, his experimentis manifestò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in planetas eandem esse atque in terram, non est dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terrestria ad usque orbem lunæ, & unà cum lunâ motu omni privata demitti, ut in terram simul cadant; & per-

(r) * *Descensus gravium omnium* (3. lib. 1.).

(f) * *Proindè copia materiæ.* Quantitas materiæ in medio non resistente est ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inversè (per cor. 6. prop. 24. lib. 2.) ideóque datis tempore & longitudine penduli, ut pondus comparativum directè. Sed pondus comparativum est actio vis motricis (per cor. 6. prop. 20. lib. 2.). Ergò copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno ut vis motricis actio in totum aurum ad ejusdem actionem in lignum, hoc est, (per cor. 1. prop. 24. lib. 2.) ut pondus ad pondus.

(t) per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum lunâ, ideoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in lunâ, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro jovis, (u) erunt eorum gravitates acceleratrices in jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro jovis; & propterea in æqualibus à jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus in hâc terrâ noſtrâ. Et (x) eodem argumento planetæ circumſolares, ab æqualibus à ſole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in ſolem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. (y) Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro jovis & ejus ſatellitum pondera in ſolem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quam maximè regulari; per corol. 3. prop. LXV. lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in ſolem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus ſatellitum (per corol. 2. prop. LXV. lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus à ſole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in ſolem pro quantitate materiæ ſuæ, quam jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quâcunque datâ, puta d ad e: diſtantia inter centrum ſolis & centrum orbis ſatellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum ſolis & centrum jovis in ratione ſubduplicatâ quam

66, (t) * *Per jam antè oſtenſa* (prop. 4. lib. hujus).

(u) * *Erunt eorum gravitates acceleratrices.* (Per cor. 2. prop. 5.).

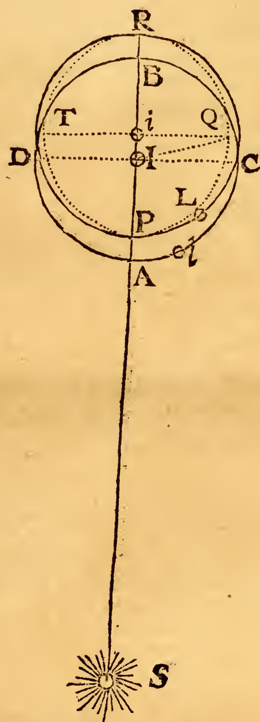
(x) * *Et eodem argumento.* Gravitates acceleratrices planetarum in Solem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Solis (cor. 2. prop. 5.) & propterea in æqualibus à Sole diſtantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales, proindéque temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo deſcriberent ſpatia æqualia. Quanto autem tempore planeta quilibet circumſolaris omni motu revolutionis privatus ſolâ vi centripetâ deſcenderet & ad ſolem uſquè perveniret ex datâ ejus à Sole diſtantiâ innoteſcit per not. 401. lib. 1. dimidio ſcilicet temporis periodici quo planeta ad diſtantiam duplò minorem revolvi poſſet, ſivè tempore quod eſt ad tempus periodicum planetæ ut 1 ad $4\sqrt{2}$, idem planeta cadendo ſolem attingeret.

(y) * *Vires autem quibus corpora inæqualia.* (Def. 7. & not. 15. lib. 1.).

quam proximè; (z) uti calculo quodam inito inveni. Et si satelles minus gravis esset in solem in ratione illa d ad e, distantia centri orbis satellitis à sole minor foret quam distantia centri jovis à sole in ratione illâ subduplicatâ. Ideoque si in æquali-

66.

(z) * *Uti calculo quodam inito inveni.* * Sit S Sol, I Jupiter, L Satelles gravior in Solem quam Jupiter paribus in distantiis in ratione d ad e, Fiat SI ad Si sicut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ & quoniam gravitas est inversè ut quadrata distantiarum, gravitas in Solem ad distantiam SI erit ad gravitatem in Solem ad distantiam Si ut d ad e; unde si gravitas Jovis in I positi sit ut e, & gravitas satellitis gravioris in I etiam positi sit ut d, ejusdem satellitis gravitas in i positi erit ut e, quare erit æqualis gravitati Jovis in I positi: Fingatur satelles l qui Jove nec gravior nec levior sit, qui circa Jovem I circulum describat ACBD; & fingatur in i corpus centrale Jovi simile circa quod, semotâ Solis actione, satelles gravior L describere poterit orbitam PQRT priori ACBD æqualem; Restituatur Solis actio, actio ejus in utrumque satellitem erit æqualis, in similibus orbitarum punctis nam propter ingentem puncti S distantiam erit SA ad SP, & SB ad SR ut SI ad Si, ideoque ut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ gravitates in eis punctis forent ut d ad e, ideòque si satellites forent æque graves, paribus in distantiis gravitates in eis punctis forent ut d ad e; sed quia gravitas satellitis l est ad gravitatem satellitis L ut e ad d compensatur discrimen gravitatis ex distantiâ ortum per discrimen gravitatis ex Hypothesi constitutum: mutatio autem quæ ex actione Solis oritur in orbitam satellitis relatè ad ejus primarium pendet ex discrimine actionis Solis in satellitem & in primarium, hoc est in oppositione pendet ex residuo actionis Solis in primarium demptâ actione Solis in satellitem; & in conjunctione ea mutatio pendet ex residuo actionis Solis in satellitem demptâ Solis actione im primarium: Cum ergo actio Solis in satellites L & l, sit eadem;



sed actio Solis in primarium i sit minor quam in primarium I, in oppositione minus est residuum quod mutationem pariet in orbita satellitis L, quam residuum quod mutationem satellitis l parit in orbitâ & majus è contra est residuum in conjunctione respectu orbitæ satellitis L quam respectu orbitæ satellitis l; sed illa Residua tam in oppositione quam in conjunctione vim centripetam minuunt; Ergo vis centripeta major manet in R quam in B, & minor è contra in P quam in A, unde patet

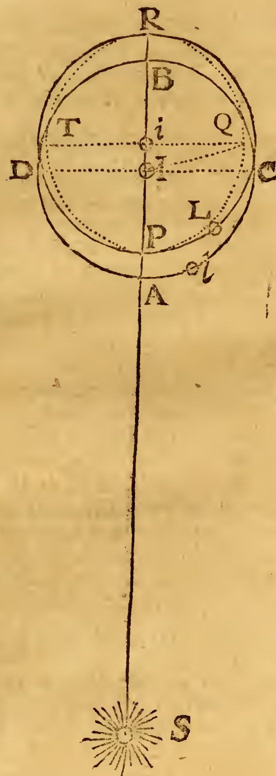
De Mundi Systemate.

æqualibus à ſole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſvis in ſolem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix jovis in ſolem, parte tantum milleſimâ gravitatis totius; foret diſtantia centri orbis ſatellitis à ſole major vel minor quam diſ-

tantia

36. patet quod ut reſtituatur ſimilitudo inter orbitam ſatellitis L, & orbitam ſatellitis *l* corpus centrale debeat removeri à puncto R & accedere verſus P, hoc eſt transferri ex i verſus I; ita ut centrum orbitæ ſatellitis L remotius eſſe debeat à Sole quam ipſius corpus Centrale.

Jam verò dico illud corpus centrale ad I transferri debere, nam ſit corpus centrale in I, ſemotâ Solis actione, ſatelles L eodem tempore Periodico ac prius deſcribet Ellipſim cujus centrum i, focus verò I & axis major R P, (per Cor. Prop. XV. Lib. I.) & in mediocri ſuâ diſtantia IQ (Cor. 4. Prop. XVI. Lib. I.) velocitatem eamdem habebit quam habet ſatelles *l* in ſuo circulo, qualem v. gr. habet in C ubi velocitatum illarum directiones ſunt Parallelæ tam inter ſe quam diametro R P, & ob diſtantiarum I Q & I C æqualitatem vires centrales ſunt æquales directionis obliquitate paulum differentes; Addatur jam actio Solis, & cum ſit S Q ad S C ut S i ad S I actiones illæ Solis (ex Hyp. & demonſtratis) in ſatellites diverſæ gravitatis ſed poſitos in Q & C erunt etiam æquales; Movebitur ergo ſatelles L in mediocribus diſtantiis Q & T ut ſatelles *l* movetur in C & D quam proximè, tam ratione corporis centralis I quam etiam ex adjuncta actione Solis, mutationes verò ex Sole pendentes in A & P, & in R & B æquales ſunt, quia ſunt differentia ejuſdem vis Solis in in I & virium Solis in A & P, ut & virium Solis in R & P, vires autem in A & P ſunt æquales ex Hyp. & dem. ut & in R & P. Unde cum vis Primarii magna cenſenda ſit reſpectu vis S; rationes virium Centripetarum reſiduarum in P & A, B & R manent inter ſe in eadem ratione ac ſi nulla foret actio Solis, & ut ſemotâ actione Solis curvas ſuas iiſdem temporibus deſcribere faciebant, celeritate quidem majori in P, minori in R, media



verò in A & B, itaque eadem proximè iis in punctis manebit ratio deſcriptionis curvarum; cum ergo demonſtratum ſit quod in punctis P Q R T, A C B D actio Solis non turbet relationem quæ intercedit inter modum quo curvæ illæ P Q R T, ACBD deſcribuntur cùm virium rationes eædem maneant ac prius quamproximè, idem etiam de punctis intermediis erit intelligendum. Unde ſequitur quod ſatelles L in orbita P Q R T revolvi poterit eodem tempore iiſdemque proxime Legibus ac Satelles

stantia jovis à sole ([a]) parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius, id est, parte quintâ distantiæ satellitis extimi à centro jovis: quæ quidem orbis eccentricitas foret valde sensibilis. Sed orbes satellitum sunt jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices jovis & satellitum in solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera saturni & comitum ejus in solem, in æqualibus à sole distantiis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: & pondera lunæ ac terræ in solem vel nulla sunt, vel earum massis accuratè proportionalia. Aliqua autem sunt per corol. 1. & 3. prop. V.

Quinetiam pondera partium singularum planetæ cujusque in alium quemcunque sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si verbi gratia corpora terrestria, quæ apud nos sunt, in orbem lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore

telles L in orbitâ suâ ACBD, si gravior sit Jove paribus in distantiis in ratione duplicatâ distantiæ Solis à centro suæ orbitæ ad distantiam Solis ab ipso Jove. Q. E. D.

Eamdem demonstrationem applicari posse ad casum ubi satelles supponeretur levior Jove paribus in distantiis, illumque tunc descripturum Ellipsim cujus centrum Sole vicinius erit quam Jupiter ita ut sit gravitas satellitis ad gravitatem Jovis in duplicatâ ratione distantiæ Solis à centro Orbitæ ad distantiam Solis à Jove. Q. alterum E. D.

Hâc ratione satis constare assertum Newtoni credimus, idem tamen aliter inito calculo magis ad mentem Newtoni demonstrari posse non negamus; sed ratio eum calculum ineundi ex iis quæ postea de motibus Lunaribus dicentur, erit deducenda.

(a) * *Parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius.* Gravitas acceleratrix Jovis sit 1, erit (per hyp.) gravitas acceleratrix satellitis $1+\frac{1}{1000}$, sed (ex dem.) distantia inter centrum Solis & centrum orbis satellitis major est quam distantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione illâ subduplicatâ quamproximè, hoc est, ut 1, ad $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}$. Quarè utriusque distantiæ differentia est $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}-1$ seu $\sqrt{\frac{1001}{1000}}-1=\sqrt{1.001}-1=1.0004998$ &c. $-1=.0004998$ &c. sive $=\frac{5}{10000}=\frac{1}{2000}$, ideóque distantia centri orbis satellitis à Sole major erit quam distantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius,

De Mundi Systemate.

pore lunæ: ſi horum pondera eſſent ad pondera partium externarum lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materiâ: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa terram ſunt, gravia ſunt in terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omninò deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in formâ materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, & viciſſim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in corollario ſuperiore.

Corol.

66. tius, id eſt parte quintâ diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis.

* Nam eſt Diameter Jovis circiter decima pars Diametri Solis ut ſupra indicavimus ſive ut 997 ad 10.000, diſtantiâ extimi ſatellitis eſt 26.63 ſemi Diametrorum Jovis, ergo ea diſtantiæ ſemi Diametros Solis continebit 2.663 aut accuratiùs 2.655.

Solis ſemi Diameter mediocris è terrâ viſus ſecundum Caſſini tabulas eſt 16′. 3″ vel 16′ 4″. Jam verò in Triangulo Rectangulo cujus angulus verticis eſt 16′. 4″ altitudo continet Baſim 213.96 vicibus; ergo inter ſolem & terram intervallum eſt quod Solis ſemi Diametros 213.96 contineret, ſive proximè, Solis Diametros 107.

Jovis autem diſtantia mediocris à Sole eſt ad diſtantiam mediocrem terræ à Sole, ut 52 ad 10, ergo ea continebit ſemi Diametros Solis 1112.592, ejus numeri bis milleſima pars eſt .556296 quæ eſt excentricitas Jovis ſi ſatelles ſit Jove 1000â. parte gravior vel levior paribus in diſtantiis, ille verò numerus .556296 eſt quinta pars numeri 2.78148 paulò majoris quam 2.655 ſed diſtantia extimi ſatellitis à Jove continebat Solis ſemi Diametros 2.655; Ergo excentricitas Jovis ſi ſatelles ſit Jove 1000â. parte gravior vel levior paribus in diſtantiis eſt ad minimum quintâ pars diſtantiæ ſatellitis extimi à Jove. Q. E. D.

Corol. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minimè deſcendunt. Quod ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rarefieri poſſint, (z) vacuum datur. Ejuſdem denſitatis eſſe dico, (a) quarum vires inertiæ ſunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis (b) gravitatis diverſi eſt generis à vi magneticâ. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora

(z) * *Vacuum datur.* Quibus reſponſionibus hoc Newtoni ratiocinium effugiant Carteſiani jam diximus (lib. 2. num. 187.).

(a) * *Quarum vires inertiæ.* Cum enim vis inertiæ ſit quantitati materiæ proportionalis, ſi vires inertiæ ſunt ut magnitudines, magnitudines ſunt ut quantitates materiæ, hoc eſt, ſunt ejuſdem denſitatis.

(b) * *Vis gravitatis diverſi eſt generis.* Clariſſ. Muskenbroek in Diſſertatione de Magnete plurima atque accuratiſſima de hujuſce lapidis actione refert experimenta. Ex deſcriptâ à diligentiſſimo viro experimentorum ſerie palam quidem fit æqualem non eſſe magnetis in varia corpora actionem, eamque tempeſtatum viciſſitudinibus obnoxiam & modò remitti modò intendi. At vim magneticam in ratione multò minori quam triplicatâ diſtantiarum decreſcere eadem oſtendunt experimenta. Hinc poſt tranſcriptum hoc ipſum Corollarium V., ſubdit Muskenbroek: «utinam memoriæ prodita fuiſſent «experimenta ex quibus Newtonus hæc «collegit; forſitan enim vir ſtupendæ ſub«tilitatis in Mathematicis diſciplinis me«thodum invenit ſeparandi attractiones à «repulſionibus quarum proportionem in di«ſtantiæ ratione triplicatâ decreſcere de«prehendit, ſed quia nihil de hâc re ulte«rius determinavit nec amplecti ejus ſen«tentiam poſſumus:». Ut intelligantur hæc Clariſſ. Muskenbroekii verba, ſciendum eſt virum doctiſſimum ſuis experimentis in eam inductum fuiſſe ſuſpicionem, quod ſcilicet magnes conſtaret partibus valdè heterogeneis, quarum quædam attraherent quædam repellerent ità ut duæ illæ vires oppoſitæ vel ſimplicis repulſionis vel attractionis proportionem turbent. Idque non caret veriſimilitudine, cum experimentis notiſſimum ſit magnetes non ſolùm ſeſe mutuò attrahere, ſed etiam alterutro magnete in contrariam partem converſo, unum ab altero repelli. Uterque magnetis polus vim repellentem atquè attrahentem æquè oſtendit & idcircò ex eodem polo vis attrahens & repellens emanat. Si amici magnetum poli ſibi obvertantur, attractio præpollet repulſioni, ſi e contrà inimici poli ſeſe invicem reſpiciant, prævalet repulſio. Quamobrem qui ſolam attractionem vult cognoſcere, perſpectam habere debet eorumdem polorum vim repulſivam eamque addere vi attrahenti experimento cognitæ, ſumma indica-

De Mundi Systemate.

pora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ

66.

dicabit vim totam attrahentem. Hinc forsan fieri posset ut separatis ab invicem attractionis repulsionisque viribus, constans quam Newtonus deprehendit inter attractiones & distantias proportio obtineret. At verò cum ex crassis observationibus duntaxat id se animadvertisse fateatur Newtonus, non ità longè quærenda videtur mens nostri autoris.

* Vim magneticam decrescere in ratione triplicatâ distantiarum ab experimentis statuit Wisthonus in egregio opusculo, De Acus magneticæ inclinatione: ipse autem Muyschenbroekius in Tomo primo Physices suæ, Rationem diminutionis vis magneticæ esse fere quadruplicatam distantiarum deducit ingeniosissimis experimentis, scilicet magnetem unum alteri lanci bilancis appendit, ponderibus in alterâ lance ad æquilibrium instituendum impositis, tum admovet magnetem sub eo qui suspensus est, sic vis attractionis magnetum æquilibrium tollit, quod adjectis ponderibus restituitur; & pondera illa addenda varia sunt pro varia distantia magnetum inter se, ita ut videantur sequi rationem quadruplicatam inversam spatii vacui inter magnetes intercepti, quod spatium vacuum non est Cylindricum aut Prismaticum, quia magnetes quibus utebatur Cl. Muyschenbroekius erant Sphærici unde hæc ratio non est accurate ratio quadruplicata inversa distantiarum.

Aliâ ratione hæc experimenta possunt institui, nempe considerando actionem magnetis in acum magneticam, quantum nempe pro variâ magnetis distantiâ à magnetico meridiano acum detorqueat, atque hâc ratione, experimenta à Wisthono instituta fuisse (nisi memoria fallit) puto, quæ forte Methodus ea est etiam quâ Newtonus usus fuerat, & sane omnibus probè notatis quæ ad æstimationem virium requiruntur, vis magneticæ diminutionem secundum triplicatam rationem procedere experimentis quam accuratissimè potui institutis deprehendi, quæ quidem experimenta (cum non sint ad manum ea quæ Wisthonus hâc de re tradidit) referre nostri puto esse instituti.

Sit ergo A C B, meridianus magneticus, N C S acus magnetica actione magnetis M, extra meridianum magneticum tracta, sitque linea C m à centro acus ad centrum magnetis ducta meridiano magnetico perpendicularis & statim supponatur distantiam C m à centro acus ad centrum magnetis esse Physicè infinitam.

Vis magnetica terræ retrahit acum a situ S C N ad B C A, sed quia illi situi est obliqua, resolvenda est in duas vires unam lineæ S C N perpendicularem alteram ipsi Parallelam; hæc frustra agit obnitente centro C, illa vero gyrationem acus efficit, itaque si in puncto quovis c, a c repræsentet vim magneticam totam, a n repræsentabit vim quâ convertitur acus quæ ideo est ad vim magneticam totam in eo puncto ut sinus anguli a c n (declinationis acus à meridiano magnetico) ad Radium; In omnibus punctis C N vim æqualem exerceri supponi potest, sed in parte C S vis ea repulsivè agit, ideoque consentit cum vi quæ convertit partem C N, & ejus efficaciam geminat: Notum est verò quod si vires æquales in omnibus punctis C N agant æqualiter & perpendiculariter ut eam lineam convertant earum omnium efficacia eadem erit ac si summa omnium virium perpendiculariter ageret in puncto P duabus tertiis partibus acus C N à centro C remoto, hic ergo collecta censeri potest tota vis magnetica convertens partem C N, & eodem ratiocinio vis repulsiva convertens partem C S, in puncto p, duabus tertiis arcus C S à centro C remoto, collecta censeri potest; & propter æqualitatem linearum C N, C S, ideoque partium C P ac C p, tota vis magnetica tam attractiva quam repulsiva acum convertens puncto P applicata censeri potest.

Si magnes M ab acu infinitè distaret, pari ratiocinio ostenderetur vim totam quâ con-

terræ quam vis gravitatis, & in recessu à magnete decrescit in ratione distantiæ non duplicatâ, sed ferè triplicatâ, quantùm ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui.

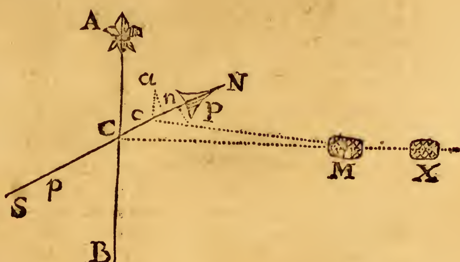
PRO-

convertit acum in puncto P esse collectam & per resolutionem virium, vim quâ convertit acum, esse ad vim totam ejus magnetis M ut sinus anguli NCM (deviationis nempe acus à magnete) ad Radium.

Hinc in casu, in quo acus quiescit, vis magnetica terræ convertens acum est æqualis vi magnetis convertenti acum, siquidem manet acus in æquilibrio in situ NSC, cum ergo sit vis magnetica terræ tota, ad vim magneticam terræ convertentem acum ut Radius ad sinum declinationis acus à meridiano magnetico; & sit vis magnetis convertens acum (æqualis illi vi magneticæ terræ convertenti acum) ad vim totam magnetis ut sinus deviationis acus à magnete ad Radium; ex æquo & per compositionem rationum habebitur vis tota magnetica terræ ad vim totam magnetis M ut sinus deviationis acus à magnete, ad sinum declinationis acus à meridiano magnetico, quod etiam per compositionem virium demonstrari potuisset.

Itaque si idem magnes ad aliam distantiam ponatur, ut in X, ita ut in alio situ acum constituat, habebitur etiam vis magnetis in X, ad vim totam magneticam terræ, ut sinus declinationis acus à meridiano magnetico ad sinum deviationis acus à magnete. Quare per compositionem rationum erit vis magnetis in X, ad vim magnetis in M, ut sinus declinationis acûs à meridiano magnetico cum magnes est in X divisus per sinum deviationis ab eo magnete in X posito, ad sinum declinationis acus à meridiano magnetico cum magnes est in M divisum per sinum deviationis à magnete, in M posito, hoc est, vis magnetis in diversis distantiis, (infinitis, respectu magnitudinis acus) est ut sinus declinationis acus à magnetico meridiano divisus per sinum deviationis ejus à magnete.

Equidem quando magnes satis est vicinus ab acu ut diversa censeri possit ejus distantia à diversis punctis acus, & fortior sit ejus vis in puncta viciniora quam in



remotiora, simulque actio magnetis ad diversa puncta acus diversa cum obliquitate applicetur, centrum actionis vis magnetis fiet vicinius extremitati N, attamen ob figuram vulgarem acus magneticæ quæ spiculi instar formata circa punctum P latior est, centrum rotationis acus in puncto P manere censeri potest nisi nimia sit magnetis vicinia. 66.

Ideoque distantia magnetis ab acu & angulus deviationis acus à magnete determinabuntur ducendo lineam à centro magnetis ad id punctum P atque his Principiis per experimenta mox recensenda vires magnetum in diversis distantiis positorum fuerunt æstimatæ.

In his experimentis adhibita fuit acus magnetica trium pollicum; quæ ut solet, attingebat utrâque extremitate circulum divisum in suos gradus, ductaque linea perpendiculari in centrum acus cùm sponte in meridiano magnetico jacebat, applicabatur magnes Parallelepipedon super eam lineam ita ut ejus facies Polares perpendiculares essent ei lineæ, Polusque ejus meridionalis acum spectaret, Borealemque ejus extremum ad se traheret, mensurabantur distantiæ à centro acus ad centrum magnetis in Pollicibus lineisque Parisiensibus, & observabatur quantùm in singulis magnetis distantiis discederet acus à meridiano magnetico, tum, primò graphicè, postea calculo Trigonometrico, distantia centri magnetis, à centro Rota-

De Mundi Systemate.

66. tionis acus, ut & angulus ejus lineæ cum acu, determinabantur; diviso itaque sinu declinationis acus per sinum istius anguli Quotiens exprimit Rationem vis magneticæ in distantia singula inventa, sive Logarithmis utendo, Differentia Logarithmorum Sinuum angulorum deviationis à meridiano magnetico & à magnete erit Logarithmus vis magneticæ, in distantia in quâ anguli illi habentur, & tertia pars ejus differentiæ erit Logarithmus Radicis cubicæ vis magneticæ, & assumptis iis Radicibus cubicis in numeris, si per eas dividatur numerus aliquis constans (qui hic est $57\frac{3}{4}$) Quotientes erunt ipsæ distantiæ; Unde liquet quod Radices cubicæ virium magnetis sunt inversè ut distantiæ sive quod vis magnetica sit inversè in ratione triplicatâ distantiarum: sequenti verò tabellâ exhibentur hæc experimenta magnâ curâ instituta, cum calculo inde deducto; Prima columna designat distantias à Centro acus ad Centrum magnetis; Secunda columna designat distantiam à Centro rotationis acus ad centrum magnetis; Tertia declinationem acus à meridiano magnetico cum suo Logarithmo & tertiâ ejus parte; Quarta, declinationem acus à lineâ ductâ à centro rotationis acus ad centrum magnetis cum suo Logarithmo & tertiâ parte; Quinta, differentias earum tertiarum partium, cum suis numeris qui rationem exprimunt Radicum cubicarum virium magnetis in diversis distantiis; Sexta denique Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per istos numeros divisi, qui Quotientes ipsas distantias quamproximè æquant.

Distantia à Centr. magn. ad Centrum acus.	Distantia à Centr. magn. ad Cent. rotat. acus.	Declin. à merid. magnetico cum Logar. & ejus tertiâ parte observata.	Declin. à magnete cum Logarith. & ejus tert. parte.	Differentia tertiar. part. Logar. cum suis numeris.	Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per numer. qui Radic. Cubic. virium magneticarum exhibent divisi.
51.46 - - -	40 - -	75d.	19d. 27		
		9.9849438	9.5224235	0.1541734	
		3.3283146	3.1741412	n. 1.426 - -	40.4
60.16 - - -	50 - -	61	35. 41		
		9.9418193	9.7658957	0.2586412	
		3.3139398	3.2552986	n. 1.144 - -	50.4
67.49 - - -	60 - -	44d. 30.′	53d. 42′		
		9.8456618	9.9062964	—1.9797885	
		3.2818873	3.3020988	n. 0.9545 - -	60.5
83 - - -	80 - -	21	77°. 6′		
		9.5543292	9.9888982	—1.8541437	
		3.1837764	3.3296327	n. 0.7147 - -	80.8
101 - - -	100 - -	11d.	85d. 46′		
		9.2805988	9.9988135	—1.7605951	
		3.0935329	3.3329378	n. 0.5762 - -	100.2
120.7 - - -	120 - -	6. 20′	89′ 22′		
		9.0426249	9.9999735	—1.6809838	
		3.0143083	3.3333245	n. 0.4797 - -	120.3
150.2 - - -	150 - -	3. 20	91. 15		
		8.7645111	9.9998966	—1.5882049	
		2.9215037	3.3332988	n. 0.3874 - -	149.
160.1 - - -	160 - -	2d. 40′	91d. 38′		
		8.6676893	9.9998235	—1.5559553	
		2.8892298	3.3332745	n. 0.3597 - -	160.5

Eodem

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à centro planetæ. Et inde consequens est (per prop. LXIX. lib. I. & ejus corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cum planetæ cujusvis A partes omnes graves sint in planetam quemvis B, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius; & actioni omni reactio (per motûs legem tertiam) æqualis sit; planeta B in partes omnes planetæ A vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. I. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus (c) in attractionibus magneticis & electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res

Eodem modo experimenta instituta sunt linea à centro magnetis ad centrum acus angulum 45 graduum cum meridiano magnetico constituente.

Repetita fuere ea experimenta cum duobus diversis magnetibus, & vires quidem diversæ sunt repertæ sed decrescere secundum eamdem distantiarum rationem deprehensæ sunt.

Repetita fuere cum magnetibus iisdem & armatis & armatura spoliatis & quod omninò observabile est, idem magnes eamdem declinationem acus magneticæ produxit sive armatus foret sive non armatus, in eadem nempe centri magnetis à centro acus distantia ac directione; Quod quidem Paradoxon videbitur cum vis quâ magnes armatus ferrum sustinet, multum differat à vi quâ idem magnes non armatus ferrum trahit. Idem tamen Phænomenon in utroque magnete deprehendi in quâlibet distantiâ ac directione ita ut cum tutius mensurarentur distantiæ centri acus & centri magnetis, magnete non armato sum usus in experimentis præcedentibus, ex quibus satis probari credo; *In recessu à magnete vim magneticam decrescere in ratione ferè triplicatâ quantum saltem crassis illis observationibus animadverti potest.*

(c) * *In attractionibus magneticis & electricis*, ubi ut plurimùm quò majùs est attrahens, eò cæteris paribus, major est attractio.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Res ([d]) intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. ([e]) Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hâc lege gravitare deberent in se mutuò, cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in terram totam ut sunt hæc corpora ad terram totam, longè minor est quàm quæ sentiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à particulis. Patet per corol. 3. prop. LXXIV. lib.

PRO-

66. (d) * *Res intelligetur in gravitate.* Vires quæ sunt ut materia in omnium formarum corporibus atque ideò non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus universis singulisque corporum partibus & esse proportionales quantitati materiæ, hinc vis corporis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Si itaque concipiamus Jovem & Satellites ejus ad se invicem accedere ut globum unicum componant, pergent singuli sese mutuò trahere, & viceversâ si corpus Jovis resolveretur in globos plures, hi quoque globi satellitum instar sese mutuò traherent.

67. Globi cujusque vis absoluta est ut quantitas materiæ in eodem globo; vis autem motrix quâ globus unusquisque trahitur in alterum & quæ ponderis nomine vulgò designatur, est ut contentum sub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum distantiæ inter centra (per cor. 4. prop. 76. lib. 1.) & huic vi proportionalis est quantitas motûs quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum (def. 8. lib. 1.) vis autem acceleratrix quâ globus unusquisque pro ratione materiæ suæ attrahitur in alterum est ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum distantiæ inter centra (per cor. 2. prop. 76. lib. 1.) & huic vi proportionalis est velocitas quâ globus attractus dato tempore movebitur in alterum (def. 7. lib. 1.). Hinc coporum cælestium motus inter se possunt facile determinari. Quia verò respectu terræ totius exigua admodum sunt corpora terrestria, patet minimam quoque esse mutuam horum corporum attractionem respectu attractionis in terram totam. Sic sphæra terræ homogenea diametroque pedis unius descripta minus trahet corpusculum juxtà superficiem suam quam terra juxtà suam in ratione diametri sphæræ ad diametrum terræ (prop. 72. lib. 1.) hoc est in ratione 1 ad 39231566 sive 1 ad 40000000 circiter, quæ tantilla vis sentiri non potest.

(e) * *Si quis objiciat* &c. Majora etiam quæ in terrâ concipi possunt corpora haud magnos effectus producent. Sit enim EMNK, tellus cujus centrum C, eaque ponatur sphærica & homogenea. Sit corpus ubicumque putà in loco B, sublato omni impedimento, ad telluris superficiem perpendiculariter dirigeretur per rectam BEC; in ipsâ telluris superficie addatur sphæra T, telluri homogenea triumque milliarium sive Leucæ unius marinæ diametro descripta quam tangat recta BEC; designet EC vim gravitatis in ipsa superficie terræ & designabit TB gravitatem in ipsa superficie sphæræ T (prop. 72. lib. 1.) gravitas in E, in tellurem erit ad gravitatem in B in eandem, ut BC^2 ad EC^2 (prop. 74. lib. 1.). Quare ponendo

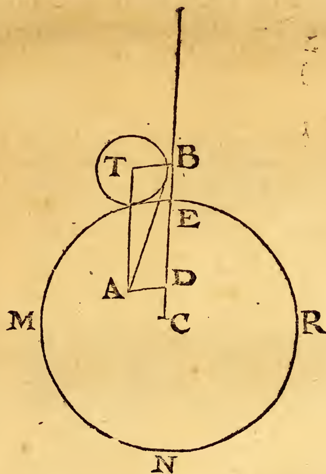
LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique in regionibus, quæ à centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiæ inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciprocè proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compositâ, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio, quæ in majoribus distantiis accuratè obtineret, prope superficiem planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret.

do BC^2 ad EC^2 ut EC ad BD, recta BD exibebit gravitatem in terram in loco B, ac proinde completo rectangulo TBAD, gravitatis directio erit per diagonalem BA (41. lib. 1.). Jam in triangulo rectangulo BAD, est BD ad AD ut radius ad tangentem anguli DBA. Quia verò telluris semidiameter mediocris est fere 1145 Leucarum Marinarum (quarum nempe viginti gradum complent, uno marino milliari singulo gradus minuto respondenti) poni etiam potest recta BD æqualis EC, ideoque erit ad TB, sive BD ad AD ut 2290 ad 1, unde prodit angulus ABD, minuti primi cum dimidio. Si itaque loco sphæræ T, intelligatur mons aliquis cujuscumque figuræ cujus attractio æquipolleat attractioni ipsiusmet sphæræ, pendulum ad radicem hujusce montis constitutum vi montis attractum deviabit à perpendiculo magis quam minuti unius primi intervallo. Hæc autem aberratio minor fiet, si pendulum in partes contrarias ab aliis montibus circumpositis trahitur, si densitas partium internarum terræ, major fit quam densitas partium montis, denique ex Piramidali montium figurâ, aliisque forte causis, hinc admodum dif-



ficile ut perturbationes illæ sensibiles fiant nisi in maximis montibus; ut etiam D. Bouguer attractionem montis Chimboraço in Peruvio sensibilem deprehendit.

De Mundi Systemate.

raret. Tandem verò, (f) per prop. LXXV. & LXXVI. libri primi & ipsarum corollaria, intellexi veritatem propositionis de quâ hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium sunt (per corol. 2. prop. IV. lib. 1.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad superficies planetarum, aliasve quasvis à centro distantias, majora sunt vel minora (per hanc propositionem) in duplicatâ ratione distantiarum inversâ. Sic ex temporibus periodicis veneris circum solem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, satellitis extimi circumjovialis circum jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, satellitis Hugeniani circum saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & lunæ circum terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum distantiâ mediocri veneris à sole & cum elongationibus maximis heliocentricis satellitis extimi circumjovialis à centro jovis $8'. 16''$. satellitis Hugeniani à centro saturni $3'. 4''$. & lunæ à centro terræ $10'. 33''$. (g) computum ineundo inveni quod corporum

68.

(f) * *Per prop. 75. & 76. lib. 1.* Ex singularum particularum viribus componitur vis planetæ totius (cor. 1. prop. 7.) & gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à particulis (per cor. 2. prop. ejusdem). Hinc vis planetæ totius decrescit in duplicatâ ratione distantiarum à centro, modò tamen planetæ ex uniformi materiâ constare ponantur (prop. 75. lib. 1.) & hujusmodi planetæ duo se mutuò trahent vi decrescente in duplicatâ ratione distantiæ inter centra (per corollaria ejusdem prop.). Quamvis autem planetæ in progressu à centro ad circumferentiam non sint uniformes, obtinebit idem decrementum in ratione duplicatâ distantiæ (prop. 76. lib. 1.) si secundùm quamcumque Legem crescat vel decrescat densitas in progressu à centro ad circumferentiam, & similiter hujusmodi planetæ duo sese invicem trahent viribus in ratione duplicatâ distantiarum inter centra decrescentibus.

(g) 68. * *Computum ineundo*, * ut hæc omnia ad Algebrica signa revocentur; sit S centrum Solis, V centrum Veneris, P centrum alterius Planetæ Primarii, L satelles in maximâ suâ elongatione heliocentricâ quam metitur angulus LSP, unde angulus SLP est rectus. Dicatur tempus Periodicum Veneris t; tempus Periodicum satellitis L circa primarium P dicatur θ.
Distantia SP qualiscumque sit dicatur z;
Ratio SP ad SV quæ datur per Phænom. IV. exprimatur per rationem a ad b, inde erit $SV=\frac{bz}{a}$;
& Radio existente 1 sinus elongationis maximæ heliocentricæ satellitis L, sive sinus anguli LSP dicatur e;
Hinc in Triangulo SLP Rectangulo, erit sinus

porum æqualium & à centro ſolis, jovis, ſaturni ac terræ æqualiter diſtantium pondera ſint in ſolem, jovem, ſaturnum ac terram

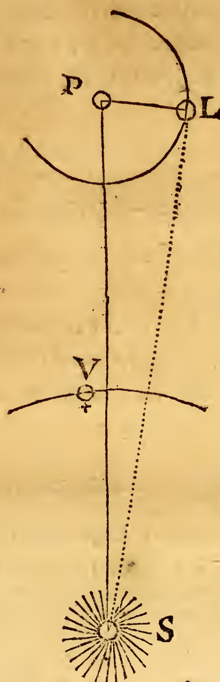
LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.

ſinus totus anguli SLP (1) ad ſinum anguli LSP (e) ut latus SP (z) ad latus PL quod erit ergo ez;

Quoniam vis Solis in venerem & vis Primarii in ſatellitem, ſunt per Cor. 2. Prop. IV. Lib. 1. ut Diſtantiæ Veneris & Satellitis à Centro Solis & Primarii diviſæ per quadrata temporum Periodicorum, ſive ut $\frac{bz}{att}$ ad $\frac{ez}{\theta\theta}$, ſive, ſi vis Solis dicatur 1, erit vis Primarii $\frac{aett}{b\theta\theta}$.

Sed vis Primarii in ſatellitem in diſtantia PL, eſt ad vim quâ in ipſum ageret ſi tantumdem diſtaret quantùm diſtat Venus à Sole, inversè ut quadrata diſtantiarum, fiat ergo $\frac{1}{e^2z^2}$ ad $\frac{a^2}{b^2z^2}$ ut $\frac{aett}{b\theta\theta}$ ad $\frac{a^3e^3}{b^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$ & habebitur tandem quod vis Solis in venerem eſt ad vim Primarii P in ſatellitem, ſi tantumdem diſtaret ab ipſo quantum diſtat Venus à Sole ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$.

Jam verò transferantur Venus & Satelles in alia quâcumque diſtantiâ ſed ita ut ambo iterum æqualiter diſtent à Corpore ſuo Centrali; Vires quidem Centralium corporum in ipſos mutabuntur, ſed eodem modo utrinque mutabuntur; unde manebunt in eâdem ratione ac priùs, nam erit ut quadratum novæ diſtantiæ ad quadratum prioris diſtantiæ, ut vis prior Solis in Venerem ad vim novam; & in eadem ratione erit vis prior Primarii in ſatellitem ad ejuſdem vim novam unde alternando, vis Prior Solis in Venerem eſt ad vim Ptiorem Primarii in ſatellitem, ut vis nova Solis in venerem ad vim novam primarii in Satellitem, ergo in qualicumque diſtantia, ſi modo æqualiter diſtent Venus & Satelles à ſuo Corpore Centrali vis Solis erit ad vim Primarii ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$.



Denique, cum pondera Corporum ſint ut Vires Centrales & quantitates materiæ quæ per eas Vires urgentur conjunctim, & in hoc Corollario Newtonus ſupponat *Corpora æqualia & æqualiter à Corporibus centralibus diſtantia* Pondera talium Corporum erunt ut Vires Centrales ideoque Pondus in Solem erit ad Pondus in Primarium qualemcumque ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3}\times\frac{tt}{\theta}$.

Computus per Logarithmos commodè initur, exempli gratia ſit P centrum Jovis, & L hujus extimus ſatelles, eſt b ad a ut 72333 ad 520096 quorum Logarithmi ſunt 4.8593365 & 5.7160855; eſt e ſinus anguli 8′ 16″ cujus Logarithmus eſt

DE MUNDI SYSTEMATE. terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, $\frac{1}{169282}$ (h) respectivè, & auctis vel diminutis distantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium corporum in solem, jovem, saturnum ac terram in distantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideò in eorum superficiebus, (i) erunt ut 10000, 943, 529, & 435 respectivè. Quanta sint pondera corporum in superficie lunæ dicetur in sequentibus.

Corol.

-3.3810609 (Radio existente 1) hinc Logarithmus $\frac{ae}{b} = -2.2378099$, & Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3}$ hujus triplus est -6.7134297.

Præterea Logarithmus t (sive 224^d. horar. $16\frac{3}{4}$, hoc est, horarum $5392\frac{3}{4}$) est 3.7318103, Logarithmus θ (sive 16^d. $16\frac{8}{15}$ horar., hoc est, horarum $400\frac{8}{15}$ est 2.6026384 ideoque Log. $\frac{t}{\theta}$ est 1.1291719 & Log. $\frac{tt}{\theta\theta}$ hujus duplus est 2.2583438.

Unde tandem Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ est -4.4717735, quæ fractio in Decimalibus potuisset exprimi, sed eam Newtonus exprimit unitate divisâ per Denominatorem quemdam, cujus Logarithmus obtinebitur hunc Logarithmum -4.9717735 ex Logarithmo unitatis nempe 0. tollendo, erit ideo 3.0282265 cujus Logarithmi numerus est 1067 ut eum Newtonus invenit.

(h) * *Respectivè &c.* * In præcedentibus Editionibus (ante Londinensem) indicabat Newtonus hic loci elementa ex quibus rationes verarum Diametrorum Jovis, Saturni & Terræ determinaverit, quæ quidem elementa, ex novis observationibus, quibusdam minutiis immutavit, illa hæc esse nobis videntur.

Primò, Diametrum Solis ex mediocri Terræ distantiâ visam, 32′ 8″ assumit, qualem etiam Cassinus in novissimis Astronomicis Tabulis eam constituit, cum prius 32. 12″ statueretur; tum Diametrum Jovis in mediocri ejus à Tellure distantia 37″ facit qualem eam prodiisse sub finem primi Phænomeni dicit, cum prius fieret 40″. Ex his, cùm distantia mediocris Solis (sive Telluris n. 53.) à Jove sit ad mediocrem distantiam Solis à Terrâ ut 520096 ad 100000 (per Phænom. IV.) & Diametri veræ Sphærarum sub parvis angulis visarum sint directè ut anguli sub quibus videntur & ut Distantiæ ex quibus spectantur erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Jovis ut 1928″×100000 ad 37″×520096 sive 10.000 ad 997. ut calculo invenitur.

Secundò, Diametrum Saturni in mediocri ejus à Sole sive Tellure distantia assumit 16″, quem 22″ in prioribus Edit. faciebat, inde cum distantia ejus mediocris à Sole, sive Tellure, sit ad mediocrem distantiam Solis à terrâ ut 954006 (Phæn. IV.) ad 100000 erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Saturni ut 1928″×100000 ad 16″×954006, sive 10000 ad 791.

Denique Parallaxim Solis, in distantia ejus mediocri 10″ 30‴ constituit, Parallaxis verò Solis est ipsa semi-Diameter Terræ è Sole visa, ergo Diametri veræ Solis & Terræ, sunt ut Diameter Solis apparens ad duplum Parallaxeos Solis, hoc est, 1928, ad 21, sive ut 10000 ad 109 proximè.

(i) * *Erunt ut*; * Ut insistere pergamus ei Analysi quâ Newtonus usus esse videtur, assumptis omnibus ut in Nota 68.

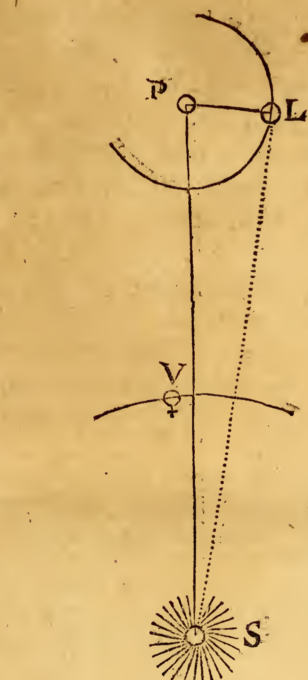
Tangens semi-Diametri apparentis Solis dicatur s; Radio existente 1.

Sinus Parallaxeos Solis (quæ est semi-Diameter primarii P è Sole visi) dicatur p.

Vera semi-Diameter Primarii dicatur d.

Erit ex natura Parallaxeωn p ad 1 sicut d ad

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in planetis singulis. Nam quantitates materiæ in planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris, id est, in sole, jove, LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.



d ad PS quæ dicebatur z quæque ideo dicenda erit $\frac{d}{p}$.

Pariter sicut 1 ad s, distantia z sive $\frac{d}{p}$ ad semidiametrum veram Solis quæ erit $\frac{sd}{p}$.

Rursus Parallaxis satellitis L dicatur q. Ex naturâ Parallaxeωn erit q ad 1 ut d ad PL, quæ ideo erit $\frac{d}{q}$ & numerus semi-Diametrorum Primarii P in ea linea PL contentus erit $\frac{1}{q}$, & cum singula semi-Diameter è Sole spectata, videatur sub angulo cujus sinus est p, propter istorum sinuum parvitatem, anguli erunt ut sinus, & sinus elongationis heliocentricæ qui dicebatur e continebit sinum p, numero vicium qui dici poterit $\frac{1}{q}$ ideoque erit $e = \frac{p}{q}$.

Si autem fingatur Corpus in Solis superficie positum, quod itaque ab ejus Centro distet quantitate æquali ejus veræ semi-Diametro $\frac{sd}{p}$, vis Solis in id Corpus, erit ad vim P in corpus æquale ad eamdem distantiam à Centro ejus Primarii positi ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ per not. 68, sive substitutione factâ $\frac{p^3}{q^3}$ loco e^3, ut $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

Sed hæc vis Primarii in id corpus, erit ad vim ejusdem corporis in superficie Primarii positi inversè ut Quadrata distantiarum sive inversè ut Quadrata Diametrorum verarum Solis & Primarii sive erit $\frac{p^2}{s^2d^2}$ ad $\frac{1}{d^2}$ sicut $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ ad $\frac{a^3ps^2}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ quæ quantitas exprimet vim Primarii in corpus in suâ superficie positum, dum vis Solis in Corpus æquale in suâ superficie etiam positum erit 1: Quæ quantitas $\frac{a^3ps^2}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ est æqualis quantitati $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (quæ vim in æqualibus distantiis exprimit) divisæ per $\frac{p^2}{s^2}$. Sed ob æqualitatem corporum vires in Corpora sunt ut Pondera Corporum; hinc ergo habetur ratio Ponderis Corporum æqualium in superficiebus Solis, Jovis, Saturni ac Terræ.

Quare si Logarithmis utamur; Ex Logarithmo p tollatur Logarithmus s, & residui duplum tollatur ex Logarithmo numeri

De Mundi Systemate.

jove, saturno ac terrâ sunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ respectivè. Si parallaxis solis statuatur major vel minor quam 10″ 30‴, (k) debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in sphæras homogeneas sunt in superficiebus sphærarum ut sphærarum diametri, per prop. LXXII. lib. I. ideoque sphærarum heterogenearum densitates (l) sunt ut pondera illa applicata ad sphærarum diametros. Erant autem veræ solis, jovis, saturni ac terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109, & pondera in eosdem ut 10000, 943, 529 & 435 respectivè, & propterea densitates sunt ut 100, $94\frac{1}{2}$, 67 & 400. (m) Densitas terræ

68. meri qui exprimebat vim Primarii in æqualibus distantiis, residuum erit Logarithmus vis Primarii in Corpora in ejus superficie posita.

Calculus iste respectu Terræ commodè fieri potest, quia datur ex observatione Parallaxis Solis p, & apparens Solis semidiameter: In Jove & Saturno Parallaxis ipsorum est æqualis eorum semidiametro apparenti in mediocri ipsorum distantiâ, & semidiameter apparens Solis in ipsis est ad semidiametrum Solis apparentem in terrâ, inversè ut distantiæ eorum & Terræ à Sole.

(k) *Debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ* Parallaxeων *ratione.* * Nam cum quantitates materiæ in Planetis singulis, sint ut eorum vires in æqualibus distantiis; Quantitas materiæ in Sole est ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, manente ergo ratione a ad b distantiarum nempe Terræ & Veneris à Sole, manentibus temporibus Periodicis Veneris & Lunæ t & θ, & sinu Parallaxeos Lunæ q, liquet quod si varietur sinus Parallaxeos Solis p & ex novis observationibus, putà ex observatione transitus Veneris super discum Solis, alia Parallaxis cujus sinus sit π deprehendatur, eo casu invenietur quantitas materiæ in Sole ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 \pi^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, itaque quantitas materiæ terræ in præcedenti Hypothesi Parallaxeos p reperta, erit ad eam quæ tunc invenietur ut p^3 ad π^3 sive (ob exiguitatem angulorum Parallacticorum) ut cubi Parallaxeων.

(l) * *Sunt ut pondera illa.* Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in sphæras homogeneas & inæquales sunt in superficiebus sphærarum ut sphærarum diametri (loco cit.), & pondera corporum æqualium & homogeneorum in sphæras heterogeneas & æquales in superficiebus sphærarum sunt ut quantitates materiæ in sphæris, hoc est, ut densitates sphærarum (2. lib. 1.). Undè pondera corporum æqualium & homogeneorum in sphæras heterogeneas & inæquales in superficiebus sphærarum sunt in ratione composita ex ratione densitatum & diametrorum sphærarum, consequenter densitates sphærarum sunt pondera illa directè & sphærarum diametri inversè.

(m) * *Densitas terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi Solis* &c. * Ratio Ponderum in ipsis superficiebus Solis & Terræ exprimebatur numeris 1 ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (denominationibus iisdem

terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi solis, sed determinatur per parallaxin lunæ, & propterea hic rectè definitur. Est igitur sol paulò densior quam jupiter, & jupiter quam saturnus, & terra quadruplo densior quam sol. Nam per ingentem suum calorem sol rarescit. Luna vero densior est quam terra, ut in sequentibus patebit.

LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.

Corol. 4. Densiores igitur sunt planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic (n) enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & densiores sunt planetæ, cæteris paribus, qui sunt soli propiores; ut jupiter saturno, & terra jove; In diversis utique distantiis à sole collocandi erant planetæ ut quilibet pro gradu densitatis calore solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si terra locaretur in orbe saturni, rigesceret, si in orbe mercurii in vapores statim abiret. Nam lux solis, cui calor proportionalis est, (o) septuplo densior est in orbe mercurii quam apud nos: & thermometro

dem adhibitis quæ in Notis (g) & (i) assignantur. Densitates verò sunt ut illa pondera applicata ad sphærarum Diametros vel semi-Diametros; semi-Diameter vera Solis erat $\frac{sd}{p}$, & semi-Diameter vera terræ erat d; Quare densitates Solis & terræ erant ut $\frac{1}{\frac{sd}{p}}$ ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2 d} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ sive ut 1 ad $\frac{a^3 s^3}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, in quâ quantitate Parallaxis Solis quæ dubia est non amplius adhibetur, sed tantum quantitates de quibus constat apud Astronomos, Parallaxis nempe Lunæ, semi-diameter apparens mediocris Solis, Ratio distantiarum terræ & Veneris à Sole, & ratio temporum Periodicorum Veneris & Lunæ, quare ea *Densitas terræ hic rectè definitur.*

(n) * *Sic enim vis gravitatis.* Quoniam sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera in earum superficiebus ad sphærarum diametros applicata, ideóque pondera ut densitates & sphærarum diametri conjunctim, si densiores sint planetæ qui sunt minores, minor diameter in variis planetis per majorem densitatem quâdam ex parte compensabitur ac proindè vis gravitatis in variorum planetarum superficiebus ad æqualitatem magis accedet quam si planetæ omnes vel densitate æquales forent, vel planetæ majores forent minoribus densiores.

(o) * *Septuplo densior est.* Nam (14. lib. 1.) densitas lucis decrescit in ratione duplicatâ distantiarum à Sole, sed (phæn. 4.) distantia terræ est ad distantiam Mercurii ut 1000 ad 387 proximè. Est igitur densitas lucis in Mercurii ad densitatem lucis in terrâ ut 1000000 ad 149769 seu ut 6,68 ad 1, hoc est ferè ut 7 ad 1.

* Addit Newtonus *Thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit*, hæc videntur referri ad n. 270 Transactionum Philosophicarum qui continet scalam de caloris gradibus, ingeniosè sane constructam, cujus author non indicatur: «Constructa fuit hæc Ta«bula ope Thermometri & ferri canden«dentis; Per Thermometrum ex oleo lini «constructum inveni (inquit author) quod «si oleum ubi Thermometer in nive liques«cente

68.

De Mundi Systemate. metro expertus sum quod septuplo solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium vero non est quin materia mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hâc nostrâ; cum materia omnis densior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PRO-

68. «cente locabatur (computus enim in hæc «Tabula inchoatur à calore quo aqua in«cipit rigescere tanquam ab infimo calo«ris gradu seu communi termino caloris «& frigoris) occupabat spatium partium «10000 idem oleum calore corporis hu«mani rarefactum occupabat spatium «10256 & calore aquæ jamjam ebullire in«cipientis spatium 10705 & calore aquæ «vehementer ebullientis 10725, & calore «stanni liquefacti ubi incipit rigescere «11516 &c.; Rarefactio aëris æquali calo«re fuit decuplo major quam rarefa«ctio olei quasi quindecim vicibus major «quam rarefactio spiritus vini. Et ex his «inventis ponendo calores olei ipsius ra«refactioni proportionales & pro calore «corporis humani scribendo partes 12 pro«dit calor aquæ ubi vehementer ebullit «partium 34». In eâdem autem Tabulâ ponendo calorem corporis humani 12, ponit calorem aeris æstivi 4, 5, vel 6. Quare medium assumendo, est ut quinque ad 34 sive proxime ut 1 ad 7, ita calor aeris æstivi ad calorem aquæ ebullientis: qui ergo septuplus est caloris aeris æstivi secundum assertum Newtonianum.

Disputari autem posset, quod calor rarefactioni olei proportionalis supponatur absque sufficienti ratione, & quod terminus à quo rarefactio ea numerari incipit (is nempe gradus frigoris quo aqua incipit rigescere) sit ad arbitrium assumptus; cum ea rarefactio numerari debuisset ab absoluto frigore eo nempe frigoris gradu quo partes olei nullam ulteriorem compressionem per vim frigoris pati possent, qui gradus est ignotus; At hujus Tabellæ constructio, ingeniose demonstratur ab eodem Autore per ferri candentis refrigerationem; Locavit enim ferrum candens in vento uniformiter spirante, ut aer à ferro calefactus semper abriperetur à vento, & aër frigidus in locum ejus uniformi cum motu succederet; sic enim aëris partes æquales æqualibus temporibus calefactæ sunt & concipiebant calorem calori ferri proportionatam; Hinc si dividatur tempus refrigerii ferri in instantia æqualia, erit, ut totus calor ferri initio primi instantis, ad calorem durante eo instanti amissum, sic calor ferri initio secundi instantis ad calorem durante eo secundo instanti amissum, &c. ideóque fingatur lineam rectam duci cujus abscissæ designent tempora; ordinatæ in extremis abscissis erigantur, quæ calores ferri singulis momentis designent; differentiæ earum ordinatarum erunt iis ipsis ordinatis proportionales Geometricè, ideóque curva per earum ordinatarum vertices transiens erit Logarithmica, crescentibus ergo temporibus Arithmeticè, calor ferri Geometricè decrescit & propterea calorum eorum Geometrica ratio per Logarithmorum tabulam haberi poterit.

Quo supposito, imponebat Autor candenti ferro particulas diversorum metallorum, & aliorum corporum liquabilium, & notavit tempora refrigerii donec particulæ omnes amissâ fluiditate rigescerent & tandem calor ferri æquaretur calori corporis humani; hinc calores omnes quibus cera, bismuthum, stamnum, plumbum, Regulus stibii, eorumque variæ miscelæ liquescunt innotuere, sive eorum Geometricæ rationes, cumque calores ita inventi eamdem habuerint inter se rationem cum caloribus per Thermometrum inventis, propterea rectè assumptum fuit, rarefactiones olei ipsis caloribus esse proportionales.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo à superficiebus planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum à centro quam proximè.

Si materia planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc propositio accuratè: per prop. LXXIII. lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus planetarumè in cœlis diutissimè conservari posse.

In scholio propositionis XL. lib. II. ostensum est quod globus aquæ congelatæ, in aëre nostro liberè movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentiâ aëris amitteret motus sui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò globum terræ nostræ densiorem esse, quàm si totus ex aquâ constaret, sic colligo. Si globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quam aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent. Eaque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppositâ. Et par est ratio terræ nostræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus.

Eodem argumento (P) maculæ solares leviores sunt quàm materia lucida solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque planetarum ex aquâ, materiâ omnis gravior, quo tempore

(P) 69. *Maculæ Solares.* Si radii Solares telescopio duobus vitris instructo excipiantur, locusque circumpositus obscuretur, inversa Solis imago suprà chartam ad axem telescopii normalem pingitur & maculæ conspiciuntur quæ nunc emergere nunc evanescere observantur. Maculas illas in materiâ Solari supernatare vel saltem Soli quam proximas esse certum est. 69.

De Mundi Systemate. pore massa fluida erat, centrum petebat. Unde cum terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulò inferiùs in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius

69. Sit enim Sol in S, ex Tellure T visus sub angulo DTC 32'. Si macula orbitam aliquam HEGH extrà Solis superficiem describeret, non videretur Solis discum ingredi antequam ad E pervenisset ubi recta TED ex terrâ ducta discumque Solis tangens maculæ orbitam secat, & ductâ TGC Solem quoque tangente, per Solis superficiem tantummodò progredi videretur, quandiù describeret arcum EG qui semiperipheriâ minor est, ideóque arcus ille tempore quod semiperiodo minus est percurreretur. Sed ex observationibus notum est quamplures maculas, duas aut tres integras periodos absolvisse 27 dierum spatio atquè $13\frac{1}{2}$ dies impendisse ut à limbo occidentali Solis ad limbum orientalem pervenirent; illarum ergò macularum orbitæ vel in ipsâ superficie Solari extiterunt, vel Soli fuerunt proximè.



* Newtonus hic loci receptam opinionem sequitur maculas Solares ipsi Solari superficiei inhærere; quæ opinio his tribus argumentis nititur; 1°. Quod illæ maculæ in medio Solis disco latiores videantur quam juxta ejus limbum ubi angustissimæ apparent; & quidem hoc demonstrat maculas eas non esse Planetas rotundos, ut quidam volebant, sed esse corpora lata, non verò spissa, & à Sole non multum distare, nullomodotamen exinde probatur eas esse in ipsâ superficie Solis: 2um. Argumentum est, Quod spatium quod maculæ emetiuntur in medio disco Solis diurno spatio, sit proportionatum revolutioni ipsarum, quod majus esse debuisset si forent cis Solem, sed rursus hoc argumentum proximitatem macularum superficiei Solis, non verò earum ipsi superficiei Solis adhærentiam probat.

Denique, asserit Keillius (Lection. Ast. V.) observationibus constare maculas quæ integram revolutionem 27 dierum absolvunt tredecim cum semisse dies impendere ut à limbo Occidentali Solis ad Orientalem perveniant, unde meritò concludit quod cum dimidium tempus Periodi suæ in transcurrendo Solis disco impendant, ipsarum orbita in ipsâ superficie Solari extet; At Wolfius (Ast. n°. 413.). Quoniam, inquit, maculæ Solares tribus circiter diebus diutius post Solem latent quam Hemisphærium nobis conspicuum peragrantes consumunt, Soli quidem proximæ sunt, non ipsi tamen superficiei Solari inhærent, sed aliquam ab eâ distantiam habent.

Et quidem in Astronomorum fastis quæ in

tius in terrâ quasi quintuplo vel sextuplo major sit quàm si tota ex aquâ constaret; præsertim cùm terram quasi quadruplo densiorem esse quam jovem jam ante ostensum sit. Quare si Jupiter

in manibus venerunt, numquam deprehendi maculam per tredecim super discum Solis actu visam fuisse, nullam reducem ante decimum quintum diem observatam & quidem cum anno 1739 plurimæ maculæ Solis discum percurrerent, multasque ab ingressu ad egressum usque persequerer, nulla integros tredecim dies in disco perstare mihi visa est; Cum autem quæstio hæc tota, sit de facto, referam observationes duas quæ accuratissimè institutæ videntur, desumetur altera è Transactionibus Philosophicis Anglicanis n. 294, altera è Diario eruditorum ad annos 1676. 1677.

«15. Maii anni 1703 Septempedali Telescopio] circa Centrum Solis maculam detexit Dnus. Stannyan, eamdem observavit diebus sequentibus, & 22. Maii mane jam admodum vicinam limbo Solis eam vidit; 23a. Maii horâ sextâ matutina appulerat ad ipsum limbum Solis, angusta & tenuis, similis aristæ, & ejus distantia à limbo Solis non excedebat ipsius maculæ parvam Diametrum, Octava, Decima," Duodecimaque hora illam adhuc videbat; secunda hora ipsi circumferentiæ applicata erat nec visibilis ipsi fuisset nisi totâ die oculos in ipsam intentos habuisset; Quarta denique hora nullum ejus vestigium telescopio decem & octo pedum optimo apparebat, unde statuendum illam omninò è Sole exivisse hora 3a. post Meridiem 23æ. diei Maii.

Tertia Junii & sequentibus diebus ad observationes rediit noster, usus Telescopio decem & octo pedum, tandem die septima Junii, hora tertia pomeridiana, eamdem maculam (ut postea certior ejus factus est) Solis discum subeuntem vidit, hora quarta decem & octo pedum Telescopio Sole luccidissimo eam distinctè vidit, sed tenuem admodum & Elliptica atmosphæra cinctam, sequentibus verò diebus ex via cui institit, eamdem esse quam prius viderat agnovit, & eam est persecutus sequentibus diebus, donec tandem 18. Junii tenuis apparere incepit, die verò decima nona ab hora 5ta. matutina eam observare cæpit Telescopio decem & octo pedum ferè singulis semihoris, hora duodecima Atmosphæra & sensibili latitudine spoliatam vidit & adeo vicinam Solis limbo, ut vix inter ipsam & limbum Solis lucis radius perciperetur; hora secunda evanescebat, ita ut hora secunda cum semisse evanuisse censenda sit.

Ergo à 23. Maii horâ tertiâ pomeridianâ ad septimam Junii eâdem horâ latuit macula, per integros scilicet quindecim dies, ab eo tempore ad 19 Discum pertransivit, per duodecim nempe dies.

Altera observatio Illmi. Cassini huic omninò congrua exstat in primo Eruditorum diario anni 1677., illic exhibet Cassinus figuram maculæ quæ 30. Octobris 1676. observari cæpit, evanuit Novembris 3a. Iterum conspicua facta est quindecim post dies nempe 18a. Novembris; evanuit verò post duodecim dies, nempe horâ quartâ diei 30æ. Novembris, observationibus magnâ curâ institutis ad singulas ferè horas, postea verò 15a. Decembris hora meridiana cum semisse Telescopio 35. pedum in limbo orientali Solis visa est, ut instar lineæ obscuræ nec aliis Telescopiis observari poterat, sequentibus verò diebus facile videri potuit; hinc per quindecim dies maculas latere per duodecim dies Solis discum transcurrere liquet.

Ex quibus sequitur æqualitatem temporum occultationis & apparentiæ macularum observationibus non constare; quinimò rectius inæqualitatem eorum temporum exinde deduci. Ut quâdam quantitate à Solis disco distare maculas deducatur, & quidem cum differentia temporum eorum sit circiter dierum trium, in singulo quadrante erit horarum decem & octo, quo tempore decem gradus circa Solis centrum maculæ percurrunt; sed sinus versus decem graduum sunt 15. Centesimæ Radii, hinc tandem deducetur quod semi-Diameter Solis sit ad semi-Diame- 69.

 trum

DE MUNDI SYSTEMATE.

Jupiter paulo denſior ſit quàm aqua, hic (q) ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, (r) amitteret in medio ejuſdem denſitatis cum aëre noſtro motus ſui partem fere decimam. Verùm cum reſiſtentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ partibus $13\frac{2}{5}$ levior eſt quàm argentum vivum, minus reſiſtat in eâdem ratione; & aer, qui partibus 860 levior eſt quàm aqua, minus reſiſtat in eâdem ratione: ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit. Oſtendimus utique in ſcholio ad prop. XXII. lib. II. quod ſi aſcenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum ſupra terram, (ſ) aër ibi rarior foret quam ad ſuperficiem terræ in ratione 30 ad 0,0000000000003998, ſeu 75000000000000 ad 1 circiter. Et

69. trum circuli quem deſcribunt maculæ ut 85 ad 100 ſive ut 17 ad 20, & maculæ quindecim circiter ſemi-Diametris terræ ſupra Solis ſuperficiem emineant: Hinc idem Wolfius eas eſſe Nubes in Solis Atmoſphærâ elatas, conjectatur quæ quidem fuerat Kepleri ſententia.

(q) * *Spatio dierum triginta.* Si arcus quem Jupiter motu diurno medio circà Solem deſcribit multiplicetur per 30 & factum dividatur per ſemidiametrum apparentem Jovis in mediocri ejus diſtantiâ à terrâ, quotus erit numerus ſemidiametrorum Jovis quas intervallo 30 dierum deſcribit. Poteſt etiam idem inveniri dicendo ut tempus periodicum Jovis ad 360 gradus ità 30 dies ad arcum hoc tempore deſcriptum, hic arcus dividatur per ſemidiametrum apparentem Jovis & quotus erit numerus ſemidiametrorum quas Jupiter 30 diebus deſcribit.

(r) * *Amitteret in medio ejuſdem denſitatis.* (per ſchol. prop. 40. lib. 2. circà finem). Si diameter jovis dicatur D, V velocitas ejus ſub initio motûs, & T tempus quo velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium S quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}D$ ut denſitas jovis ad denſitatem aëris noſtri, hoc eſt, ut 860 ad 1 circiter, jupiter in aëre noſtro projectùs cum velocitate V tempore quovis alio t amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$. Quoniam igitur Jupiter intervallo 30 dier. longitudine $459\frac{D}{2}$ deſcribit, & denſitas Jovis eſt ad denſitatem aëris noſtri ut 860 ad 1 ciciter, erit $1 : 860 = \frac{8}{3}D : S = \frac{6880}{3}D$, & $459\frac{D}{2} : 30^{\text{dies}} = \frac{6880}{3}D : T = \frac{137600}{459}$. Undè ſi ponatur $t = 30$. dieb. erit $T + t = \frac{151370}{459}$, & $\frac{t}{T+t} = \frac{1377}{15137} = 0{,}09096 = \frac{1}{10}$ ferè. Cum autem Jupiter ſupponatur paulò denſior quam aqua, minorem adhuc velocitatis ſuæ partem amitteret in aëre noſtro.

(ſ) 70. * *Aër ibi rarior foret.* Si gravitas particularum aëris in omnibus à terrâ diſtantiis eadem ſit, ſintque diſtantiæ in progreſſione arithmeticâ, demonſtratum eſt (in ſchol. prop. 22. lib. 2.) denſitates fore in progreſſione geometricâ. Hinc patet in variis à terrâ diſtantiis per Logarithmicam exhiberi poſſe varias aëris denſitates. Sit enim F D B Logarithmica, ſumptis abſciſſis A C, A E, in progreſſione arithmeticâ, ordinatæ A B, C D, EF

Et (t) hinc ſtella jovis in medio ejuſdem denſitatis cum aere illo ſuperiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex reſiſtentiâ medii non amitteret motus ſui partem decimam centeſimam milleſimam. In ſpatiis utique terræ proximis, nihil invenitur quod reſiſtentiam creet præter aërem, exhalationes & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentiſſimè exhauſtis gravia intra vitrum liberrimè & ſine omni reſiſtentia ſenſibili cadunt; ipſum aurum & pluma tenuiſſima ſimul demiſſa æquali cum velocitate cadunt, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem pedum quatuor ſex vel octo ſimul incidunt in fundum, ut experien-

LIBER TERTIUS. PROP. X. THEOR. X.

E F denſitates aëris in locis A, C, E, repræſentabunt (33. lib. 2.). Quare datis altitudinibus A C, A E, & ratione $\frac{AB}{CD}$, innoteſcet ratio $\frac{AB}{EF}$. Nam (ex naturâ Logarithmicæ, per cor. 2. theor. 2. de Logarithmicâ) $AC : AE = L.\frac{AB}{CD} : L.\frac{AB}{EF}$, ideóque $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = L.\frac{AB}{EF}$.

Jam quia altitudines mercurii in barometro ſunt ut preſſiones atmoſphæræ in diverſis ab horizonte diſtantiis (prop. 20. lib. 2.). Si aëris denſitas compreſſioni ponatur proportionalis, datis altitudinibus mercurii in barometro in locis A, C, datâque altitudine A E, dabitur altitudo mercurii in barometro in loco E, ideóque nota erit denſitas aëris in E. Ut autem hæc omnia ad præſentem caſum transferamus, ſit G A H pars ſuperficiei terreſtris, altitudo mercurii in barometro in A = 30 poll. diſtantia A C = 2280 ped. Anglicis & altitudo mercurii in barometro in C = 28 poll. quemadmodum Newtonus experimento cognitum ſupponit. Sit altitudo A E = 200 milliaribus hoc eſt = 1056000 ped. Anglicis, ſi milliare ſit menſura ped. 5280, erit $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = \frac{1056000}{2280} L.\frac{30}{28}$ = 13.8750613 circiter cui Logarithmo in tabulis reſpondet numerus 75000000000000 erit ergò denſitas aëris in A, hoc eſt, in

ſuperficie terræ ad ejuſdem denſitatem in diſtantia 200 milliarum ſeu ped. 1056000 ut 75000000000000 ad 1, circiter.

(t) * *Hinc ſtella Jovis.* Denſitas Jovis eſt ad denſitatem aëris illius ſuperioris ut 860 × 75000000000000 ad 1. Hinc

1 : 860

De Mundi Systemate.

perientiâ compertum eſt. Et propterea ſi in cœlos aſcendatur aëre & exhalationibus vacuos, planetæ & cometæ ſine omni reſiſtentiâ ſenſibili per ſpatia illa diutiſſimè movebuntur.

HYPOTHESIS I.

Centrum ſyſtematis mundani quieſcere.

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui terram, alii ſolem in centro ſyſtematis quieſcere contendant. Videamus quid inde ſequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis terræ, ſolis & planetarum omnium quieſcere.

Nam centrum illud (per legum corol. IV.) vel quieſcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper progrediente, centrum mundi quoque movebitur contra hypotheſin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longè recedere à communi gravitatis centro planetarum omnium.

Nam cum (per corol. 2. prop. VIII.) materia in ſole ſit ad materiam in Jove ut 1067 ad 1, & diſtantia jovis à ſole ſit ad ſemi-

70. $1 : 860 \times 75000000000000 = \frac{8}{3} D : S = 172000000000000000 : D$, & $459 \frac{D}{2}$ eſt ad 172000000000000000, ut anni pars duodecima ſeu $\frac{1}{12}$ ad $T = \frac{860000000000000000}{1367}$, annis $= 6300000000000$ ferè. Ponatur $t = 1000000$ annis & erit pars motûs amiſſa tempore $t = \frac{t}{T+t} = \frac{1000000}{6300000000000+1000000} = \frac{1}{6300000+1} = \frac{1}{6300000}$ ferè.

ſemidiametrum ſolis in ratione paulò majore (†); incidet commune centrum gravitatis jovis & ſolis in punctum (u) paulo ſupra ſuperficiem ſolis. Eodem argumento cùm materia in ſole ſit ad materiam in ſaturno ut 3021 ad 1, & diſtantia ſaturni à ſole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulò minore: incidet commune centrum gravitatis ſaturni & ſolis in punctum (x) paulò infra ſuperficiem ſolis. (y) Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo: ſi terra & planetæ omnes ex unâ ſolis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integrâ ſolis diametro à centro ſolis diſtaret. (z) Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuò quieſcit, ſol pro vario planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longè recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum terræ, ſolis & planetarum omnium pro centro mundi habendum eſt. Nam cum terra, ſol & planetæ omnes gravitent in ſe mutuò, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motus perpetuò agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet ſoli. Cùm autem ſol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, à quo centrum ſolis quam minimè diſcedit, & à quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo ſol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

(†) * *Et diſtantia Jovis à Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo majore*, * cum ſemi-Diameter Solis è tellure viſa ſit 16′ 4″ & diſtantia Terræ à Sole ſit ad diſtantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52 circiter, ſintque auguli ſub quo idem objectum videtur è diverſis diſtantiis reciprocè ut illæ diſtantiæ fere, erit 52 : 10 = 16′ 4″ : ad ſemi-Diametrum Solis è Jove viſam, quæ itaque erit 3′. 5″ circiter, fingatur ergo Triangulum Rectangulum cujus vertex ſit in Jove & baſis ſit Solis ſemi-Diameter, angulus verticis erit 3′ 5″; Ideóque (per Tabulas Tangentium,) baſis ejus continebitur in ejus altitudine 1115 vicibus; hinc diſtantia Jovis à Sole eſt ad ſemi-Diametrum Solis, ut 1115 ad 1, ideóque in ratione paulò majore quam ratio 1067 ad 1, hoc eſt, quam ratio materiæ in Sole ad materiam in Jove. 70.

(u) * *Paulò ſuprà ſuperficiem Solis* (60. lib. 1.).

(x) * *Paulò infrà ſuperficiem Solis* (ibid.).

(y) * *Et ejuſdem calculi veſtigiis* (61. lib. 1.).

(z) * *Aliis in caſibus.* Si nempè ad diverſas Solis partes planetæ conſiſtant, centrum gravitatis modò versùs unam partem, modò versùs alteram incidit, hinc centrum gravitatis quaſi medio loco iis in caſibus poni debet, minor itaque ſit centrorum diſtantia. 71.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipsibus umbilicum habentibus in centro solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes à priori. Quoniam pondera planetarum in solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro solis; si sol quiesceret & planetæ reliqui non agerent in se mutuò, forent orbes eorum elliptici, solem in umbilico communi habentes, & areæ describerentur temporibus proportionales (per prop. I. & XI. & corol. I. prop. XIII. lib. I.) actiones autem planetarum in se mutuo perexiguæ sunt (ut possint contemni) & motus planetarum in ellipsibus circa solem mobilem minùs perturbant (per prop. LXVI. lib. I.) quam si motus isti circa solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem jovis in saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in jovem est ad gravitatem in solem (paribus distantiis) ut (a) 1 ad 1067; ideoque in conjunctione jovis & saturni, quoniam distantia saturni à jove est ad distantiam saturni à sole fere ut 4 ad 9, (b) erit gravitas saturni in jovem ad gravitatem saturni in solem ut 81 ad 16×1067 seu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis saturni in singulis planetæ hujus cum jove conjunctionibus adeo sensibilis ut ad eandem astronomi hæreant. Pro (c) vario situ planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminui-

71. 71. Quoniam Sol pro diverso planetarum situ diversimodè agitatur, motu quodam libratorio lentè semper errabit, nunquam tamen integrâ, sui diametro à centro quiescente systematis totiùs recedet. Quia verò Solis & planetarum ponderibus (per cor. 1. prop. 8.) inventis, datoque situ omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum (61. lib. 1.) patet quoque dato communi gravitatis centro haberi locum Solis ad tempus propositum.

(a) * *Ut* 1 *ad* 1067 (cor. 2. prop. 8.).

(b) * *Erit gravitas Saturni in Jovem* (prop. 8.)

(c) * *Pro vario situ planetæ.* Saturnum his perturbationibus obnoxium esse patet (per cor. 6. 7. 8. 9. prop. 66. lib. 1.).

minuitur, aphelium nunc promovetur nunc fortè retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. (d) Error tamen omnis in motu ejus circùm ſolem à tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis jovis & ſolis (per prop. LXVII. lib. I.) & propterea ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In (e) conjunctione autem jovis & ſaturni gravitates acceleratrices ſolis in ſaturnum, jovis in ſaturnum & jovis in ſolem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ ſeu 156609, ideoque differentia gravitatum ſolis in ſaturnum & jovis in ſaturnum eſt ad gravitatem jovis in ſolem ut 65 ad 156609 ſeu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima ſaturni efficacia ad perturbandum motum jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longe minor eſt quam ea ſaturnii. Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longè minores (f) præterquam quod orbis terræ ſenſibiliter perturbatur à lunâ. (g) Commune centrum gravitatis terræ & lunæ, ellipſin circum ſolem in umbilico poſitum percurrit, & radio ad ſolem ducto areas in eâdem temporibus proportionales deſcribit, terra vero circum hoc centrum commune motu menſtruo revolvitur.

LIBER TERTIUS. PROP. XIII. THEOR. XIII.

PRO-

(d) * *Error tamen omnis.* Si ad evitandum omnem ferè errorem, orbis Saturni umbilicus (per prop. 67. lib. 1.) locetur in communi centro gravitatis Jovis & Solis, Theoria Saturni juxtà hanc hypotheſim conſtituta ſatis accuratè congruit cum phænomenis, ità ut error qui ex hâc hypotheſi oritur, ubi maximus eſt, vix ſuperet minuta duo prima, & error maximus in motu medio vix minutis duobus primis annuatim major obſervetur. Hinc non parum confirmantur ea quæ de mutuâ planetarum perturbatione hactenus dicta ſunt.

(e) * *In conjunctione autem Jovis.* Quoniam in conjunctione Jovis & Saturni, diſtantia Saturni à Sole, Saturni à Jove, & Jovis à Sole ſunt inter ſe ut 9, 4 & 5, circiter, gravitatis acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem erunt ut $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{16}$ & $\frac{3021}{25}$ (per cor. 1. prop. 8.) hoc eſt, ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$.

(f) * *Præterquam quod orbis terræ.* Orbem terræ ſenſibiliter perturbari à lunâ oſtendetur deinceps ubi vis lunæ definietur.

(g) * *Commune centrum gravitatis terræ & lunæ.* (prop. 65. lib. 1.).

71

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium aphelia & nodi quiescunt.

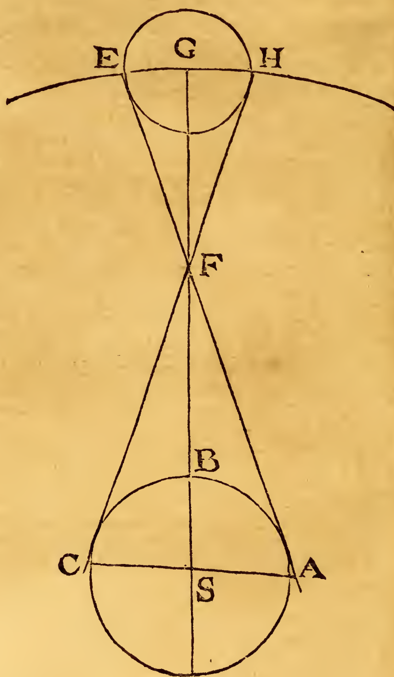
Aphelia quiescunt, per prop. xi. lib. 1. ut & orbium plana, per ejusdem libri prop. 1. & quiescentibus planis quiescunt nodi. Attamen à planetarum revolventium & (h) cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

Corol 1. Quiescunt etiam stellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque (i) cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam cor-

72. (h) * *Et cometarum actionibus.* Eodem prorsus modo quo planetæ in se invicem agunt; patet quoque cometas in alios planetas agere similesque effectus producere, sed cum observationes Astronomicæ ostendant apheliorum nodorumque motum esse tardissimum, ob parvitatem contemni possunt inæqualitates quæ ex planetarum & cometarum actionibus in se invicem oriuntur.

(i) * 72. *Cum nulla sit earum parallaxis.* In hypothesi terræ motæ, quiescentibus Sole & stellis, tellus integram revolutionem absolvit spatio 23. hor. 56'. 4". circiter & circà solem revolvitur unius anni intervallo circulumque describit qui ecliptica vel orbis annuus appellatur. Referat S solem, sit F stella fixa in Eclipticæ plano ad distantiam quamlibet constituta; Sit A B C D orbis annuus, ponaturque tellus primum in loco A deindè post sex menses perveniat ad locum C in quo distet à loco A totâ diametro orbis annui, hoc est, 20000 terræ diametris circiter, ità ut anguli F S A, F S C sint recti, stella F ex tellure A visa respondebit puncto E, quod ad distantiam infinitam à terrâ removeri supponitur. Deindè eadem stella ob motum terræ ab A versùs B, progredi videbitur ab E versùs G, donec tellure perveniente ad C stella videatur in H, distans scilicet à loco in



quo

corporum diſtantiam nullos edent ſenſibiles effectus in regione ſyſtematis noſtri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter diſperſæ contrariis attractionibus vires mutuas deſtruunt, per prop. LXX. lib. I.

quo ante ſex menſes verſabatur, toto arcu EH, cujus menſura eſt angulus EFH vel AFC. Hujus anguli ſemiſſis AFG, eſt parallaxis orbis annui ex terræ motu annuo oriunda. Dato autem angulo AFS, facilè invenitur diſtantia ſtellæ fixæ à terrâ AF, ſi fiat, ut ſinus anguli AFS, ad ſinum totum, ità AS Semidiameter orbis annui quæ eſt 10000 diametrorum terræ circiter ad AF. Jam verò patet ex telluris annuo motu oriri debere tranſlationem fixarum inter ſe parallaxi duplicatæ circiter æqualem. At ſtellæ majores & propiores reſpectu remotiorum quæ teleſcopiorum ope duntaxat conſpici poſſunt, moveri non obſervantur. Nulla eſt itaque fixarum parallaxis ſenſibilis ex terræ motu annuo oriunda, ideóque immenſa eſt fixarum à tellure diſtantia. Sivè autem terra moveatur, ſivè quieſcat, ſtellas fixas immenſis intervallis à terrâ diſtare certiſſimum eſt, nam parallaxim annuam minuto primo longe minorem eſſe conſentiunt omnes Aſtronomi. Fingamus verò annuam fixæ alicujus proximioris parallaxim eſſe uniùs minuti primi, à tellure diſtabit ſtella illa 3437 ſemi-Diametris orbitæ quam deſcribit terra ſiquidem ſinus unius minuti eſt ad Radium ut 1 ad 3437, & ſi ſemi-Diameter orbitæ ſit 20000 ſemi-Diametrorum terræ, ad minimum 68740000 terræ ipſius ſemi-Diametris diſtabit fixa à Tellure.

73. Chriſtianus Hugenius in Coſmotheoro lib. 2. aliam excogitavit methodum quâ rationem diſtantiæ fixarum ad diſtantiam Solis conjectando inveſtigaret. Supponit itaque ſirium quæ ſtella eſt inter alias fulgentiſſima, Soli circiter æqualem eſſe. Deindè tentavit quâ ratione Solis diametrum ità imminuere poſſet ut non major 73.
aut ſplendidior ſirio appareret. Quod ut aſſequeretur, tubi vacui duodecim circiter pedes longi aperturam alteram occluſit lamellâ tenuiſſimâ in cujus medio tam exiguum erat foramen ut lineæ partem duodecimam non excederet; oculoque alteri aperturæ admoto, ea videretur Solis particula cujus diameter erat ad diametrum totiùs ut 1 ad 182. Cum verò particula illa ſirio ſplendidior adhuc appareret, foramini globulum vitreum ejuſdem cum foramine diametri objecit, taliſque foci globulum ſelegit ut lux Solis ad oculum tranſmiſſa non major aut ſplendidior videretur eâ quam à ſirio emiſſam nudis oculis intuemur. Quo facto, hujus particulæ Solis diametrum invenit partem $\frac{1}{27664}$ diametri totiùs. Quarè Sol inſtar ſirii appareret, ſi conſpicua foret pars diametri totiùs Solaris tantùm $\frac{1}{27664}$, diſtantia autem Solis à terrâ in quâ tantillus videretur foret ad diſtantiam in quâ ejus diametrum apparentem intuemur ut 27664 ad 1, diviſâque apparente Solis diametro mediocri per 27664, foret diameter Solis 4‴ circiter. Hinc ſirii quoque diſtantia à terrâ eſt ad diſtantiam Solis ab eâdem ut 27664 a 1 & diameter apparens Sirii 4‴. Jam diſtantia Solis à terrâ ſi Parallaxis Solis ponatur 10″ 30‴ eſt ferè 20000 ſemid. terreſtrium, erit ergo diſtantia Sirii 553280000 ſemid. terreſtr. Si verò diſtantiam mediam Saturni à terra conſtituamus 190800 ſemid. terreſtr. prodit diſtantia inter Saturnum & Sirium 553089200 ſemid. terreſtr.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Scholium.

Cum planetæ ſoli propiores (nempe mercurius, venus, terra, & mars) ob corporum parvitatem parum agant in ſe invicem: horum aphelia & nodi quieſcent, niſi quâtenus à viribus jovis, ſaturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et ([a]) inde colligi poteſt per theoriam gravitatis, quod horum aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu fixarum, idque in propor-

74. (a) 74. * *Et indè colligi poteſt.* Deſignet S Planetam aliquem ſuperiorem puta Jovem cujus Orbita ESE; ſit T Sol, P Planeta aliquis inferior, ponaturque corporum S, P, aliorumve plurium ſyſtema revolvi circà corpus T manentibus orbium ESE & PAB formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem mutentur verò utcumque magnitudines & per theoriam gravitatis colligitur (cor. 15. & 16. prop. 66. & not. in eadem corollaria) errores angulares corporis P in quâvis revolutione genitos, ideóque & motus aphelii in quâlibet revolutione corporis P eſſe ut quadratum temporis periodici quam proximè. Si itaque numerentur illi errores, in variis Planetis P durante eodem determinato tempore, per centum v. gr. annos ut hic aſſumit Newtonus, errores integri eo tempore deſcripti erunt ut errores ſingulâ revolutione commiſſi & ut numerus revolutionum ſæculo integro peractarum, ille numerus revolutionum eſt inversè ut tempus periodicum & errores (qui ſunt, ut dictum eſt, directè ut quadratum temporis periodici) ergo errores Apheliorum durantibus centum annis erunt in ſimplici temporum periodicorum ratione. Sed tempora periodica Planetarum P ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro T (per phæn. 4.). Sunt ergò errores Planetarum inferiorum in hâc ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Solis. Quare ſi ponatur eum eſſe aphelii Martis progreſſum ut in annis centum conficiat 33′ 20″ in conſequentia reſpectu fixarum, invenietur motus aphelii aliorum planetarum qualis à Newtono definitur, dicendo ut Radix quadrata cubi diſtantiæ martis ad Radicem quadratam cubi diſtantiæ terræ à Sole, ita 33′ 20″ ad motum Aphelii terræ annis centum. Quamvis autem ex ipsâ gravitatis theoriâ colligatur planetarum inferiorum aphelia nunc promoveri nunc retrahi, medios tamen apheliorum motus notabili aliquo tempore in conſequentia fieri, patet ratiocinio ſimili illi quod de Lunâ factum eſt in nota c p. 24. hujuſce, unde facile conſtabit reverâ medium motum reſultantem poſt centum annos eſſe ut

portione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum planetarum à ſole. Ut ſi aphelium martis in annis centum conficiat 33′. 20″ in conſequentia reſpectu fixarum; aphelia terræ, veneris, & mercurii in annis centum conficient 17′. 40″, 10′. 53″, & 4′. 16″ reſpectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc propoſitione.

PRO-

ut ipſa tempora periodica, ideóque in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à Sole. Secundùm ea quæ dicuntur in cor. 16. prop. 66. lib. 1., &c. De præſenti ſcholio hæc dicta ſint. Sed prætermittenda non ſunt verba doctiſſimi Viri Joannis Bernoullii cujus authoritatem maximè veneramur. Sic ferè habet Clariſſ. Autor in Diſſertatione de Syſtemate Carteſiano quæ anno 1730. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecorata fuit, Paragrapho XLI. «((Newtonus ſupponit motum aphelii Martis in conſequentia eum eſſe ut centum annorum ſpatio 33′ 20″ conficiat. Hinc colligit per theoriam gravitatis, quod aliorum planetarum inferiorum aphelia moventur in conſequentia reſpectu fixarum, idque in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum planetarum à Sole. Nullo fundamento meráque apparentiâ nixus videtur Newtonus in conſtituendâ hâc ratione ſeſquiplicatâ. Neque enim intelligo, neque ut arbitror, plures alii me ipſo perſpicaciores intelligunt quarè mutua planetarum gravitatio, etiamſi concederetur, hanc proportionem poſtulet. Et certè hæc eadem gravitatio planè irregularem effectum & ſuæ regulæ contrarium producit reſpectu aphelii Saturni, cum Newtonus ipſe ſtatuat in conjunctione Jovis & Saturni aphelium illud nunc promoveri nunc retrahi. Numquid de ſingulis planetis inferioribus idem quoque ſtatuendum videretur. Nam ſi talis admittenda foret attractio, tellus v. gr. ubi in aphelio verſatur Jovemque reſpectu zodiaci præcedit, retraheretur, & contra promoveretur ubi Jupiter tellurem præcederet. Unde hæc gravitatio contrarios omninò effectus antè & poſt conjunctionem telluris & Jovis produceret. Sed nil tale obſervatur, idque ex ſuâ hypotheſi Newtonus minimè colligit, ſicut facere deberet.)). 74.

* Ex prædictis autem facile reſponderi poſſe videtur Viri Doctiſſimi quæſitis.

1°. Enim conceſſa Planetarum gravitatione motum Apheliorum Planetarum inferiorum ſecundum proportionem ſeſquiplicatam diſtantiarum fieri debere, Mathematicè ſequitur ex Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. ut ſupra oſtenſum eſt, illud autem Corollarium 16. tam ex Sectione nona Lib. I. quam ex ipſa Prop. LXVI. legitimè deduci, ex ipſo Newtono notiſque illis locis adjectis probatum credimus.

2°. Quod queritur V. D. eamdem gravitationem contrarium effectum regulæ ſuæ producere reſpectu Aphelii Saturni, id vitio vertendum non eſt Syſtemati Newtoniano, quin è contra egregia procul dubio eſt ejus confirmatio. Quippe eo ipſo quod Saturnus cæteris Planetis ſit exterior, ex Syſtemate Newtoniano fluit vim Solis in Saturnum agentem augeri per vim Planetarum interiorum in conjunctione, unde Aphelium ejus debet regredi per Prop. XLV. (quod in Saturno obſervari, ex ipſo Caſſino didicimus, ut ſuperius notâ c pag. 23. retulimus) dum è contra Aphelia Planetarum interiorum per vim exteriorum in conjunctione poſitorum progredi debeant.

3°. Queritur denique quod Aphelia Planetarum inferiorum nunc retrahi nunc promoveri debeant, quod tamen non obſervatur; ſcilicet Newtonus ſtatuit quidem Aphelia Planetarum inferiorum in ſyzygiis promoveri, in Quadraturis retardari, plus promoveri verò quam retardari unde in totum progredi videntur; Aphelii autem ea veluti libratio obſervabilis non

eſt;

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicatâ temporum periodicorum, per prop. xv. lib. I. (b) Deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum ſolis & planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & ſolem, per prop. LX. lib. I.

PRO-

74. eſt; etenim qui praxi Aſtronomicæ operam dant facile ſentiunt loca Apheliorum ita non determinari, ut nutatio Aphelii in ſingulis orbitæ partibus obſervatione obtineatur, imo poſt plures duntaxat revolutiones ſatis tutò Aphelii progreſſum inveniri, ipſæ Methodi ad eas obſervationes adhibitæ docent, hinc, ad obſervationes provocare non licet ut illam nutationem vel veram vel fictitiam eſſe probetur, ſiquidem obſervationes hâc de re nihil docere nos poſſunt.

Addit verò, *tellus ubi in Aphelio verſatur Jovemque reſpectu Zodiaci præcedit retraheretur, & contra promoveretur ubi Jupiter tellurem præcederet, unde gravitas contrarios effectus produceret ante & poſt conjunctionem Telluris & Jovis*; ſi in hoc exemplo agatur de motu Telluris in longum hæc revera fluunt ex gravitationis ſyſtemate, & reverâ in Lunâ inde producitur ea inæqualitas quæ *Variatio* dicitur Aſtronomis notiſſima; ſimilem inæqualitatem in terra non quidem obſervarunt Aſtronomi quia minima eſſe debet per ipſam gravitationis naturam, & cum ſeſe utrinque compenſet nullum ſui relinquit Veſtigium; Quod ſi in hoc exemplo de motu Aphelii Terræ agatur ut ex ſermonis ſerie, quis forte ſuſpicaretur, res fieri non debet ut hic indicatur, nam in tota ſyzygia Aphelium telluris progredi debere, & in quadraturâ duntaxat regredi, liquet per XLV. & LXVI. primi Libri.

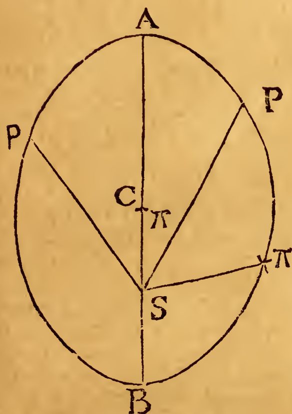
Quas quidem adnotationes eâ mente non adjungimus ut quidquam derogetur ſummæ Viri Illuſtriſſimi, apud omnes φιλομαθηματικοῖς authoritati. Sed cum Newtonus brevitate ſuâ occaſionem dederit V. Ill. dicendi, eum nullo fundamento merâque apparentiâ proportionem motus Apheliorum ſtatuiſſe, hâc notâ ipſi inuſtâ eum purgare & veritas & Commentatoris officium poſtubabant.

(b) *Deindè ſigillatim.* Jam capti ſunt orbium axes majores in ratione ſubſeſquiplicatâ temporum periodicorum, nempè nullâ habitâ ratione maſſarum, planetæ ſpectati ſunt tanquam totidem puncta in ellipſibus circà immotum in umbilico Solis centrum revolventia. Quoniam verò fit ut propter Solis & planetæ actiones mutuas, planeta ellipſim deſcribat cujus focus eſt commune gravitatis centrum planetæ & Solis, major axis ellipſeos quam planeta deſcribit circà Solem qui ipſe ſimul revolvitur circà commune centrum gravitatis, eſt ad axem majorem ellipſeos quam idem planeta circà Solem quieſcentem eodem tempore periodico deſcribere poſſet in ratione ſummæ maſſarum Solis & planetæ ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & Solem (prop. 60. lib. 1.) ideóque ut axis major orbitæ corrigatur, augendus eſt in dictâ ratione. Datur autem ratio inter maſſas Solis & planetarum, ac proindè datur ratio in quâ orbitarum axes majores ſunt augendi. Vide de his not. 64. hujus libri.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

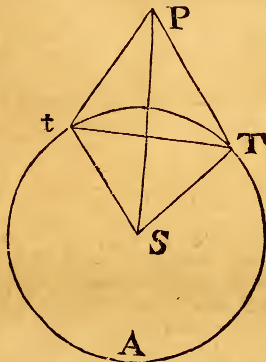
Invenire orbium eccentricitates & aphelia.

(c) Problema constit per prop. XVIII. lib. I.



(c) 75. * *Problema constit.* Sit S Sol, sintque planetæ loca tria P, p, π è Sole visa & data sit recta BA axis major ellipseos, describatur (per prop. 18. lib. 1.) ellipsis cujus umbilicus est S & axis major A B, quod fit, si ex axe B A demantur longitudines S P, S p, S π & cum residuis arcus ex punctis P, p, π describantur, intersectio horum trium arcuum erit alter focus Ellipseos quo invento orbita planetæ determinabitur, simulque dabitur distantia Solis à centro ellipseos, hoc est, excentricitas, notumque erit ellipseos punctum à Sole remotissimum, id est, aphelium.

Quia verò problema illud supponit data esse tria planetæ loca centrica, hoc est, ex Sole visa, datasque eorum à Sole distantias, hic adjungemus methodum quâ Clariss. Halleius ex dato tempore periodico, planetæ locum centricum ejusque à Sole distantias invenire docuit. Referat T t A orbitam Telluris, S Solem, sitque P planeta seu potiùs locus Planetæ ad Eclipticam reductus sivè punctum ubi perpendicularis ex planetâ in planum Eclipticæ demissa incidit. Ponatur tellus in T, observeturque planetæ longitudo 75.



geocentrica, ex datâ theoriâ Telluris, dabitur longitudo apparens Solis, ideóque dabitur angulus P T S. Post integram planetæ revolutionem, planeta rursùs erit in P, quo tempore tellus sit in t, ex eo puncto iterum observetur planeta, inveniaturque angulus P t S elongatio planetæ à Sole. Ex datis observationum momentis, dantur loca Telluris in Ecliptica è Sole visa ejusque à Sole distantiæ, ac proindè in triangulo t S T, dantur latera t S, S T & angulus t S T, quare invenientur anguli S t T, S T t & latus t T. Si itaque ab angulis datis P T S & P t S, auferantur anguli noti t T S, T t S dabuntur anguli P T t & P t T; undè in triangulo P t T ex datis angulis unà cum latere T t, innotescet P T. Deindè in triangulo P T S, dantur latera P T, T S cum angulo intercepto PTS, ideóque dabitur SP, quæ distantia planetæ à Sole curtata appellatur & notus fiet angulus TSP, ex quo dabitur

P R O-

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motus legem 1. & corol. 22. prop. LXVI. lib. 1. Jupiter utique respectu fixarum revolvitur horis 9. 56′, mars horis 24. 39′. venus horis 23. circiter, terra horis 23. 56′, sol diebus $25\frac{1}{2}$ & luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita se habere ex phænomenis manifestum est. (d) Maculæ in corpore solis ad eundem situm in disco solis redeunt diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, respectu terræ; ideoque respectu fixarum sol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam vero lunæ circa axem suum uniformiter revolventis dies menstruus est: hujus facies eadem ulteriorem

75. bitur locus planetæ heliocentricus. Est autem (ex trigon.) tangens latitudinis geocentricæ planetæ ad tangentem latitudinis heliocentricæ ut distantia planetæ à Sole curtata ad distantiam ejusdem à tellure curtatam, sed per observationem, nota est latitudo geocentrica planetæ, quare innotescet planetæ latitudo heliocentrica ex quâ simul & distantiâ à Sole curtatâ elicietur planetæ à Sole vera distantia & simili modo vera distantia Planetæ à terra, unde tandem in Triangulo cujus tria puncta sunt Sol, terra & Planeta omnia latera sunt cognita. Hâc ratione obtineri possunt varia loca centrica planetæ variæque à Sole distantiæ.

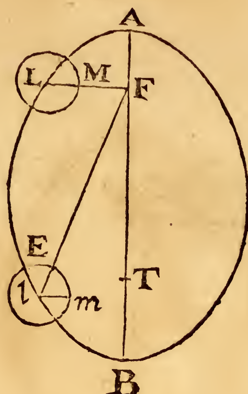
Cæterum hæc fuse variisque adhibitis methodis, explicata reperiuntur in introductione ad veram Physicam Joannis Keill, in Astronomiâ Physicâ Davidis Gregorii, & potissimum in elementis Astronomicis à Clariss. Cassino nuper editis.

(d) * *Maculæ in corpore Solis.* Cum revolutio macularum circà Solem sit admodum regularis & maculæ ipsæ vel Soli supernatent vel à Sole parum distent (69) non maculæ circà solem sed Sol ipse $25\frac{1}{2}$ dierum spatio circiter, circà proprium axem motu vertiginis movetur. Jovem, Venerem & Martem circà axem suum gyrare ex maculis quoque in horumce planetarum corporibus per vices in conspectum redeuntibus colligitur. In Mercurio autem qui Soli proximus est, ob nimium Luminis splendorem, & in Saturno ob maximam ejus à terrâ distantiam maculæ nullæ hactenus deprehendi potuerunt quibus determinaretur eorum vertigo, Attamen nil obstat quominus ex analogiæ lege colligamus Mercurium quoque & Saturnum circà axem suum gyrare. Macularum solarium theoriam elegantissimè exposuerunt Clariss. D. De-Lisle in Libro cui titulus, monumenta quæ ad Astronomiæ Physicæ & Geographiæ progressum conducunt, sæpèque laudatus D. Cassinus in Elementis Astronomicis. De maculis Veneris ejusque circà axem revolutione quædam inter Astronomos est lis; à Cassino patre 23 horis & 20′ absolvi, ex maculâ sive potius splendore quodam in disco Veneris notabili annis 1666, 1667 compertum fuerat, non ita tamen tuto, ipse enim scribebat de motu Veneris referente ipsius filio, *debiles adeò & confusas esse Veneris maculas ut earum terminos accuratè notare non liceat, unde utrum aliquis sit Veneris motus per eas determinare frustra quæritur.* Anno vero 1726. Dnus. Bianchinus maculas Veneris Lunaribus similes diu est persecutus, earumque revo-

rem umbilicum orbis ejus (e) semper respiciet quamproxime, & propterea pro situ umbilici illius deviabit hinc inde à terrâ. Hæc

LIBER TERTIUS. PROP. XVII. THEOR. XV.

revolutionem 24 diebus 8. horis absolvi deduxit, circa axem admodum obliquum Eclipticæ; in suam autem sententiam Dnum. Cassinum filium non adduxit, quia apparentiæ à Dno. Bianchino observatæ per motum 23 horarum explicari poterant, dum Parentis observationes, cum hypothesi revolutionis 24 dierum & 8. horarum consentire non possent, hinc quæstio in medio remansit non facile solvenda, maculæ enim Veneris nonnisi Cœlo purissimo observari possunt & Lutetiæ nequidem cum maximis Telescopiis videri potuisse narrat idem Ill. Cassinus filius.



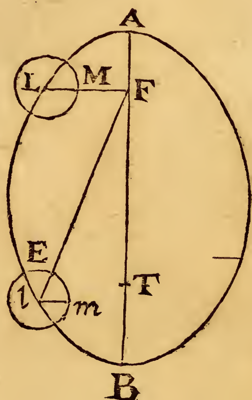
(e) 76. *Semper respiciet quamproxime.* Sit orbita lunæ ellipsis A L B A, in cujus umbilico T locatur terra, ductus ex umbilico radius vector areas ellipticas temporibus proportionales describit (prop. 1. lib. 1.); demissis autem à duobus quibusvis in ellipseos peripheriâ punctis ad alterum umbilicum F rectis L F, l F, angulus L F l erit quamproxime ad quatuor rectos sicut tempus quo arcus L l à Lunâ describitur ad integrum tempus periodicum Lunæ, si ellipsis sit parum excentrica. Jam referat L M meridiani Lunaris, hoc est, circuli per axem conversionis Lunæ planum, quod productum transeat per F, idem planum in quocumque orbitæ ellipticæ puncto locetur Luna, productum quoque per F transibit. Quoniam enim Luna circà axem suum uniformiter revolvit eodem tempore quo circà tellurem periodum suam absolvit, patet meridiani planum quod Lunâ existente in L situm L M obtinebat, dum Lunæ centrum aliud quodvis punctum l attigit, ad talem situm l E pervenisse, ut positâ l m parallelâ ad L M, angulus m l E sit ad quatuor rectos sicut tempus quo Luna arcum L l, percurrit ad integrum tempus periodicum Lunæ, ideóque (prop. 11. lib 5. elem.) angulus m l E est ad quatuor rectos sicut L F l ad quatuor rectos, ac proinde angulus m l E æqualis est angulo L F l, & ob rectas L F, l m parallelas jacebit l E in directum ipsi l F, hoc est, ubi Luna in l versatur, ejusdem meridiani planum quod in priori situ L productum etiamnum transit per F. Quare in quocumque Lunaris orbitæ puncto centrum Lunæ occurat, productum ejusdem meridiani planum transit per F.

76.

His præmissis patet eandem ferè Lunæ faciem semper ad terram converti easdemque ferè Lunares maculas observatori terrestri apparere. Cum enim productum ejusdem meridiani planum per alterum orbitæ Lunaris focum F transeat, sitque Lunaris orbita parum excentrica, hoc est, non multum distent umbilici F & T, eadem quamproxime Lunæ facies terræ obvertitur. Si verò accuratè observatis Lunaribus maculis, Lunæ facies ad terram conversa diligentiùs consideretur, non eadem præcisè facies à nobis videbitur. Quoniam enim ejusdem meridiani planum L M non ad terram T, sed ad alterum focum F dirigitur, patet Lunæ in L existentis hemisphærium è tellure T visum aliquantulum esse diversum ab illo quod videtur, dum Luna reperitur in l; nam pars hemisphærii Lunaris versus plagam B quæ anteà occultabatur fit conspicua, & contrà pars hemisphærii alterius versùs R quæ anteà apparebat oculis evanescit, motus hic Lunæ è terrâ apparens quo fit ut quædam maculæ

DE MUNDI SYSTEMATE.

Hæc eſt libratio lunæ in longitudinem: Nam (f) libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine lunæ & inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam D. (g) *N. Mercator* in aſtronomiâ ſuâ initio anni 1676 edita, ex literis



76. maculæ in partem à terrâ averſam ſe recipiant, dum aliæ ex parte aversâ in conſpectum prodeunt, libratio Lunæ in longitudinem appellatur. Librationem hanc bis in quolibet menſe periodico reſtitui manifeſtum eſt, quandò nempè Luna in apogæo A aut perigæo B verſatur; in utroque enim ſitu ejuſdem meridiani planum quod protenſum in F incidit, tranſit etiam per T. Cæterum hæc libratio omnibus inæqualitatibus obnoxia eſt quibus afficitur motus in longitudinem. (Vid. corollaria prop. 66. lib. 1.).

(f) 77. * *Libratio in latitudinem.* Quoniam axis circà quem Luna revolvitur, non eſt ad Lunarem orbitam normalis, ſed ad illam inclinatus, manifeſtum eſt Lunæ polos per vices ad terram vergere, ideóque Lunæ maculas nunc huic nunc illi polo vicinas è terrâ ſpectari. Quia verò axis Lunæ eſt ferè ad planum Eclipticæ normalis, patet hanc librationem pendere à ſitu Lunæ reſpectu nodorum orbitæ Lunaris cum eclipticâ, ſeu ab ipsâ latitudine Lunæ. Ex illâ libratione oritur ut dum Luna versùs auſtrum ab eclipticâ maximè recedit, hoc eſt, dum in limite auſtrali verſatur, Lunæ polus borealis & aliquæ ultrà polum Lunaris globi partes à Sole illuſtrentur, intereadum polus auſtralis & aliquæ citrà hunc polum regiones Lunares in tenebris immerguntur; Si ergò in hoc ſitu contingat Solem in eâdem plagâ cum limite auſtrali verſari, Luna à conjunctione cum Sole ad nodum aſcendentem, hoc eſt, versùs Boream progrediens, has regiones maculaſque polo Boreali vicinas oculis ſubducet, dum interim ab oppoſitâ plagâ aliæ cum polo auſtrali regiones è tenebris emergunt, contrariumque accidet deſcendente Lunâ novâ à limite boreali, borealiores nempè Lunæ partes paulatim in lucem è tenebris prorepent, dum auſtraliores evaneſcunt.

(g) 78. * *D. N. Mercator.* Hic tranſcribemus N. Mercatoris verba. «Harum «tamen variarum atquè implicitarum li«brationum (Lunæ ſcilicet) cauſas, hy»potheſi elegantiſſimâ explicavit nobis Vir «Cl. Iſaac. Newton cujus humanitati «hoc & aliis nominibus plurimum debere «me lubens profiteor. Hanc igitur hypo«theſim Lectori gratificaturus, exponam «verbis, ut potero, nam delineationes in «plano vix ſufficiunt huic negotio. Ita«que reverſus ad globum, cogita nunc «illum repræſentare ſphæram in quâ mo«vetur Luna cujus centrum occupet tellus; «ipſum verò Lunæ globum credito polis «& axe ſuo inſtructum circà quem re«volvatur motu æquabili ſemel menſe ſy«dereo, dum à fixâ aliquâ digreſſa ad «eandem revertitur, & æquator Lunaris «ad firmamentum continuatus intelligatur «congruere plano horizontis lignei, & po«lus æquatoris Lunaris in firmamento im«mineat polo Boreo globi ad zenith ele«vato. Orbitam verò Lunæ concipito «partim ſuprà horizontem ligneum attol«li, partim verò infrà eundem deprimi, «quemadmodum in hoc ſitu globi conſ-

«pici-

literis meis plenius exposuit. Simili motu (h) extimus saturni satelles circa axem suum revolvi videtur, eâdem sui facie saturnum perpetuò respiciens. Nam circum saturnum revolvendo,

spicitur ecliptica, licet angulus æquatoris Lunaris & ejus orbitæ non sit fortè æquè magnus atque hic quem globus exhibet. Deindè finge tibi globulos duos æquales quorum uterque polis, æquatore & meridiano unico primario insigniatur & uterque filo suspendatur alterutri polorum alligato. Horum alter referat Lunam fictitiam motu æquabili secundum horizontis lignei circumlatam, atque eodem tempore circà axem suum revolutam respectu firmamenti, ità ut planum meridiani primarii Lunaris perpetuò transeat per centrum terræ. Alter verò globulus veram Lunam imitatus in orbitâ suâ feratur motu inæquali, nunc suprà horizontem ligneum emergens, nunc infrà eundem descendens, ità ut planum æquatoris hujus Lunæ veræ semper parallelum maneat plano horizontis lignei, & planum meridiani primarii ejusdem Lunæ veræ semper parallelum plano meridiani primarii Lunæ fictæ. Ità fit ut Luna ficta eandem nobis faciem obvertens semper nulli prorsùs librationi sit obnoxia. At Luna vera dum à perigæo pergit ad apogæon præcedens Lunam fictam, meridianum suum primarium ostendit in medietate sinistrâ sui disci tot gradibus abeuntem à medio quot sunt inter longitudinem Lunæ veræ & fictæ. Ab apogæo verò ad perigæon descendens Luna vera sequitur fictam atque tum meridianus primus veræ Lunæ recedit ab ejus medio ad dextram, hoc est, maculæ omnes vergunt in occasum, & cum differentia inter mediam & veram Lunæ longitudinem in quadraturis evadat major, propter evectionem systematis Lunaris à centro telluris, hinc est quod in quadraturis librationes in longum cernuntur majores. Similiter intelligitur causa librationis in latum, quando Luna superato nodo ascendente, sive sectione horizonti lignei & orbitæ suæ, tendit ad limitem boreum, tum enim nobis in centro sphæræ positis, polus Lunæ boreus & quæ sunt circà eum maculæ absconduntur & polus australis cum suis maculis in conspectum venit, undè maculæ omnes conspicuæ in boream tendere videntur; contrarium accidit, Lunâ ad limitem australem accedente. Ab iisdem causis procedit macularum ex parte lucidâ in obscuram transitus & vicissim. Nam in limite australi polus Lunæ boreus à Sole illustratur & quidquid est zonæ frigidæ arctico Lunari inclusum, dum frigida australis in tenebris versatur. Quod si igitur Solem concipias in eâdem plagâ cum limite australi & lunam post conjunctionem indè procedere ad nodum ascendentem, tum maculæ superiores apud polum boreum sitæ, paulatim cum suo polo à Luce in Tenebras concedunt, dum inferiores maculæ cum polo australi ex Tenebris in Lucem prorepunt. Contrarium evenit semestri post, cum Sol accessit ad limitem Lunæ boreum ". Hactenus N. Mercator sed plenior librationum Lunarium expositio habetur in elementis Astronomicis Clariss. Cassini, ubi Vir Doctiss. varias harumce librationum apparentias respectu fixarum & Solis determinat, docetque methodum quâ ad quodlibet tempus datum possit definiri apparens macularum Lunarium situs.

78

(h) * *Extimus Saturni satelles*, tertio satellite sæpè major apparet, posteàque decrescit ac tandem juxtà periodum nondum probe notam evanescit, id tamen ut plurimum contingit dum satelles in orbitæ suæ orientali parte respectu Saturni versatur, rursùs deindè in conspectum redit. Causa hæc esse videtur quod scilicet hemisphærii satellitis pars quæ ad nos conversa est, maculis obscurata præ luminis tenuitate cerni non possit, revolvente autem circà axem satellite, ad hemisphærium oppositum transeunt maculæ, iterumque satelles fit conspicuus. Cumque in eâ orbis sui parte quæ orientem spectat obscuratus satelles semper observetur, in alterâ verò parte nunquam, valdè proba-

 bile

De Mundi Systemate.

do, quoties ad orbis sui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, & plerumque videri cessat: id quod evenire potest per maculas quasdam in eâ corporis parte quæ terræ tunc obvertitur, ut *Cassinus* notavit. Similì etiam motu satelles extimus jovialis circa axem suum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis jovi aversâ maculam habeat quæ tanquam in corpore jovis cernitur ubicunque satelles inter jovem & oculos nostros transit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

(i) Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. (k) Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia si fluida sit ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet. Sic jovis diameter (consentientibus astronomorum observationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem

78. bile est eandem hujus satellitis faciem planetæ primario semper obverti. Idem quoque simili argumento patet in extimo jovis satellite, nisi dicatur illas satellitum maculas fuliginum instar modò nasci, modò dissipari, sed ubi apparentiæ aliquæ ex duplici causâ ortum habere possunt, anteponendæ sunt explicationes quæ à motu locali repetuntur. Alios Saturni Jovisque Satellites, Lunæ instar, Planetis primariis invariatam manifestarem facie ex analogiæ lege colligunt multi. Rem aliter se habere censet Clariss. Daniel Bernoullius in disquisitionibus Physico-Astronomicis an. 1734. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecoratis. Has consulat Lector.

(i) * *Planetæ sublato omni motu circulari.* Patet (per not. 172. lib. 2.), Si planetarum materia ponatur fluida, visque gravitatis ad unum centrum dirigatur.

(k) * *Per motum illum circularem.* Quoniam planetæ circà axem suum revolvuntur, planetarum partes à centris circulorum in quibus moventur, recedere conantur eóque major est vis illa centrifuga quo majores sunt circulorum quas describunt peripheriæ (cor. 3. prop. 4. lib. 1.). Sed æquator est circulus maximus, circuli autem versùs polos continuò decrescunt, quarè planetarum partes magis à centro æquatoris quam à centris parallelorum recedere conantur, ideóque si fluida sit planetarum materia ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet.

dem argumento, nisi terra nostra paulo altior esset sub æquatore quam ad polos, maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noster circa annum 1635 mensurando distantiam pedum Londinensium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, ac observando differentiam latitudinem 2 *gr.* 28′ collegit mensuram gradus unius esse pedum Londinensium 367196, id est hexapedarum Parisiensium 57300.

(†) *Picartus* mensurando arcum gradus unius & 22′. 55″ in

(†) * *Picartus mensurando arcum ... invenit arcum gradus unius esse Hexap.* 57060. * Circa hanc Picarti mensuram observandum Ill. Cassinum juniorem distantiam terrestrem inter Parallelos Malvoisinæ & Ambiani 42 hex. imminuendam statuisse, ipsum verò arcum cælestem propter refractiones $1\frac{1}{2}''$ esse augendum, unde arcus gradus unius evadit hexap. 57010. Novissimè verò D. de Maupertuis arcum cælestem inter Lutetias & Ambianum metitus, multo minorem eum deprehendit quam esse debuisset secundum observationes Picarti, quare servatis mensuris terrestribus Picarti arcum unius gradus 57183 hex. determinavit: Hæc paulo fusiùs sunt diducenda.

I. Cum mensura Picarti à Malvoisina ad Sourdonem procedat, & hinc ad Ambianum; Picartus distantiam à Malvoisina ad Sourdonem per duas Triangulorum series determinat, unam præcipuam vocat quoniam ea ipsa erat quâ uti primùm constituerat, sed cum aliquid dubii in eâ observasset alteram instituit, quam priori anteposuit quia observationum in eâ factarum certior sibi videbatur, & accurate consentiebat cum basi proximâ actu mensuratâ: Ill. verò Cassinus distantiam inter Parallelos, Malvoisinæ & Sourdonis ex priori serie determinat $68325\frac{2}{3}$ hex. dum eamdem distantiam Picartus, cui Ill. de Maupertuis suffragatur, facit hex. 68347.

Differunt iterum Picartus & Illustrissimus Cassinus in distantiâ inter Sourdonem & Ambianum, eam enim distantiam Picartus ex suis mensuris hex. $11161\frac{2}{3}$ invenit, Cassinus verò hex. $11135\frac{1}{2}$: discriminis autem hujus ratio duplex est, nam cum uterque Triangulos formare incipiat in lineâ quæ intercipitur inter Sourdonem & Montemdesiderium, Ill. Cassinus eam lineam assumit hex. $7116\frac{1}{2}$ juxta priorem seriem Triangulorum Picarti, & Picartus alteram seriem verificatam per Basim proximam actu mensuratam anteponens eam lineam $7122\frac{1}{2}$ Hex. facit: Cum verò diversis Triangulis inde ad Ambianum usi sint, in iis Triangulis occurrit sensibilis differentia quæ sese prodit in Angulo Sourdoni facto inter lineas inde ad Ambianum & Montemdesiderium protensas, nam is Picarto est 137°. 56′. 10″ angulus autem idem à Cassino determinatur 137°. 53′. 30″, ex quâ differentiâ 2′. 40″. & ex Baseos inter Sourdonem & Montemdesiderium diversitate, oriri potuit discrimen illud

De Mundi Systemate.

in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradus

78. illud in distantiâ inter Sourdonem & Ambianum.

In arcu autem Cælesti à Picarto mensurato refractionis correctionem adhibet Cassinus quam neglexerat Picartus; cum ergo invenisset distantiam genu Cassiopeæ à Zenith loci in quo observabat & qui erat 18 Hex. Malvoisinâ meridionalior 9° 59′ 5″ versus septentrionem, & cum ejus stellæ distantiam à Zenith loci 75 hex. meridionaliori quam ædes Ambiani 8° 36′ 10″ invenisset, arcum inter Zenith eorum locorum juxta Malvoisinam & Ambianum interceptum fecit Picartus 1°. 22′ 55″ ut refert Newtonus.

Verum propter refractionem augendas esse has distantias à Zenith statuit Cassinus ita ut prima distantia 10″, altera $8\frac{3}{5}''$ fiat, cum ergo prior fiat 9° - 59 - 15

Altera - - - 8 - 36 - $18\frac{3}{5}$

Arcus interceptus inter Zenith locorum observationis fit - - - - 1 - 22 - $56\frac{2}{5}$

Ex his ergo correctionibus tam in arcu Cælesti quam in mensuris terrestribus, à Picarto observatis deducit Ill. Cassinus arcum unius gradus esse 57010 hex.

II. Ill. de Maupertuis mensuras terrestres quas Picartus adoptavit admittens arcum cælestem mensuravit Instrumento, à solertissimo Graham accuratissimè constructo, cum autem priores sectores circa axem immotum ex quo filum verticale pendet revolverentur, & divisiones subtiliores in sectoris limbo per lineas transversas signarentur, in hoc Instrumento Telescopium in sua summitate duos cylindros adjunctos habet circa quos cum sectore inferius adfixo revolvitur & ex quorum centro pendet filum verticale quo notentur gradus in limbo sectoris; Divisiones in eo limbo gradus & eorum partes octavas tenuissimis punctis indicant nihilque præterea, & ad observationem faciendam ita constituitur instrumentum, ut filum pendulum alicui è divisionibus accurate applicetur, idque Microscopio cum lumine juxta limbum collocato agnoscitur, tum cochleâ pellitur instrumentum donec objectum in axe Telescopii cernatur & numerus gyrorum cochleæ, partesque singuli gyrî numerantur in limbo circuli horologii instar cochleæ adnexi, ita ut minimi cochleæ progressus maximè sensibiles fiant. Tali itaque instrumento cujus radius est octo pedum una unciâ demptâ observationes instituit Ill. de Maupertuis Lutetiæ in loco 1105 Hex. magis septentrionali quam ædes B. Virginis, & Ambiani in loco $98\frac{1}{2}$ meridionaliori æde ejus urbis. Inde ex stellis & Persei, & Draconis, arcum cælestem inter Zenith eorum locorum interceptum 1° 1′ 12″ determinavit, correctionibus præcessionis Æquinoxiorum & aberrationis lucis adhibitis. Hinc cum juxta Picartum inter Parallelos Malvoisinæ & Ambiani sint 78907. hex. inter Malvoisinam & ædes B. Virginis Lutetiis sint $19376\frac{1}{2}$ hex. manent inter utramque ædem $59530\frac{1}{2}$ hex. ex quibus detractis $1203\frac{1}{2}$ hex. propter observationum loca. Invenitur arcum 1°. 1′. 12″ respondere mensuræ 58327. hex. ideóque arcum unius gradus Hexapedas 57183. in eâ latitudine continere.

Verum hic non dissimulandum qualis quantusque error observationi Picarti adscribatur, ex hac novissimâ Ill. de Maupertuis observatione, & ut ille error rectè æstimetur corrigendæ sunt ejus observationes cælestes non tantùm per refractionem sed etiam per Æquinoctiorum præcessionem & aberrationem lucis, etenim cum eodem tempore factæ non fuerint observationes à Picarto Malvoisinæ & Ambiano, sed inter eas mensis intervallum effluxerit, interea per præcessionem Æquinoctiorum augebatur stellæ genu Cassiopeæ declinatio $1\frac{1}{2}''$ ut ipse Picartus observat, simulque propter aberrationem lucis 8″ circiter augeri eam declinationem nunc constat, quare stella quæ Ambiani observabatur non erat in eodem cæli puncto quo fuerat cum Malvoisinæ observaretur, sed erat 10 fere

gradus unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. (‡) *Cassinus* senior mensuravit distantiam in meridiano à villâ *Collioure* in *Roussillon* ad observatorium Parisiense; & filius ejus addidit distan-

re secundis ad septentrionem provectior, dum ergo observabatur eam stellam distare à Zenith Ambiani 8°. 36'. $18\frac{1}{5}$ (adhibita refractionis correctione) Punctum fixum quod fuerat Malvoisinæ observatum 8°. 36' $8\frac{1}{5}$ à Zenith duntaxat distabat, & cum id Punctum Malvoisinæ 9° 59' 15" à Zenith distaret arcus inter duo Zenith interceptus erat 1°. 23' $6\frac{2}{5}$ (non 1°. 23' $56\frac{2}{5}$) qui respondet 78850. hex. unde gradus unius mensura fiet duntaxat $56926\frac{5}{6}$ hexapedarum; sive ut conferatur hæc observatione cum observat. Il. de Maupert. fiatque si $58315\frac{1}{6}$ hex. respondeant 1° 1' 12" Quot gradibus respondebunt 78850. Invenietur 1°. 22' $45\frac{1}{3}$'. loco 1°. 23' $6\frac{2}{5}$" ita ut error in observatione Cælesti Picarti. sit 20".

Singulare quid occurrit in ipsa Picarti narratione; Postquam enim differentias inter Zenith Malvoisinæ & Sourdonis, Malvoisinæ & Ambiani dedit, addit; «Differentia temporis quod effluxit inter observationes requireret ut ex priori differentia 1" *demeretur* ex posteriori $1''\frac{1}{2}$ (propter æquinoctiorum præcessionem) sed hanc correctionem ne minutias sectari, videamur omisimus» si mutatio declinationis per præcessionem æquinoctiorum orta ex iis differentiis *demenda* foret, mutatio declinationis propter aberrationem pariter foret demenda siquidem fit in eamdem partem, itaque cum arcus inter Malvoisinam & Ambianum adhibitâ correctione refractionis, sit 1°. 22. $56\frac{2}{5}$ dempta præcessionis & aberrationis variatione 10" circiter, maneret is arcus 1°. 22. $46\frac{2}{5}$ ad unam secundam qualis secundum Dni. De Maupertuis observationem inveniri debuisset.

Verum ut correctio præcessionis & aberrationis *demenda* foret, ut vult Picartus, oporteret ut observationes primum Ambiano postea Malvoisinæ fuissent factæ, sed ita notantur illæ observationes, *Septembri Malvoisinæ* & *Octobri Ambiano*, si itaque rectè ratiocinatus sit sed male tempora notaverit elegantissimè consentient ejus observationes cum accuratissimis postea factis; sin bene tempora notaverit, sed male fuerit ratiocinatus, fatendum erit errorem circiter 20" inter duas ejus observationes esse distribuendum, stantibus observationibus Ill. De Maupertuis: 6" aut 7" secundis propiùs accederent ad has observationes illæ quas instituit Picartus à Malvoisinâ ad Sourdonem, ita ut error 12" duntaxat, inter duas observationes distribuendus superesset. 78.

(‡) * *Cassinus senior mensuravit distantiam in meridiano à villâ Collioure ad observatorium Parisiense & filius addidit distantiam ab observatorio ad turrim Urbis Dunkirk.*

* Has duas mensuras in unam summam conjicit Newtonus, quia cum Cassinus senior gradum majorem quam Picartus invenerit; Cassinus filius minorem, conjunctis mensuris obtinetur gradus mediocris proximè æqualis mensuræ gradus à Picarto assignatæ, quem ut gradum telluris ut sphæricæ consideratæ assumit Newtonus; verum hic duo sunt notanda, 1°. utitur Newtonus isto gradu mediocri quasi foret Æquatoris gradus, qui quidem isto major est, sed inde parum mutatur sequens calculus ut liquebit si eumdem instituamus assumpto gradu æquatoris isto majore, v. gr. 57226 hex. ut deduceretur ex Theoriâ ipsius Newtoni, & gradum in 45. gradu faciendo 57100. hex.

2°. Distinguendæ sunt observationes Cassini senioris & filii, hæc enim propter aberrationem lucis correctione indiget, mensura vero Ill. Cassini Patris à villâ Collioure ad observatorium arcum Cælestem 6°. 18' 57". continet & respondet hexapedis 360614. (ad maris libellam reductis mensuris) unde gradus fit 57097 hex.

De Mundi Systemate.

diſtantiam ab obſervatorio ad turrem urbis *Dunkirk.* Diſtantia tota erat hexapedarum 486156½ & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31′. 12⅚″. Unde arcus gradus unius prodit hexapedarum Pariſienſium 57061.

78. hex. verificatæ ſunt menſuræ in utroque extremo, nec in iis gravis error eſt metuendus cum aptè conſenſerint Triangulorum calculi cum ultimis lineis ſeu Baſibus actu menſuratis; Error verò qui in obſervatione Cæleſti occurrere poteſt ſinguli gradûs menſuram parùm immutat quia in ſex gradûs & ultra diſtribuitur, cum verò iiſdem anni temporibus tàm Lutetiæ quàm in villâ Collioure obſervationes inſtitutæ fuerint aberratio lucis calculum arcûs Cæleſtis non immutavit; Hinc in numeris proximis rotundis gradus in latitudine graduum 45. 57100. Hexapedarum aſſumi poteſt ſatis tutò.

3°. Quoad obſervationes Ill. Caſſini filii, cum inter 15. Julii & 4. Sept. factæ fuerint obſervationes Cæleſtes quibus determinaretur arcus inter Zenith urbis Dunkirk & Obſervatorii interceptus, aberrationis correctio illis eſt adhibenda quæ tunc temporis nondum erat cognita; verum illam correctionem neceſſariam eſſe tantò minus dubium eſt, quod cum is arcus per obſervationes ſtellæ γ Draconis fuerit determinatus, ejus ipſius ſtellæ aberratio ab Ill. Bradleio fuerit obſervata (vid. Tranſ. Phil. Vol. XXXV. pag. 637.) & nuperrimè à D. Le Monnier; immediatis ergo experimentis conſtat ejus ſtellæ dcelinationem augeri à menſe Julio ad Septembrem, ita ut cum Lutetiæ ſerius obſervata ſit, 11½ ſecundis Polo tunc vicinior eſſe potuit quam cum in urbe Dunkirk obſervata fuerat, ideoque totidem ſecundis Zenith remotior apparebat, quam punctum fixum quod in urbe Dunkirk fuerat obſervatum; unde cum ex diſtantiâ à Zenith Lutetiæ detrahatur diſtantia ejuſdem ſtellæ à Zenith urbis Dunkirk, arcus reſiduus illis 11½ ſec. eſt multandus, & cum reſiduum invenerit Ill. Caſſinus 1°. 12′. 9½″ eſt reducendus ad 1°. 11′. 58″, & cum is arcus 125454 Hexapedis reſpondere ab Ill. Autore ſtatuatur, arcus unius gradus fiet Hex. 57038. 5 ped.

Verum minor diſſenſus inter obſervationes Ill. Caſſini filii & Dni. de Maupertuis apparebit ſi attendatur, partem illius diſſenſus oriri ex eo quod, dum menſuris Picarti uterentur diverſas ejus Triangulorum ſeries adoptaverint, quare ut conferantur eorum inventa, reducendæ ſunt eorum ſupputationes quaſi eâdem ſerie Triangulorum Picarti uterentur ambo: v. gr. ſupponatur utrumque aſſumpſiſſe eam ſeriem Triangulorum quam ipſe Picartus admiſit, ſed ad Sourdonem uſque, & inde (quia Ill. Caſſinus propriis ſuis Triangulis diſtantiam à Sourdone ad Ambianum determinavit) aſſumatur ea diſtantia qualis ex Triangulis Ill. Caſſini deduceretur ſi modo priori ſerie uſus fuiſſet, & reliqua ejus Triangula uſque ad urbem Dunkirk in eadem proportione augeantur; hinc iſte emerget calculus.

Primo tota diſtantia inter Parallelos Obſervatorii & Sourdonis erit ex Picarto - - - 49926 hex. 3 ped.

Secundo; Diſtantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani eſt ex Caſſino 10539½ hex. aſſumpta Baſi 7116½; ſed in alterâ ſerie Triangulorum eadem Baſis erat 7122⅓ hinc aſſumptâ hac menſura, diſtantia Parall. inter Sourdonem & Ambianum ex Triangulis Ill. Caſſini erit - 10547 hex. 4 ped.

Tota ergo diſtantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani erit - - 60474 - 1

Ter-

57061. Et ex his mensuris colligitur ambitus terræ pedum Parisiensium 123249600, & semidiameter ejus pedum 19615800, ex hypothesi quod terra sit sphærica. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROB. III.

In latitudine *Lutetiæ Parisiorum* corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describit pedes Parisienses 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$ ut supra, id est, (††) lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis

Tertio distantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk est ex Cassino 65109^hex. 1^ped., supposita Basi $7116\frac{1}{2}$, si ergo supponatur ea linea $7122\frac{1}{3}$ fiet distantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk ex Triangulis Ill. Cassini. - - - 65162^hex. 3^ped.

Tota ergo distantia inter observatorium & Parallel. urbis Dunkirk fiet	125636	4

& detractis 98. hex. pro locis observationum Cælestium & $2\frac{1}{2}$^hex. pro libellâ supersunt $125536^{hex.}\frac{1}{6}$, quæ respondent 2°. 11'. 58", unde arcus unius gradus invenitur 57076 : 2.

Pariter in Observatione D^ni. de Maupertuis cum sint inter Parallelum Observatorii & ædis Ambiani 60474 : 1. & propter observationum Cælestium loca 2159^hex. sint detrahendæ, arcus inter observationes D^ni. de Maupertuis observatus, qui est 1°. 1'. 12". respondebit hex. 58315:1. Unde gradus erit $57171\frac{2}{3}$.

Ut itaque verus dissensus inter observationem Ill. Cassini & D^ni. de Maupertuis habeatur, fiat sicut $57171\frac{2}{3}$ ad $125536\frac{1}{6}$ ita unus gradus ad quartum, invenietur arcus 2°. 11". 45", qui 13" duntaxat differt ab arcu 2°. 11" 58" quem Ill. Cassinus observavit; Quæ differentia inter quatuor observationes Cælestes & mensuras terrestres distributa, efficeret conclusiones uniformes: Ergo illæ observationes nedum inter se pugnent, iis differentiolis tantùm discrepant, quæ inevitabilibus accidentibus debentur.

Interea satis liquet quod si in unam summam conjicerentur mensuræ Ill. Cassini Patris & Filii, diminuendus esset arcus totalis 12" propter correctionem aberrationis Lucis, cui obnoxia est observatio Ill. Cassini filii, & mensuræ terrestres forent augendæ, quia ex observatione D^ni. de Maupertuis additur pondus rationibus quibus inter duas series Triangulorum D^ni. Picarti ea præponenda censeatur quam Picartus prætulerat & quam Ill. Cassinus neglexerat, imo & probabile sit errores minimos inevitabiles, eam in partem conspirasse ut arcus Cælestis major vero videretur Ill. Cassino & mensuræ terrestres vero minores; Quibus omnibus perpensis, magnitudinem unius gradus in 45°. lat. gradu, circa medium mensuræ à Cassino Patre institutæ rotundis numeris satis tuto 27100. hex. assumi posse liquet. 78.

(††) *Id est, lineas* $2173\frac{7}{9}$. Ex accuratissimis observationibus D^ni. de Mayrans (cap. 6. lib. 3. fig. terræ deter. à D. de Maupertuis) longitudo penduli ad singulas secundas vibrans est linearum 440.57. hinc, cum juxta Prop. 26. Horol. Oscill. Hugh. sit circuli circumferentia ad Diametrum ut 1". ad tempus descensus per dimidiam altitudinem penduli, sive per lineas 220. $28\frac{1}{2}$, sint verò quadrata temporum ut spatia descensu verticali iis temporibus descripta erit 9.8696 ad 1. (Quadratum circumferentiæ ad quadratum Diametri 1.) sicut spatium uno secundo descriptum ad 220.$28\frac{1}{2}$ lin. Ergo corpus grave in latitudine Lutetiæ tempore minuti unius secundi describit lineas 2173. 631356. paulò minus quam Newtonus assignat, ejus undecima millesima pars foret .197602. Quare id grave in vacuo cadendo describeret altitudinem 2173, 828958.

DE MUNDI SYSTEMATE. poris diminuitur per pondus aëris ambientis. (l) Ponamus pondus amissum esse partem undecimam millesimam ponderis totius, & corpus illud grave cadendo in vacuo describet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius secundi.

Corpus in circulo ad distantiam pedum 19615800 à centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56'. 4'' uniformiter revolvens tempore minuti unius secundi (m) describet arcum pedum 1433,46, cujus sinus versus est pedum 0,0523656, seu linearum 7,54064. (n) Ideoque vis, quâ gravia descendunt in latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centrifugam corporum in æquatore à terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore terræ est ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt à terrâ in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50'. 10'', in (o) duplicatâ ratione radii ad sinum

78. (l) * *Ponamus pondus amissum.* Quoniam corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris, & plumbum est ad aquæ gravitatem specificam ut 11,345 ad 1000, aqua verò ad aërem paulo minus quam 1000 ad 1, hinc gravitas plumbi est ad gravitatem aëris fere ut 11000 ad 1, hinc ergo plumbum amittit in aëre ponderis sui partem undecimam millesimam, itaque in vacuo augetur pondus plumbi parte undecimâ millesimâ ponderis totius, hoc est spatia eodem tempore descripta undecimâ millesimâ totius spatii descripti parte augeri debent, fiat ergo 11000 ad 11001 ut $2173\frac{7}{9}$ ad quartum, illud quartum erit 2173,966 ergo poni potest quam proximè spatium tempore minuti unius secundi descriptum in vacuo à plumbo, ideoque à quovis alio corpore gravi (nam omnia gravia æquali celeritate in vacuo cadunt) linearum 2174.

(m) * *Describet arcum ped.* Computum initur eodem plane modo ac not. 63.

(n) * *Ideòque vis.* Vires uniformes sunt ut spatia dato tempore descripta, sed est spatium vi gravitatis tempore unius minuti secundi descriptum 2174 lin. spatium autem vi centrifugâ descriptum ut sinus versus, hoc est, lin. 7, 54064.

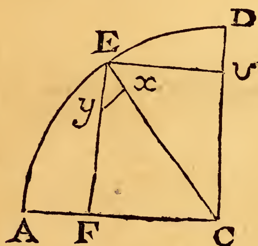
* Si gradus Æquatoris sit major 57061 hex., v. gr. si 57226 hex. sumatur, erit iste sinus versus linearum 7, 56244, ideoque vis quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ est ad vim centrifugam corporum in Æquatore ut 2173. $828\frac{9}{9}\frac{5}{8}$ ad 7. 56244.

(o) 81. * *In duplicatâ ratione radii.* Quadrans circuli A E D revolvatur circà radium A C, ducatur radius C D ad A C normalis, ipsique parallela agatur ordinata E F, erit vis centrifuga in D secundum directionem D C sive E F, ad vim centrifugam in E secundum directionem C E, in ratione duplicatâ radii C D ad ordinatam E F quæ est sinus complementi arcûs seu altitudinem E D. Exprimat enim D v vim centrifugam in D secundum directionem D C, & recta E y, exprimat vim centrifugam in E secundum directionem E F, ductâ perpendiculari $y x$ ad rectam E C, exprimet E x, vim centrifugam in E, secundum directionem E x; sed est D v : E y = D C : E F (cor. 3. prop. 4. lib. 1.) & ob triangula rectangula E $x y$ E F C similia, E y : E x = E C vel

ſinum complementi latitudinis illius, id eſt, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim quâ gravia deſcendunt in latitudine illa *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illâ vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribet lineas 2177,267, ſeu pedes Pariſienſes 15 dig. 1 & lin. 5.267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore terræ ut 2177,267 ad 7,54064 ſeu 289 ad 1.

Unde

vel DC:EF. Quarè, componendo $Dv:Ex = DC^2:EF^2$. Q. E. D.

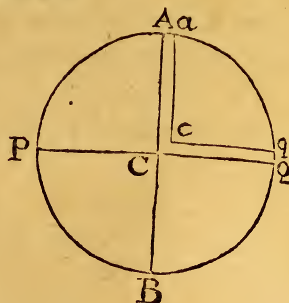


* Verum ſi Meridianus terræ ſit alia curva quam circulus v. gr. ſit Ellipſis, vis centrifuga corporum in æquatore terræ eſt ad vim centrifugam qua corpora perpendiculariter à terra recedunt in latitudine datâ, in ratione compoſitâ ex ratione radii ad ſinum complementi latitudinis illius, & ex ratione radii Æquatoris, ad ordinatam ejus Ellipſeos in eâ latitudine datâ; hinc pro Ellipſi ratio vis centrifugæ in Æquatore ad vim centrifugam in latitudine data exprimetur hoc modo, ſit m axis major, n axis minor, r Radius, c ſinus complementi latitudinis quæſitæ, erit vis in Æquatore ad vim in eâ latitudine, ut $mr\sqrt{m^2 \times \overline{r^2 - c^2} + n^2c^2}$ ad n^2c^2.

Ut facile deducetur ex Ellipſeos naturâ; Quare ſi fingatur $m = 230$ & $n = 229$ juxta Newtonum invenietur calculo eas vires eſſe inter ſe ut 7.56244 ad 3.09660, addatur hæc vis ad vim quâ gravia deſcendunt in latitudine Lutetiæ, & vis tota gravitatis (in hyp. aſſumptis) efficeret ut gravia cadendo deſcriberent lineas 2176. 92558. Unde vis tota gravitatis in latitudine lutetiæ erit ad vim Centrifugam corporum Æquatore terræ ut 2176. 92558 ad 7.56244 ſive ut 287. 86 ad 1. 78.

Hæc autem vis gravitatis in latitudine Lutetiæ non eſt vis ipſa gravitatis in Æquatore, de quâ agitur in reliquâ hìc propoſitione, ſed parum ab ea differt, ita ut calculo quodam inito inveniatur quod hæc vis gravitatis in latitudine Lutetiæ ſit ad vim gravitatis in Æquatore (terrâ uniformiter denſa ſuppoſitâ), ut 1532 ad 1531 ideóque ſit vis gravitatis in Æquatore ad vim ejus Centrifugam ut 287.67 ad 1. Quas quidem varias correctiones, Newtonianis numeris adplicamus, ut inde liqueat, quod quamvis numeris ut ita dicam mediocribus ſit uſus Newtonus & ſæpe ex Hypotheſi terræ ſphæricæ ductis, parùm mutationis tamen adfuturum ſit, etſi aſſumantur alii numeri qui ex veriori terræ figurâ deducerentur.

De Mundi Systemate.



Unde si *APBQ* figuram terræ designet (p) jam non amplius sphæricam sed revolutione ellipseos circum axem minorem *PQ* genitam, sitque *ACQqca* canalis aquæ plena, à polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad æquatorem *Aa* pergens: (q) debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, esse ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex propositionis XCI. corol. 2. lib. 1.) computationem ineundo, invenio quod si terra constaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, (r) & esset ejus axis *PQ* ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in loco *Q* in terram foret ad gravitatem in eodem loco *Q* in sphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* descriptam, ut

78. (p) * *Jam non amplius sphæricam sed revolutione Ellipseos circum axem minorem PQ genitam.* * Terram non multum à figurâ sphæricâ discedere ex Eclipsibus Lunæ patet; magis adhuc ad formam ejus Ellipseos accedere cujus axes forent æquales Diametro Æquatoris, & distantiæ Polorum terræ respectivè, satis liquet; utrum verò curva illa quæ singulum Meridianum terræ constituit & quæ convolutione arcus PAQ circa axem minorem PQ generatur sit Ellipsis Apolloniana, utrum tantùm curva ad eam accedens non determinat Newtonus; Paulò fusius de hujus curvæ Naturâ inferius disseremus, hic enim ad calculum Newtonianum intelligendum, sufficit assumere eam curvam ad Ellipsim satis accedere, ut Ellipsis pro eâ assumi possit.

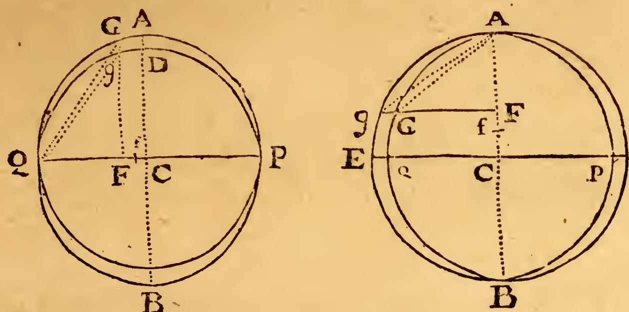
(q) * *Debebit pondus aquæ.* Si fluidum in canale contentum quiescere supponatur, fluidi partes in canalis crure AC debent esse in æquilibrio cum partibus fluidi in ejusdem canalis crure QC. Cum itaque vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam ponderis detrahat e ponderis partibus 289, oportet ut pondus in altero crure sit 288 (sive ex inventis ut 288.67 ad 287.67), sic enim pondera in utroque canalis crure erunt æqualia.

(r) * *Et esset ejus axis PQ ad Diametrum AB ut* 100 *ad* 101, *gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in Sphæram centro C radio QC descriptam, ut* 126 *ad* 125 *& eodem argumento gravitas in loco A in sphæroidem circa axem AB descriptam est ad gravitatem in sphæram centro C radio AC descriptam, ut* 125 *ad* 126.

* Utrumque simul probari potest: Sit PAQB, in utrâque figurâ, terræ Meridianus; in primâ figurâ sit QDPQ sphæra Centro C radio QC descripta & in secundâ figura PAQB repræsentat sphæroidem quam revolutione meridiani terræ circa Æquatorem describi fingit Newtonus & AED sphæram radio AC descriptam. Constat Corollario 2. Prop. XC. lib. 1. quod si ducantur circuli ad axes revolutionum perpendiculares quorum radii sunt FG, fg (in utrâque figurâ) attractio punctorum Q & A ab illis circulis erit $1-\frac{QF}{QG}$, $1-\frac{QF}{Qg}$, $1-\frac{AF}{AG}$, $1-\frac{AF}{Ag}$ respectivè:

Qua-

126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in sphæroidem, convolutione ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam, est ad gravitatem in eodem loco A in sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126.



Quare si dicatur CQ sive CD, b, & AC sive CE, r, dicaturque abscissa QF, AF; in utrâque figurâ, x, erit in primâ figurâ $\overline{FG}^2 = \frac{r^2}{b^2} \times \overline{2bx - xx}$; $\overline{Fg}^2 = 2bx - xx$, & in secundâ figurâ est $\overline{FG}^2 = \frac{b^2}{r^2} \times 2rx - xx$ & $\overline{Fg}^2 = 2rx - xx$, quibus quadratis si addatur quadratum $\overline{QF}^2$ vel $\overline{AF}^2$ sive xx, habebuntur quadrata linearum $\overline{QG}^2$, $\overline{Qg}^2$, $\overline{AG}^2$, $\overline{Ag}^2$, respectivè, quæ erunt $\frac{r^2}{b^2} \times 2bx - \frac{r^2-b^2}{b^2} x^2$; $2bx$; $\frac{b^2}{r^2} \times 2rx + \frac{r^2-b^2}{r^2} x^2$; & $2rx$; Unde (si compendii gratia loco $r^2 - b^2$ scribatur m) attractiones istorum circulorum evadent 78.

$$1 - \frac{bx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}};\ 1 - \frac{x}{\sqrt{2bx}};\ 1 - \frac{rx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}},\ 1 - \frac{x}{\sqrt{2rx}}.$$

Sit verò $Ff = dx$ & multiplicetur attractio singuli circuli per dx habebuntur elementa attractionis sphæroideωn & sphærarum, quæ elementa erunt

$$dx - \frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}};\ dx - \frac{xdx}{\sqrt{2bx}};\ dx - \frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}};\ dx - \frac{xdx}{\sqrt{2rx}}.$$

Facile revocabuntur ad fluentes suas ea elementa attractionis sphærarum quippe fluentes quantitatum $dx - \frac{xdx}{\sqrt{2bx}}$ & $dx - \frac{xdx}{\sqrt{2rx}}$ sunt $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3}\sqrt{2r}}$ & ubi QF vel AF diametros QP vel AB æquant, ideòque x fit æqualis $2b$, vel $2r$; evadunt illæ fluentes $2b - \frac{2b\sqrt{2b}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $2r - \frac{2r\sqrt{2r}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ sive $\frac{2}{3}b$ & $\frac{2}{3}r$.

Ut obtineatur fluens quantitatis $dx - \frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - m^2}}$, quantitas $\frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$ resolvatur in seriem (eam considerando ut $bxdx \times \overline{2r^2bx - mx^2}^{\,-\frac{1}{2}}$) sumatur juxta

formu-

De Mundi Systemate.

formulam Newtonianam quotiens secundi termini $-mx^2$ per primum $2r^2bx$ divisi, qui quotiens erit $-\frac{mx}{2b\times r^2}$; Primi termini $2r^2bx$ sumatur dignitas $-\frac{1}{2}$, quæ est $\frac{1}{rx^{\frac{1}{2}}\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}$; tum adhibitis coefficientibus secundum formulam, tota quantitas evadet

78. $$dx-\frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}-\frac{1\times bmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3bm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}}-\frac{1\times 3\times 5bm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 6r^7\times\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$$

& Integrando habebitur $x-\frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}-\frac{2bmx^{\frac{5}{2}}}{10r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3\times 2bm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 7r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}}-\frac{1.3.5.2bm^3x^{\frac{3}{2}}}{2.4.6.9r^7.\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

Quando vero $x=2b$, series fit $2b-\frac{2b^2}{3r}-\frac{2b^2m}{10r^3}-\frac{1\times 3\times 2b^2m^2}{2\times 4\times 7r^5}-\frac{1\times 3\times 5\times 2b^2m^3}{2\times 4\times 6\times 9r^7}$.

Sive dividendo per $2b$ & ad terminos præcedentes revocando; attractio terræ, in corpusculum Q in extremitate minoris axis positi circa quem revolvi censetur, exprimitur per hanc seriem

$$2b\times 1-\frac{2b}{3r}-\frac{1\times 3m}{2.5r^2}B-\frac{3\times 5m}{4\times 7r^2}C-\frac{5\times 7m}{6\times 9r^2}D-\frac{7\times 9m}{8\times 11r^2}E\ \&c.$$

Simili modo obtinebitur fluens quantitatis $dx-\frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx+mx^2}}$ nempe secundam partem considerando ut $rxdx\times\overline{2b^2rx+mx^2}^{-\frac{1}{2}}$, quæ in serie resolvatur, quotiens secundi termini per primum divisi erit $+\frac{mx}{2rb^2}$; Primi termini dignitas $-\frac{1}{2}$ erit $\frac{1}{bx^{\frac{1}{2}}\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}$ & calculando secundum formulam tota quantitas

$$\text{evadet } dx-\frac{rx^{\frac{1}{2}}dx}{b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}+\frac{1\times rmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3rm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}}+\frac{1\times 3\times 5rm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 6b^7\times 2r^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$$

Integrando habetur $x-\frac{2rx^{\frac{3}{2}}}{3b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}+\frac{1\times 2rmx^{\frac{5}{2}}}{2\times 5b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3\times 2rm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 7b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}}+\frac{1\times 3\times 5\times 2rm^3x^{\frac{9}{2}}}{2\times 4\times 6\times 9b^7\times\overline{2r}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

Quando $x=2r$ series fit, $2r-\frac{\overline{2r}^2}{3b}+\frac{\overline{2r}^2\times m}{2\times 5b^3}-\frac{1\times 3\times\overline{2r}^2\times m^2}{2\times 4\times 7b^5}+\frac{1\times 3\times 5\times\overline{2r}^2m^3}{2\times 4\times 6\times 9b^7}$ &c.

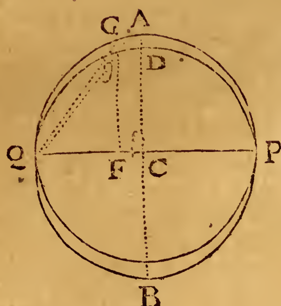
$$\text{Sive } 2r\times 1-\frac{2r}{3b}+\frac{3m}{2\times 5b^2}B-\frac{3\times 5m}{4\times 7b^2}C+\frac{5\times 7m}{6\times 9b^2}D-\frac{7\times 9m}{8\times 11b^2}E\ \&c.$$

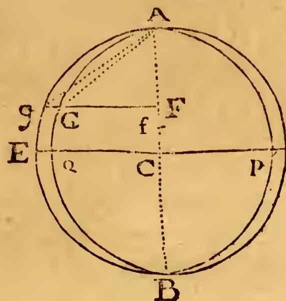
Cum ergo sit $r=101$, & $b=100$ est $r^2-b^2=r+b\times r-b=201=m$, est $r^2=10201$, Hinc substitutionibus factis prima series evadet

$2b\times 1-.66006600$
$-.00390177$
$-.00004118$
$-.00000052$
$-.00000001.$

hoc est, $2b\times 1-.66400948$, sive $2b\times .33599052$; Sed sphæræ attractio erat $\frac{2b}{3}$; Ergo gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in sphæram centro C radio QC descriptam ut 1.00797156 ad 1 (multiplicando utrumque terminum per 3 & dividendo per $2b$) sive ut 1008 ferè ad 1000, qui numeri sunt accuratè ut 126 ad 125, ut liquet utrumque per 8. dividendo. Q. E. 1°. D.

Paris

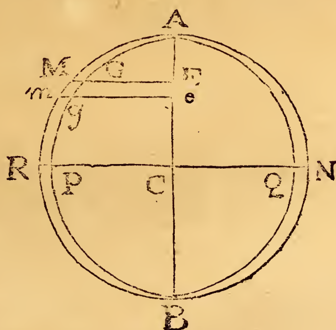




Pariter substitutionibus factis in serie secundâ, evadit

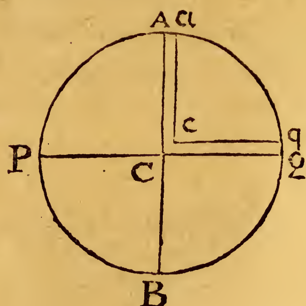
$2r \times 1 - .67333333 + .00406020$
$- .00004372 + .00000057$
$- .00000001.$

Sive $2r \times 1 - .67337706 + .00406077$ hoc est $2r \times 33068371$, sed sphæræ attractio erat $\frac{2r}{3}$, ergo utrumque terminum multiplicando per 3 & dividendo per $2r$; gravitas in loco A in Ellipsoidem, convolutione circa majorem axem genitum, erit ad gravitatem in sphæram radio AC descriptam ut 99205113 ad 1; Multiplicetur uterque terminus per 1008, & evadent 999.987589 & 1008; proximè 1000 & 1008 qui numeri sunt ut 125 ad 126. Q. E. 2°. D.



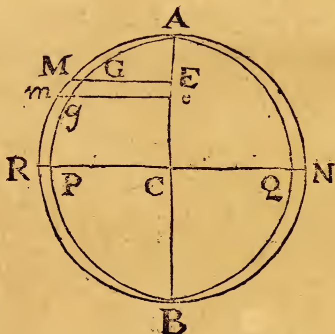
79. Lemma. Sphærois compressa convolutione Ellipseos APBQ circà axem minorem PC genita, est media proportionalis inter sphæram circumscriptam cujus radius est AC, & sphæroidem oblongatam convolutione ellipseos circà axem AC genitam. Nam ductis ordinatis ME, me, infinitè propinquis, tum sphæra circumscripta tum sphærois oblongata dividi intelligantur in cylindrulos ordinatarum ME & me, GE & ge convolutione descriptos, erit cylindrulus EGge in sphæroide ad cylindrulum EMme in sphærâ, ut altitudo Ee ducta in circulum radio GE rotando descriptum, ad altitudinem Ee, ductam in circulum cujus est radius ME, sivè quia circuli sunt ut quadrata radiorum & utriusque cylindruli communis est altitudo, erit cylindrulus EGge, ad cylindrulum EMme, ut GE^2 ad ME^2. Sed GE^2 ad ME^2 semper est ut PC^2 ad RC^2 vel AC^2, ideóque in datâ ratione, erit itaque summa tota cylindrulorum in sphæroide ad summam totam cylin-

DE MUNDI SYSTEMATE.



(f) Eſt autem gravitas in loco *A* in terram media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem & ſphæram: propterea quod ſphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram terræ; & hæc figura diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AB*, *PQ* perpendicularis eſt, vertitur in dictam ſphæroidem; & gravitas in *A*, in

726



lindrulorum in ſphærâ, hoc eſt, ſphærois ipſa ad ſphæram ut PC^2 ad AC^2. Jam verò ſphæra radio RC deſcripta & ſphærois compreſſa ellipſeos AGP circà axem PC convolutione genita, ſimili modo dividi intelligantur in tubulos innumeros ordinatarum ME & me, GE & ge, circà axem PC convolutione genitos, ob radiorum CE & rectarum Ee æqualitatem, erunt tubuli illi ut ME, GE, ſivè ut AC ad PC, hoc eſt, in datâ ratione. ideóque ſphæra eſt ad ſphæroidem compreſſam ut AC ad PC. Quarè ſi ſphæra dicatur S ſphærois compreſſa s, & ſphærois oblongata σ, ſitque $AC = b$, $PC = a$ erit $S^2 : s^2 = b^2 : a^2$, ac proindè $S : \sigma = S^2 \; s^2$ undè $s = \sqrt{S \times \sigma}$. Q. E. D.

(f) 80. *Eſt autem gravitas.* Diameter PQ, in figurâ Newtoni reſpondeat diametro RN minuatur diameter illa RN in ratione 101 ad 100 ut fiat PQ = 100, tunc ſphæra quæ centro C radio AC deſcripta erat vertetur in figuram terræ. Jam verò concipiatur tertia diameter quæ in revolutione ſpheræ duabus diametris AB, PQ, ſit perpendicularis, hæcque diameter diminuatur in eâdem ratione 101 ad 100, patet figuram terræ verti in ſphæroidem oblongatam. Quia verò utraque ſphærois ſivè compreſſa ſivè oblongàta ad ſphæram quam proximè accedit, ſphæroides illæ pro ſphæris quæ eandem reſpectivè contineant materiæ quantitatem quam proximè haberi poſſunt. Sunt autem attractiones ſphærarum in diſtantiis æqualibus ut quantitates materiæ (cor. 1. prop. 74. lib. 1.) ideóque gravitas in utroque caſu prædicto diminuitur in eâdem ratione materiæ detractæ quam proximè, ac proindè attractiones ſphæræ ſphæroidis compreſſæ & ſphæroidis oblongatæ ſunt reſpectivè ut quantitates materiæ in illis corporibus contentæ quàm proximè. Sed ſphærois compreſſa convolutione ellipſeos ABPQ, circà axem PCQ genita eſt media proportionalis inter ſphæram circumſcriptam cujus radius eſt AC, & ſphæroidem oblongatam convolutione ellipſeos circà axem ACQ geni-

in casû utroque, diminuitur in eâdem ratione quam proximè. (t) Est igitur gravitas in A in sphæram centro C radio AC descriptam, ad gravitatem in A in terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco Q in sphæram centro C radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per prop. LXXII. lib. I.) id est, ut 100 ad 101. (u) Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in terram ad gravitatem in loco A in terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

Jam cum (per corol. 3. prop. XCI. lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum à centro terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, (x) ut magnitudines & gravitates accelera-

genitam (82). Quarè gravitas in loco A, in terram est media proportionalis inter gravitates in dictam sphæroidem, oblongatam scilicet, & sphæram.

(t) * *Est igitur gravitas*. Gravitas in loco A in terram dicatur G, gravitas in loco Q, in terram sit g, gravitas in loco Q, in sphæram radio PC, descriptam dicatur γ, gravitas in loco A, in sphæroidem convolutione ellipseos ABPQ, circà axem AB genitam dicatur V, ac tandem gravitas in loco A in sphæram radio AC descriptam sit Γ, erit (ex dem.).

$g : \gamma = 126 : 125$

$V : \Gamma = 125 : 126$ prætereà

$V : G = G : \Gamma$, ideóque inter V & Γ, hoc est, inter 125 & 126 sumpto medio termino proportionali erit

$V : G = G : \Gamma = 125 : 125\frac{1}{2} = 125\frac{1}{2} : 126.$

(u) * *Conjungantur jam hæ tres rationes*, scilicet

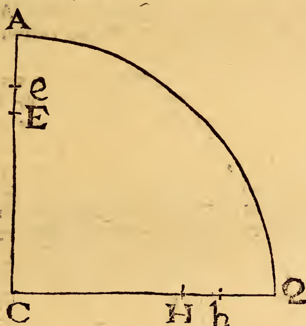
$g : \gamma = 126 : 125$

$\Gamma : G = 126 : 125\frac{1}{2}$

$\gamma : \Gamma = 100 : 101$ erit per compositionem rationum & ex æquo.

$g : G = 126 \times 126 \times 100 : 125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$ 81.

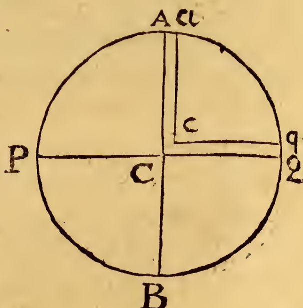
vel $g : G = 1587600 : 1584437\frac{1}{2} = 501 : 500$ ideóque gravitas in loco Q, in terram fiet ad gravitatem in loco A, in terram ut 501 ad 500.



(x) 81. * *Ut magnitudines & gravitates.* Crura AC, QC ità distinguantur superficiebus transversis & æquidistantibus ut crura illa æqualem contineant particularum Ee, Hh numerum, sintque singulæ particulæ in crure AC ad singulas particulas in crure CQ ut crus AC ad crus alte-

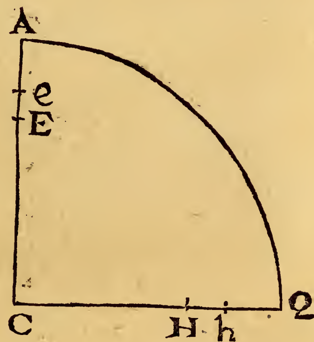
De Mundi Systemate.

celeratrices conjunctim; id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501. (y) Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289, hoc eſt, vis centrifuga quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$ eſt tantum pars $\frac{1}{289}$.



82. alterum CQ, ſive ut 101 ad 100; Quoniam gravitas in loco A eſt 500 & gravitas in loco Q, eſt 501 propter figuram ſphæroidis & omnium particularum in cruribus AC & CQ ſimilium & ſimiliter poſitarum, gravitates acceleratrices erunt in eadem ratione, earum itaque Pondera, (ſive facta gravitatis acceleratricis per Quantitatem materiæ erunt in ratione compoſita 101 ad 100 & 500 ad 501 ſive 505 ad 501, & totorum crurum AC & CQ gravitates erunt in eâ ratione 505 ad 501.

(y) 82. * *Ac proindè ſi vis centrifuga.* Ex motu diurno circà axem QC, oritur vis centrifuga quâ fit ut partes quæ ſunt in crure AC, versùs C, vi gravitatis attractæ, ſimul etiam vi centrifugâ repellantur, * illa autem vis Centrifuga in ſingulis punctis cruris AC eſt in ratione diſtantiæ eorum punctorum à Centro CE per (cor. 3. prop. 4. lib. 1.) ſed eſt etiam gravitas acceleratrix in ratione diſtantiæ à Centro per (cor. 3. Prop. XCI. lib. 1.) ergo ſi alicubi data ſit ratio vis gravitatis ad vim centrifugam eadem erit in omnibus punctis, ſit ergo alicubi ut 505 ad 4 gravitas acceleratrix tota ſingularum & omnium partium cruris AC erit ad gravitatem reſiduam in ſingulis & omnibus partibus ejuſdem cruris ut 505 ad 501, ſed in eâdem ratione erat tota



gravitas cruris AC (abſque detractione vis centrifugæ ad gravitatem cruris CQ quod cum ſit axis vim centrifugam nullam habet.) ergo reſiduum vis gravitatis in crure AC ſublatâ vi Centrifugâ in æquilibrio eſt cum gravitate cruris CQ.

$\frac{1}{289}$. (z) Et propterea dico, ſecundum regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* ſuperet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centeſimâ totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure *ACca* ſit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum terræ

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

(z) * *Et propterea dico ſecundum regulam auream.* * Vix crediderim Newtonum ad applicandam regulam auream hic loci, alio nixum non fuiſſe fundamento quam iſtâ confusâ notione, quod cum exceſſus ponderum in longioribus cruribus ſphæroideωn pendeant ex inæqualitate crurum, ſive ab exceſſu unius cruris ſupra alterum, ideo rationes exceſſuum crurum majorum ad minora crura eædem eſſe debeant ac rationes exceſſuum ponderum ad pondera minorum crurum quæ quidem ultimæ rationes (ſive ipſis proximæ rationes exceſſuum ponderum ad pondera majorum crurum) æquantur rationibus virium centrifugarum ad gravitatem totam, quia illæ vires centrifugæ ex gravitate detractæ eos exceſſus ponderum accuratè compenſant. Sed mihi videtur ipſum deduxiſſe hanc proportionem ex ipſâ ſerie ab ipſo adhibitâ, & quam aſſequi ſumus conati in Notâ (r) proximâ; quod ut concipiatur reſumantur quæ in ea Notâ dicta ſunt & ad ratiocinium Newtonianum applicentur, ſupponendo Quæſtionem eſſe de duobus ſphæroidibus, quorum unùs ſit aſſumptitius ille cujus Axes ſunt ut 101 ad 100 alterum verò ipſa terra, ita ut ſemi Diameter Æquatoris quæ in Sphæroide fictitio in Notâ prædictâ per *r* deſignabatur, terræ reſpectu deſignetur per ϱ, ſemiaxis verò PQ qui in ſerie aſſumptâ dictus fuerat *b* & applicatus fictitio ſphæroidi, ubi verò ipſum ſemi-axem terræ deſignat dicatur *B*. Aſſumptis ergo duobus primis terminis ſerierum ſed mutatis *r* in ϱ & *b* in *B*, ubi agetur de terrâ, 1°. Gravitas in loco Q in ſphæroidem erit ad Gravitatem in eodem loco in ſphæram radio *b* deſcriptam erit ut $\frac{6br-4b^2}{3r}$ ad $\frac{2b}{3}$ & ſi agatur de terrâ, Gravitas in loco Q in terram erit ad Gravitatem in eodem loco in Sphæram quæ radio B deſcribetur ut $\frac{6B\varrho-4B^2}{3\varrho}$ ad $\frac{2B}{3}$; ideóque Rationes gravitatis in loco Q in Sphæroidem vel terram ad gravitatem in Sphæras radiis *b* & *B* deſcriptas erunt ut $\frac{3r-2b}{r}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho}$. 2°. Gravitas in Sphæras quarum ſunt radii *b* & *B* eſt ad gravitatem in Sphæras radiis AC deſcriptas ut radiùs *b* ad *r*, & *B* ad ϱ, ideóque rationes gravitatis in ſphæras radiis PQ deſcriptas ad gravitates in ſphæras radiis AC deſcriptas erunt ut $\frac{b}{r}$ ad $\frac{B}{\varrho}$.

3°. Gravitas in ſphæras radiis AC deſcriptas eſt ad Gravitatem in Ellipſoides convolutione Ellipſium APBQ circa AC deſcriptas ut $\frac{2r}{3}$ ad $\frac{6rb-4rr}{3b}$, ſi agatur de fictitio Sphæroide, aut ut $\frac{2\varrho}{3}$ ad $\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}$ ubi agitur de terrâ; Et quoniam attractio ſphæroidis fictitii aut terræ eſt media proportionalis inter has attractiones, erit gravitas in ſphæram ad Gravitatem in A in ſphæroidem, ut $\sqrt{\frac{2r}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6rb-4}{3b}}$ & gravitas in ſphæram ad Gravitatem quæ eſt in A in terram ipſam ut $\sqrt{\frac{2\varrho}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}}$, ideóque rationes gravitatum in ſphæras ad gravitates in ſphæroidem & in terram erunt ut

DE MUNDI SYSTEMATE. ræ semidiameter mediocris, juxta mensuram *Picarti*, sit pedum Parisiensium 19615800, seu milliarium 3923,16 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos excessu pedum 85472, seu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si

82. $\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$ reductis fractionibus ad minimos terminos.

Hinc tandem compositis omnibus rationibus, Rationes gravitatum in punctis Q tam sphæroideos fictitii quam terræ, ad gravitates in punctis A eorum erunt ut $\frac{3r-2b}{\varrho} \times \frac{b}{r} \times \sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho} \times \frac{B}{\varrho}\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$.

Rursus in fictitio sphæroide ratio magnitudinis crurum exprimitur per $\frac{b}{r}$ & in terrâ per $\frac{B}{\varrho}$; per quas quantitates ducantur rationes gravitatis & habebuntur rationes ponderum quæ ideo erunt ut $\frac{3r-2b}{r} \times \frac{b^2}{r^2}\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2}\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$; Inde cum differentia quantitatum r & b, ϱ & B non sit magna, numeratores $3r-2b$ aut $3\varrho-2B$; pro r ac ϱ sumi possunt & denominatores $3b-2r$, $3B-2\varrho$ pro b & B, ideóque rationes ponderum fiunt ut $\frac{r}{r} \times \frac{b^2}{r^2} \times \sqrt{\frac{b}{b}}$, ad $\frac{\varrho}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2} \times \sqrt{\frac{B}{B}}$ sive ut $\frac{b^2}{r^2}$ ad $\frac{B^2}{\varrho^2}$. Vel, invertendo, rationes ponderum in crure CA ad pondus in crure CQ sunt in sphæroide fictitio & in terrâ ut $\frac{r^2}{b^2}$ ad $\frac{\varrho^2}{B^2}$ quod si differentia Diametri r & axis fictitii b dicatur f; differentia Diametri ϱ & axis terræ B dicatur g hoc modo exprimentur rationes ponderum crurum CA & CQ. $\frac{b^2+2bf+ff}{bb}$ & $\frac{B^2+2Bg+gg}{B^2}$ erunt ergo rationes excessus ponderis in crure AC ad pondus totum cruris CQ ut $\frac{+2bf+ff}{bb}$ ad $\frac{+2Bg+gg}{B^2}$ sive deletis ff & gg quæ evanescunt respectu $2rf$ & $2\varrho g$; cùm differentiæ inter diametros & axes minimæ supponantur respectu earum diametrorum; erunt illæ rationes ut $\frac{2bf}{b^2}$ ad $\frac{2Bg}{B^2}$, sive ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, sed rationes excessus ponderum ad pondus cruris CQ sive ad pondus cruris AC (quod perinde est ob magnitudinem crurum & parvitatem excessus) æquales esse debent (ut jam dictum est) rationibus virium Centrifugarum ad gravitatem ipsam, quare, rationes illæ virium Centrifugarum ad gravitatem debent esse ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, sive ut rationes excessuum diametri Æquatoris supra Axes ad Axes, quæ quidem est proportio quam Newtonus assumit, cujus fundamentum ita deprehensum est: hinc Vis Centrifuga quæ est $\frac{4}{505}$ ponderis totius, est ad Vim Centrifugam quæ est $\frac{1}{289}$ ponderis totius ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$ sive ut $\frac{f}{b}$ ad $\frac{g}{B}$, sed dum b est 100. est $f=1$, ergo est $\frac{g}{B} = \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{289}}{\frac{4}{505}}$ sive $\frac{505}{115600} = \frac{1}{229}$.

(a) Si planeta major sit vel minor quam terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et si densitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, & differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, jupiter autem horis 9 56′, sintque temporum quadrata

(a) 86. *Si planeta major sit vel minor quam terrâ manente ejus densitate ac tempore Periodico revolutionis diurnæ, manet proportio vis Centrifugæ ad gravitatem.* * Manere Rationem vis Centrifugæ ad gravitatem liquet ex nota 85. sive ex Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.; nam manente tempore Periodico crescit Vis Centrifuga in ratione distantiarum, sed crescit etiam gravitas acceleratrix in ratione distantiarum (Cor. 3. Prop. XCI. lib 1.) ergo in eadem ratione crescunt vis Centrifuga & gravitas ideóque in eâdem ratione manent ac prius.

Propterea manebit proportio diametri inter Polos ad diametrum secundum Æquatorem, quippe, per notam præcedentem z, Ratio vis Centrifugæ ad gravitatem est ut ratio excessus Diametri Æquatoris super longitudinem Axeos; manente ergo priori ratione per hypothesim manebit & ista.

Si acceleretur vel retardetur motus diurnus ut tempus Periodicum fit majus vel minus, vis centrifuga crescit reciprocè ut quadrata temporum Periodicorum manentibus radiis (Cor. 2. Prop. IV. lib. 1.) inde manentibus gravitatibus & Diametris majoribus vel minoribus, liquet (ex notâ illâ z.) numeratores, fractionum $\frac{f}{b}$ & $\frac{g}{B}$, nempe excessus Diametrorum, crescere secundum rationem virium centrifugarum, hoc est, ut quadrata temporum Periodicorum inversè, aut ut quadrata Celeritatum directè, hinc ait Newtonus *differentia diametrorum* (quæ differentiæ exprimuntur per f & g) *augebitur vel minuetur in ea ratione duplicatâ celeritatum quamproximè.* 83.

Et si densitas planetæ augeatur, gravitas augebitur in eâdem ratione hinc ratio vis Centrifugæ manente radio & celeritate manentis, ad gravitatem minuetur; ideóque minueter ratio differentiæ Diametrorum ad ipsas Diametros.

Et in genere dicatur Radius terræ R, ejus densitas D, tempus Periodicum T, in altero Planeta litteris iisdem sed minoribus eadem exprimantur erit $\frac{\frac{R}{TT}}{DR}$ ad $\frac{\frac{r}{tt}}{dr}$ sicut $\frac{1}{229}$ ad differentiam inter Diametros Æquatoris & Axis Planetæ quæ itaque erit $\frac{1}{229} \times \frac{D \times TT}{d \times tt}$.

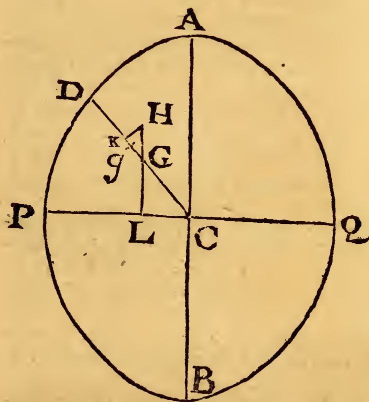
DE MUNDI SYSTEMATE. drata ut 29 ad 5, & (b) revolventium densitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, seu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Est igitur diameter jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Unde cum ejus diameter major sit $37''$, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit $33''.\ 25'''$. (c) Pro luce erraticâ addantur $3''$ circiter, & hujus planetæ diametri apparentes evadent $40''$ & $36''.\ 25'''$: quæ sunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproximè. Hoc ita se habet ex hypothesi quòd corpus jovis sit uniformiter densum. (d) At si corpus ejus sit densius versus planum æquatoris quam versus polos, diametri ejus possunt

(b) * *Et revolventium densitates.* (prop. 8. lib. hujus.).

(c) * *Pro luce erraticâ.* (53).

(d) * *At si corpus ejus.* Ille enim excessus densitatis in plano æquatoris facit ut ibi major sit gravitas ac proindè ibi minor requiratur altitudo ad compensandam vim Centrifugam unde minuitur diametrorum differentia (ut patet ex notis præced.).

§ 3. 84. Lubet hic referre formulam quâ, in hypothesi gravitatis proportionalis cuilibet dignitati distantiarum à centro, simulque quod ejus actio ad id centrum dirigatur, diametrorum proportio inveniri potest: Sit semidiameter secundum æquatorem $AC = a$, radius variabilis $CD = r$ sinus anguli $DCP = h$, posito sinu toto $= 1$. Sit gravitas in loco $A = p$ vis centrifuga in eodem loco $= f$, ponaturque gravitas versùs centrum C tendens dignitati cuilibet n distantiarum à centro proportionalis, erit gravitas in A ad gravitatem in D ut a^n ad r^n, ideóque gravitas in $D = \frac{pr^n}{a^n}$. Quoniam vires centrifugæ in locis A & G, sunt in ratione distantiarum CA, LG, erit vis centrifuga in $G = \frac{f \times LG}{CA}$; sed $LG : CG = h : 1$ ideóque $LG = CG \times h$, undè vis centrifuga in G, fit $= \frac{fh \times CG}{CA}$; sit autem vis illa $= GH$. Quoniam vis cen-



trifuga quæ agit secundum directionem GH, non minuit gravitatem versùs centrum C, nisi in quantùm agit secundum directionem DC, resolvatur vis centrifuga GH in vires laterales KH, GH; est

sunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel forte 14 ad 13. Et *Cassinus* quidem anno 1691 observavit, quod jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram superaret parte sui circiter decimâ quintâ: *Poundus* autem noster telescopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros jovis anno 1719, mensuravit ut sequitur. *Tem-*

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

est autem GH : GK vel $1 : h = \frac{fh \times CG}{CA} : GK$, quarè $GK = \frac{fhh \times r}{a}$, ideóque pondus cylindruli $Gg = \frac{pr^n dr}{a^n} - \frac{fhhrdr}{a}$. Sumptisque fluentibus, pondus totum fluidi in crure $DC = \frac{pr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhh \times rr}{2a}$. Simili argumento, quia gravitas in $A = p$, erit gravitas in alio quolibet loco cruris CA $= \frac{px^n}{a^n}$, si nempè distantia à centro dicatur x; vis autem centrifuga $= \frac{fx}{a}$, & pondus Cylindruli manebit $\frac{px^n dx}{a^n} - \frac{fxdx}{a}$ cujus fluens $\frac{px^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fx^2}{2a}$ undè pondus totum fluidi in crure CA, est $\frac{pa^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa^2}{2a}$ jam verò quia fluidum in utroque crure CA, CD consistere debet in æquilibrio, oportet ut pondera sint æqualia ac proindè, $\frac{pa^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa}{2} = \frac{pr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhhrr}{2a}$, undè eruitur $2pr^{n+1} - (n+1)fhha^{n-1}rr = (2p - nf - f)a^{n+1}$. Ope hujus æquationis facilè invenitur diametrorum proportio, si enim fiat $h = 0$, radius r abit in CP, habeturque $2pr^{n+1} = (2p - nf - f)a^{n+1}$, hoc est, $CA : CP = (2p)^{\frac{1}{n+1}} : (2p - nf - f)^{\frac{1}{n+1}}$.

In hypothesi gravitatis uniformis, fit $n = 0$, ideóque $CA : CP = 2p : 2p - f$. Quoniam verò in terrâ gravitas est ad vim centrifugam ut 289 ad 1, erit $CA : CP = 578 : 577$, prout Hugenius invenit. At in hypothesi gravitatis in ratione duplicatâ distantiarum à centro decrescentis, erit $n = -2$, ideóque $CA : CP = 2p + f : 2p = 579 : 578$. 85.

* 85. Verùm duæ Hypotheses in hâc formulâ invenienda assumptæ cum rei natura & Newtoniano systemate neutiquam quadrant, ideóque locum habere nequeunt: Primùm enim Gravitatem ad Centrum terræ dirigi verum non est si terra sit sphærois qualiscumque, quippe ex ipso facto constat gravitatis directionem esse perpendicularem superficiei aquarum, sive esse perpendicularem curvæ quam meridianus quilibet affectat; sed perpendiculares ad curvam à circulo diversam ad ejus curvæ centrum neutiquam tendunt nisi in solâ axium extremitate.

2°. Gravitatis quantitas in variis punctis superficiei solidi ratione curvæ alicujus geniti non sequitur rationem ullius dignitatis distantiarum à centro, sed aliam omnino Legem juxta formam solidi, hoc est, juxta naturam curvæ illius quam meridianus affectat & locum in quo corpusculum attrahendum locatur, ut satis liquet ex eo artificio quo Newtonus usus est ad determinandam rationem gravitatis in puncto A ad gravitatem in puncto Q, unde gravitatis in variis locis proportio non per dignitatem aliquam distantiarum, sed per rationes serierum quales eas in Nota (r) invenimus sunt exhibendæ; quamvis ergo verum sit in systemate Newtoniano gravitatem decrescere ut quadrata distantiarum à quocumque corpore collecto in centro suæ gravitatis quasi in uno puncto, idem verum non erit si id corpus figurâ sphærica non donetur, & corpusculum attrahendum juxta diversas partes ejus solidi collocetur, hinc ubi in formandâ generali formulâ assumitur quod gravitas in A sit ad gravitatem in D ut a^n ad r^n ideóque gravitatem in D esse pr^n

DE MUNDI SYSTEMATE.

Tempora.	Diam. max.	Diam. min.	Diametri ad invicem.
dies hor.	part.	part.	
Jan. 28 6	13,40	12,28	ut 12 ad 11
Mar. 6 7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$ $12\frac{3}{4}$
Mar. 9 7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$ $11\frac{2}{3}$
Apr. 9 0	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$ $13\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incalescunt ad lucem solis versus æquatores suos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quam versus polos.

Quin-

86. $\frac{pr^n}{a^n}$, id omninò adversus Theoriam gravitatis Newtonianam deducitur; quod autem hæc formula non multum à vero aberret, oritur ex eo quod reverâ figura terræ à sphærâ per parùm discrepet.

86. Vis centripeta vel centrifuga corporis circulum describentis est in ratione directâ radii & duplicatâ inversâ temporis periodici (cor. 2. prop. 4. lib. 1.). Quare si distantia planetæ à centro Solis vel distantia satellitis à centro planetæ primarii dicatur D tempus periodicum T radius ipsius Planetæ circà quem motu diurno revolvitur R, gravitas versùs centrum revolutionis erit $\frac{D}{TT}$; Si autem hæc gravitas crescat in ratione duplicatâ inversâ distantiarum, erit gravitas planetæ in eo in quo nunc versari supponitur loco, ad illius gravitatem, si positus fingeretur in superficie corporis centralis circà quod revolvitur ut RR ad DD, ideóque foret gravitas planetæ in superficie hujus corporis ut $\frac{D^3}{RRTT}$. Jam verò cum vis centrifuga planetæ positi in æquatore corporis circà quod revolvitur sit in ratione directâ radii hujus planetæ & inversâ duplicatâ temporis revolutionis circà axem, si tempus periodicum circà axem dicatur t vis centrifuga F, erit $F = \frac{R}{tt}$ undè si vis gravitatis in superficie corporis centralis dicatur P, erit $P : F = \frac{D^3}{RRTT} : \frac{R}{tt} = D^3 \times tt : R^3 \times TT$.

90. Distantia D, quarti satellitis jovialis à centro planetæ primarii fit 26.63 semid. jovis, prout à Newtono in fine Phænomeni II determinantur & tempus periodicum $T = 16$ dieb. 18^h. 5′ 7″ prout à Cassino in novis Elementis Astron. traduntur. Semidiameter jovis $R = 1$, tempus periodicum jovis circà axem $t = 9^h$. 55′ 52″ posito in formulâ generali (87) $n = -2$, habetur $CA : CP = 2p + f : 2p$, vel $CA - CP : CP = f : 2p$, aut $CA - CP : CP = R^3\,TT : 2\,D^3\,tt$, erit itaque in hâc hypothesi gravitatis pro jove $CA - CP : CP = 1 : \frac{2\,D^3 \times tt}{TT} = 1 : 11\frac{1}{2}$, quæ differentia inter semidiametrum secundum æquatorem jovis & semidiametrum inter polos quamproxime æqualis est differentiæ quam Newtonus ex suâ methodo derivavit.

Sit mediocris distantia Lunæ à terrâ $D = 60$ semid. terrestr. tempus periodicum Lunæ = 27 dieb. 7^{hor}. 43′, semid. terræ = 1, tempus revolutionis terræ circà axem = 23^{hor}. 56′ 4″. erit gravitas ad vim centrifugam ut 288 ad 1. Undè pro terrâ foret $CA - CP : CP = 1 : 576$: terra itaque minùs compressa foret quam à New-

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam terræ nostræ minui sub æquatore, atque ideo terram ibi altius surgere quam ad polos (si materia ejus uniformiter densa sit) patebit per experimenta pendulorum quæ recensentur in propositione sequente.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

Newtono definitum est, magis tamen quam determinatum est ab Hugenio, verum ob actionem Solis in Lunam, tempus ejus Periodicum non respondet accuratè vi centrifugæ terræ; talias correctiones hujus calculi invenies Transf. Philos. N°. 438 quibus ad Newtonianam proportionem magis accuratè revocatur. De hâc Quæstione nobilissimâ procul dubio legantur quæ de telluris figurâ dederunt Clarissimi Viri D. De Mairan in monumentis Paris. an. 1720. D. De Maupertuis ibidem an. 1733. 1734. 1735. 1736. & in duobus opusculis quorum unum de figuris corporum cælestium, alterum de figurâ telluris inscribitur. Præclara quoque de eodem argumento ediderunt D. Clairaut in monumentis Parisiensibus an. 1735. & in Transactionibus Philosophicis num. 445. & 449. D. Bouguer ibid. an. 1736. D. Eustachius Manfredius ibid. an. 1734. & D. Stirling in transactionibus Anglicis an. 1735.

* Viam sternet ad determinandam figuram terræ ortam ex necessitate æquilibrii vis centrifugæ & vis gravitatis singularum ejus partium, si generalissimè solvatur Probl. XLV. (Prop. XCI. Lib. I.) Newtoni, nempe, si inveniatur attractio corpusculi non solùm *siti in axe* solidi rotundi, sed siti ubivis in ejus superficie, cujus Problematis Analysim hic in compendium trademus.

PROBLEMA.

Datâ Æquatione curvæ cujuscumque quæ circa axim revolvendo solidum describat invenire attractionem corpusculi siti in quocumque puncto superficiei ejus solidi.

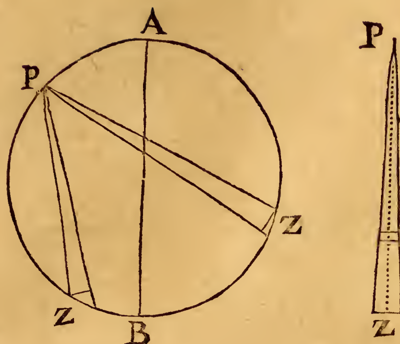
Constructio. Fingatur Planum tangens id solidum in P, & super eo plano, è puncto P ut centro descripta intelligatur sphæra radio infinitè parvo, dividatur tota superficies hemisphærii versus solidum conversi in portiunculas æquales, & concipiantur Pyramides (quarum vertices sint in centro sphæræ) illis portiunculis insistentes & inde ad solidi ipsius oppositam superficiem continuatæ, puta in Z, Z, terminentur illæ Pyramides in eo solido per Bases parallelas Basibus ipsarum sphæræ circumscriptis; Corpusculi in puncto P siti attractio ab omnibus illis Pyramidibus, concipi poterit ut attractio à toto solido, exiguæ enim ejus solidi portiones quæ in extremitate unius cujusque Pyramidis negliguntur sunt ubique totius Pyramidis respectu infinitè parvæ.

90.

Attractio autem corpusculi P à singulâ Pyramide erit ubique ut axis PZ ejus Pyramidis; Nam ducantur ubivis in axe, duo puncta infinitè proxima, ducanturque per ea superficies duæ, parallelæ Basi Pyramidis, sive, quod idem est, parallelæ superficiei sphæræ circa P descriptæ, exiguum solidum inter eas superficies contentum crescet ut illæ superficies sive ut quadratum portionis axeos abscissæ, sed cum attractio singulæ particulæ decrescat ut quadratum distantiæ à puncto P, sive decrescat ut quadratum abscissæ; ideóque crescat particularum quantitas ut decrescit singulæ particulæ vis, evenit ut attractio ejus solidi ubivis in axe PZ sumpti eadem semper sit; æqualis, erit v. gr. attractioni solidi cujus basis foret portio superficiei sphæ-

De Mundi Systemate.

90.

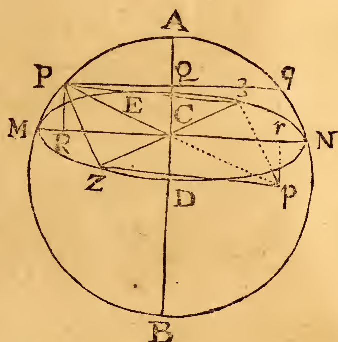


ræ intra Pyramidem contentæ, & altitudo illa quam minima axeos P Z portio assumpta. Hinc attractio totius Pyramidis erit attractio ejus parvi solidi, toties repetita quot sunt axeos P Z portiunculæ; Cum itaque portio superficiei sphæræ intra Pyramides contenta, sit ubivis eadem, ex Conſt., attractiones singularum Pyramidum erunt ut numerus particularum æqualium in singulo axe P Z assumendarum, sive quod idem est, ut singuli axes P Z.

His positis: sit M D N E unus è circulis genitis in solido proposito per revolutionem ordinatæ C M circa axim A B. Dico quod attractio puncti P ab omnibus Pyramidibus quarum axes in circumferentia circuli M D N E terminantur, (quæ est ut summa omnium axium P Z ad eam circumferentiam terminatorum) est ut linea P C à puncto P ad centrum ejus circuli C ductæ, multiplicata per numerum axium P Z ad circumferentiam M D N E pervenientium: (missis nempe singularum P Z longitudinibus).

Assumatur enim in circumferentia MDNE punctum quodlibet Z, & ducta per centrum C linea Z C ʃ, ducatur P ʃ, ex demonstratis attractiones Pyramidum ad Z & ʃ pervenientium erunt ut P Z ad P ʃ; Ducatur ex P in circulum M D N E perpendiculum P R & per R & centrum C ducatur Diameter M R N, sumptaque N r = M R demittatur perpendiculum r p, sitque r p = R P, linea M N, P R & r p sunt in eodem plano (per 6. XI. Elem.) ideoque linea P p secabit lineam M N, & cum Triangula P R C, p r C sint æqualia propter r p = R P, angulos rectos, & angulos per verticem oppositos, sitque N r = M R linea P p transibit per centrum C; erit etiam linea P p in plano Trianguli Z P ʃ cum habeat puncta P & C in eo plano; inde si jungantur lineæ Z p, ʃ p, tota figura P Z p ʃ erit in eodem Plano, & propter æquales P C, p C; Z C, C ʃ & angulos interceptos per verticem oppositos lineæ P Z, p ʃ erunt æquales, ut & lineæ P ʃ, p Z, hinc figura P Z p ʃ est Parallelogramma cujus P p sive 2 P C est Diagonalis; Quare cum Pyramides trahant secundum directiones P Z, P ʃ, viribus quæ sunt ut P Z ad P ʃ, vis inde resultans, dirigetur secundum Diagonalem P p, sive 2 P C, eique erit proportionalis.

Quod cum ita sit de omnibus punctis Z in circumferentiâ M D N E sumendis, attractio puncti P ab omnibus paribus Pyramidum in circumferentiâ ejus circuli terminatarum, erit ut 2 P C multiplicata per numerum parium earum Pyramidum;



sive erit ut P C ipsa multiplicata per numerum omnium P Z ad circumferentiam M D N E terminatarum.

Denique ut obtineatur numerus earum linearum P Z ad circumferentiam quamlibet M D N E terminatarum, observandum est, eas lineas egredientes ab Hemisphærio circa P descripto, in ejus superficie signare lineam curvam (duplicis quidem curvaturæ quando P non imminet perpendicula-

dicularitur centro C, isto enim in casu signarent circulum) & propter æqualitatem distantiæ concursus eorum axium cum superficie Hemisphærii (ex constructione) numerus earum linearum erit ut longitudo ejus lineæ curvæ in superficie Hemisphærii signatæ; huc ergo redit tota quæstio, ut, Dato puncto P ejusque ordinata PQ ad axem solidi rotundi, sumptâque ut libet abscissâ AC, ejus ordinata CM, & circulo MDNE ejus ordinatæ convolutione descripto, inveniatur longitudo curvæ descriptæ in superficie sphæræ (cujus radius PS ad lubitum assumitur) per intersectionem Coni inclinati cujus vertex est P, basis vero MDNE.

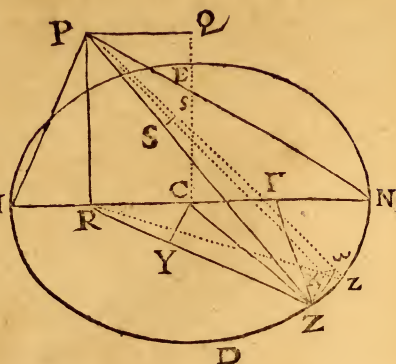
Ut longitudo seu rectificatio ejus curvæ obtineatur, Ducantur à puncto P ad duo puncta proxima peripheriæ MDNE, lineæ PZ, Pz; Abscissa circuli secundum Diametrum à puncto N remotiori à puncto P sumatur, sintque NΓ & ΓZ abscissa & ordinata circuli respondentes puncto Z, dicatur NΓ, x, ΓZ, y; Zz, dv; tota Diameter MN, f, duplum ordinatæ PQ sit g, denique si centro P Radio PS describatur arcus Ss ille arcus Ss erit elementum curvæ quæsitæ respondens Elemento circuli dv. Ex P, ut prius, demittatur in circulum MDNE perpendiculum PR, erit $RC = PQ = \frac{g}{2}$, ex R ducantur lineæ RZ & Rz, & centro C radio RZ describatur arcus ZK ut sit RK = RZ, ex centro C ducatur ad Z Radius CZ, & perpendiculum CY in lineam RZ, Dico 1°. quod Triangulus RCY est similis Triangulo RZΓ, ob angulum in R communem, & rectos Γ & Y, unde est RZ ad ZΓ (y) sicut RC ($\frac{g}{2}$) ad CY quod erit ergo $\frac{gy}{2RZ}$; 2°. Triangulus CZY est similis Triangulo ZKz; Nam angulus RZK est rectus per Constr. quoniam Triangulus RZK est Isosceles, Angulus vero CZz est etiam rectus per naturam circuli, unde dempto communi CZK manent æquales anguli CZY & KZz, præterea anguli in Y & K sunt recti: erit ergo Radius CZ ($\frac{f}{2}$) ad CY ($\frac{gy}{2RZ}$) sicut Zz (dv) ad KZ quod erit ergo $\frac{gy}{RZ \times f} dv$.

3°. Ducatur ex P linea PK ea erit æqualis lineæ PZ nam Trianguli PRZ, PRK erunt æquales ob communem PR, 90.
æquales per Const. RZ & RK, & angulos in R rectos (per 4. XI. Elem.); hinc si radio PK, centro P describatur arcus Kω, erit Pω = PZ & arcus Zω similis erit elemento quæsito Ss, & Triangulus Zzω Rectangulus erit in ω.

Porro, Triangulus Kωz erit similis triangulo PRz ob angulum communem in z, & Rectos in R & ω, sive similis erit triangulo PRZ, ideoque fiat ut PZ ad RZ ita KZ sive $\frac{gy}{RZ \times f} dv$ ad ωz quod erit itaque $\frac{gy}{PZ \times f} dv$.

4°. In Triangulo Zzω, Rectangulo in ω cum Zz sit dv & ωZ sit $\frac{gy}{PZ \times f} dv$ erit quadratum Zω sive $\overline{Z\omega}^2 = dv^2 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2} dv^2$ & cum sit PZ ad PS sicut Zω ad Ss erit PZ² ad PS² sicut $\overline{Z\omega}^2$ sive $\overline{1 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2}} dv^2$ ad Ss² ergo quadratum Elementi curvæ quæsitæ est $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{1 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2}} dv^2$: Quod erat Inveniendum.

90. Ut autem Integretur, primò notandum quod ex Natura circuli Elementum dv sit æquale Elemento $dx \times \frac{f}{2y}$, ideoque quadratum Elementi inventum evadet $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g^2}{4PZ^2}} \times dx^2$: Præterea est $PZ^2 = PR^2 + RZ^2$, & est $RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2$ est autem, ex constructione, $R\Gamma = RN - N\Gamma = \frac{g+f}{2} - x$ ideoque $R\Gamma^2 = \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx - fx + xx$ estque $\Gamma Z^2 = fx - xx$, ideo $(RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2) = \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx$ & $PZ^2 = PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx$; sed est $PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 = PR^2 + RN^2 = PN^2$, ergo $PZ^2 = PN^2 - gx$, & si ad compendium tertia proportionalis ad $2\,PQ$ (sive g) & PN dicatur l ut sit $PN^2 = gl$ fiet $PZ^2 = gl - gx$ sicque, quadratum elementi quæsiti evadet $\frac{PS^2}{gl - gx} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g}{4 \times l - x}} \times dx^2$, sive cum y^2 sit $fx - xx$ erit illud quadratum $\frac{PS^2}{4g \times l - x} dx^2 \times \frac{f^2}{x \times f - x} - \frac{g}{l - x}$.



Dividatur autem f^2 per $x \times f - x$ fit $\frac{f}{x} + 1 + \frac{x}{f} + \frac{x^2}{f^2} + \frac{x^3}{f^3}$ &c.

Dividatur g per $l - x$ fit - - - $\frac{g}{l} + \frac{gx}{l^2} + \frac{gx^2}{l^3} + \frac{gx^3}{l^4}$ &c.

Differentia serierum fiet $\frac{f}{x} + \frac{l-g}{l} + \frac{l^2 - fg}{l^2 f} x + \frac{l^3 - f^2 g}{l^3 f^2} x^2 + \frac{l^4 - f^3 g}{l^4 f^3} x^3$ &c.

Divid. ea differ. per $l-x$ fit $\frac{f}{lx} + \frac{l+f-g}{l^2} + \frac{l^2 + lf + f^2 - 2fg}{l^3 f} x + \frac{l^3 + l^2 f + lf^2 + f^3 - 3fg}{l^4 f^2} x^2$ &c.

Unde quadratum elementi Ss est $dx^2 \times \frac{PS^2 \times f}{4gl} \times \frac{1}{x} + \frac{l+f-g}{lf} + \frac{l^2 + lf + f^2 - 2fg}{l^2 f^2} x + \frac{l^3 + l^2 f + lf^2 + f^3 - 3fg}{l^3 f^3} x^2$ &c. quæ series ad lubitum continuari potest.

Exprimatur autem curvæ quæsitæ longitudo per hanc seriem cujus coefficientes sunt indeterminati $Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} + Dx^{\frac{7}{2}} + Ex^{\frac{9}{2}} +$ &c.

ejus fluxio erit $dx \times \frac{1}{2} Ax^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} Bx^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} Cx^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2} Dx^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2} Ex^{\frac{7}{2}} +$ &c. cujus quadratum erit

$$dx^2 \times \tfrac{1}{4} A^2 x^{-1} + \tfrac{3}{2} AB + \tfrac{5}{2} ACx + \tfrac{7}{2} ADx^2 + \tfrac{9}{2} AEx^3 + \tfrac{11}{2} AFx^4$$
$$+ \tfrac{9}{4} B^2 x + \tfrac{15}{2} BCx^2 + \tfrac{21}{2} BDx^3 + \tfrac{27}{2} BEx^4 \quad \text{\&c.}$$
$$+ \tfrac{25}{4} CCx^3 + \tfrac{35}{2} CDx^4$$

Col-

Collatis verò terminis seriei inventæ cum terminis correspondentibus hujus seriei fictitiæ invenietur $A = \frac{PS\sqrt{f}}{\sqrt{gl}}$

$$B = A \times \frac{l+f-g}{6lf}$$

$$C = A \times \frac{\begin{array}{r} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ + 2lg - 6fg \\ - g^2 \end{array}}{2.\,4.\,5\,l^2 f^2}$$ 90.

$$D = A \times \frac{\begin{array}{r} 10l^3 + 6fl^2 + 6f^2 l + 10f^3 \\ + 2gl^2 + 12fgl - 30f^2 g \\ + 6g^2 l - 10fg^2 \\ - 2g^3 \end{array}}{2.\,4.\,4.\,7\,l^3 f^3}$$

$$E = A \times \frac{\begin{array}{r} 35l^4 + 20fl^3 + 18f^2 l^2 + 20f^3 l + 35f^4 \\ + 4gl^3 + 12fgl^2 + 60f^2 gl - 140f^3 g \\ - 6g^2 l^2 + 60fg^2 l - 70f^2 g^2 \\ + 20g^3 l - 28fg^3 \\ - 5g^4 \end{array}}{2.\,4.\,4.\,4.\,9\,l^4 f^4} \quad \&c.$$

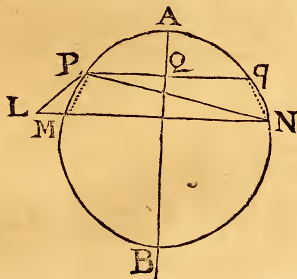
Hinc series quæ exprimit longitudinem curvæ quæsitæ fit

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}} \sqrt{f} \times x^{\frac{1}{2}} + \frac{l+f-g}{2.\,3\,lf} x^{\frac{3}{2}} + \frac{\begin{array}{r} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ + 2lg - 6fg \\ - gg \end{array}}{2.\,4.\,5\,l^2 f^2} x^{\frac{5}{2}} + \&c.$$

Si autem talis fit curva; ut PN sit ubique major quam g scribatur loco x longitudo f, sive Diameter circuli, & habebitur valor dimidii curvæ quæsitæ, quod respondet semicirculo MDN: est ergo ea semi-curva,

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}} \times f \times 1 + \frac{l+f-g}{2.\,3\,l} + \frac{\begin{array}{r} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ + 2lg - 6fg \\ - gg \end{array}}{2.\,4.\,5\,l^2} \ \&c.$$

In hoc autem casu quantitas l sive $\frac{PN^2}{g}$ est major quam f, majorem esse quam g ex hypothesi hujus casus sequitur, cum PN supponatur major quam g; majorem autem esse l quam f hinc liquèt, ductâ in Trapezio PqNM diagonali PN fiat in P super PN à parte lineæ PM angulus NPL æqualis angulo q, ita ut occurrat PL lineæ NM, dico lineam NL esse longiorem quam NM, nam anguli MPq & q sunt æquales, sed angulus NPL est æqualis angulo q ergo angulus NPL cum angulo NPq major est angulo qPM, cadit ergo L ultrà M; sive NL est major NM; est autem NL æquale l nam Trianguli PqN & PNL sunt similes ob angulos q & NPL æquales per const., angulosque NPq & PNL æquales ob parallelas Pq, MN, hinc ergo est Pq ad PN ut PN ad NL, sed est Pq sive g ad PN ut PN ad l, ergo est NL æqualis l & major quam f.



De Mundi Systemate.

Hinc, ut iſta ſeries convergat debent ita diſponi termini hujus ſeriei ut remotiores à primo ponantur ii in quibus creſcunt in Numeratore dimenſiones quantitatum f aut g, & in Denominatore dimenſiones quantitatis l, ideóque hanc habet formam.

90. $$\frac{PSf}{PN} \times 1$$
$$+ \frac{1}{2.3l} \times \overline{1+f-g}$$
$$+ \frac{1}{2.4.5l^2} \times \overline{3l^2 + 2fl + 2gl + 3f^2 - 6fg - g^2}$$
$$+ \frac{1}{2.4.4.7l^3} \times \overline{10l^3 + 6fl^2 + 2gl^2 + 6f^2l + 12fgl + 6g^2l + 10f^3 - 30f^2g - 10fg^2 - 2g^3}$$
$$+ \frac{1}{2.4.4.4.9l^4} \times \overline{35l^4 + 20fl^3 + 4gl^3 + 18f^2l^2 + 12fgl^2 - 6g^2l^2 + 20f^3l + 60f^2gl + 60fg^2l + 20g^3l + \&c.}$$
$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.11l^5} \times \overline{126l^5 + 70fl^4 + 10gl^4 + 60f^2l^3 + 24fgl^3 - 4g^2l^3 \&c.}$$
$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.4.13l^6} \times \overline{462l^6 + 252fl^5 + 28gl^5 \&c.}$$
$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.4.4.15l^7} \times \overline{1716l^7 + \&c.}$$
&c.

Ut autem hæc forma ad ſimpliciorem revocetur, notandum quod ubi eſt $g=0$ tunc $l=\infty$, ideóque omnes termini hujus ſeriei præter primam columnam evaneſcunt, quoniam continet altiſſimam dignitatem quantitatis l; ſed ubi $g=0$ tunc Conus PMDNE fit rectus, & curva inſcripta ſphæræ cujus radius eſt PS, eſt circulus cujus Diameter eſt ad f ſicut PS ad PN, unde is Diameter eſt $\frac{PS \times f}{PN}$; ideóque prima columna ſeriei quæ eo in caſu dimidium curvæ exprimit, continet rationem ſemi-circuli ad Diametrum 1. Ideo ſumma tota ejus columnæ $1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7}$ &c. eſt 1.5,079 &c. idque in quocumque valore quantitatis g, ſiquidem ea quantitas in eâ columnâ eliminatur.

Ad inveniendam ſummam ſecundæ columna, ea in duas dividatur partes quarum prior multiplicet $\frac{f}{l}$, altera $\frac{g}{l}$ ut habeatur ſummæ columnæ multiplicatæ per $\frac{f}{l}$ obſervandum quod ſinguli coefficientes primæ columnæ (primo termino 1 ſecluſo) ſunt ad coefficientes ſingulos ſecundæ columnæ ut numeri 1 ad 1, 3 ad 2, 5 ad 3, 7 ad 4, 9 ad 5, 11 ad 6, 13 ad 7 &c. quæ ratio tandem abit in rationem duplam, itaque hi coefficientes ſecundæ columnæ ſimul ſumpti dimidium efficiunt quantitatis .57079 additâ inſuper eâ quantitate quâ primi coefficientes ſecundæ columnæ excedunt dimidium coefficientium primæ, qui exceſſus celerrimè convergunt ſuntque

$$\frac{\frac{1}{2}}{2.3} + \frac{\frac{1}{2}}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{5}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{7}{2.4.4.4.4.11} + \frac{21}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{66}{2.4.4.4.4.4.4.15} \&c.$$

qui

qui termini sunt	.08333
	.01250
	.00446
	.00217
	.00124
	.00078
	.00053
	.10613
summa reliquorum	.00112
dimidium .57079	.28539
	.39152

Ut termini reliqui habeantur, fingi potest sequentes terminos decrescere in ratione duorum ultimò inventorum, unde summa omnium terminorum adjiciendorum erit .00112 proximè, hinc ea pars secundæ columnæ est $.39152 \frac{f}{l}$ proximè.

Hujus autem primæ partis secundæ columnæ coefficientes sunt ad coefficientes alterius partis ut -1 ad 1, $+1$ ad 1, 3 ad 1, 5 ad 1, 7 ad 1, 9 ad 1 &c., singuli autem erant ad suos excessus supra dimidium termini columnæ primæ ut 2 ad 1, 4 ad 1, 6 ad 1, 8 ad 1, 10 ad 1, 12 ad 1 &c., ergo coefficientes alterius partes istius columnæ sunt ad eos excessus ut 2 ad -1, 4 ad 1, 6 ad 3, 8 ad 5, 10 ad 7, quæ ratio tandem ad æqualitatem desinit; Ergo summa istius columnæ sumatur æqualis differentiolis supra inventis .10613, & insuper quantitatibus quibus inventi termini hujus columnæ excedunt eas differentiolas, quæ sunt 90.

$$\frac{-1\frac{1}{2}}{2.3}+\frac{1\frac{1}{2}}{2.4.5}+\frac{1}{2.4.4.7}+\frac{\frac{3}{2}}{2.4.4.4.9}+\frac{3}{2.4.4.4.4.11}+\frac{7}{2.4.4.4.4.4.13}+\frac{18}{2.4.4.4.4.4.4.15}$$

sive	$-$ .25
	$+$ .03750
	$+$ .00446
	$+$ .00130
	$+$ .00053
	$+$ .00026
	$+$ .00014
	$-$ .20581
sum. reliq.	16
sum. differ.	$+$ .10613
	$-.09952 \frac{g}{l}$

Unde summâ terminorum ejus columnæ est $-.09952 \frac{g}{l}$ proximè

Termini tertiæ columnæ summati evadunt $+0.1379 \frac{f^2}{l^2} - 0.0621 \frac{fg}{l^2} + 0.0057 \frac{g^2}{l^2}$

Termini quartæ sunt $+0.07265 \frac{f^3}{l^3} - 0.07119 \frac{f^2 g}{l^3} - 0.0032 \frac{fg^2}{l^3} + 0.03353 \frac{g^3}{l^3}$

Term. quintæ sunt $+0.04965 \frac{f^4}{l^4} - 0.00444 \frac{f^3 g}{l^4} - 0.05586 \frac{f^2 g^2}{l^4} + 0.06380 \frac{fg^3}{l^4} + 0.015 \frac{g^4}{l^4}$

T. sextæ sunt $+0.07469 \frac{f^5}{l^5} - 0.14589 \frac{f^4 g}{l^5} - 0.11563 \frac{f^3 g^2}{l^5} - 0.06938 \frac{f^2 g^3}{l^5} - 0.01376 \frac{fg^4}{l^5} - 0.00385 \frac{g^5}{l^5}$

In hoc casu ubi l est major quam g aut f, ex istis terminis sufficiens convergentia obtinetur, ut pro vero valore curvæ, hi termini imo & pauciores assumi possint reliquis omissis; Quoniam ergo invenimus attractionem puncti P à circulo MDNE esse ut PC ductum in numerum linearum PZ in circumferentia MDNE terminatarum, sive ut PC ductum in curvam quæ in superficie sphæræ intercipitur inter lineas PZ, si in singulo puncto C, axeos AB erigatur ordinata quæ sit ut

PC

De Mundi Systemate.

90.

$$\frac{PC}{PN} \times MN \times 1.[illegible]079 + 0.39125\frac{f}{l} + 0.1379\frac{f^2}{l^2} + 0.0726\frac{f^3}{l^3}$$
$$-0.09952\frac{g}{l} - 0.0621\frac{fg}{l^2} - 0.0722\frac{f^2 g}{l^3} \text{ \&c.}$$
$$+0.0057 - \frac{g^2}{l^3} - 0.0032\frac{fg^2}{l^3}$$
$$+0.03353\frac{g^3}{l^3}$$

& per vertices earum ordinatarum curva ducta intelligatur, exprimet ejus area attractionem puncti P, si modo in hoc valore inserantur quantitates ad curvam revolventem pertinentes; abscissa constans AQ dicatur a, ejus ordinata PQ $= \frac{g}{2}$ sit c, abscissa AC sit x, ordinata CM sit y, erit $PN^2 = \overline{x-a}^2 + \overline{y+c}^2$, ideóque $l = \frac{\overline{x-a}^2 + \overline{y+c}^2}{2c}$, & $PC = \sqrt{\overline{x-a}^2 + c^2}$.

Ex his & æquatione curvæ, determinari poterit punctum axeos in quo transibit circulus talis ut attractio cis eum circulum æqualis sit attractioni ultra eum circulum, sive punctum axeos ad quod tendit media directio gravitatis hinc ejus obliquitas ad perpendiculum in curvam obtinebitur.

Sed cum hæc duntaxat valeant cum g sive PQq numquam major est quam PN, generalior alia est solutio, sed cujus calculus paulo prolixior videbitur.

2dus. Casus, si talis sit curva ut incertum sit utrum PN numquam sit minor quam PQq sive g.

Ducatur per punctum P linea quæ angulum NPM in duos angulos æquales dividat, & occurrat lineæ MN in puncto X, erit (per 3. VI. Elem.) PN + PM ad NM ut PN ad NX quod erit ergo $\frac{PN \times f}{PN + PM}$; scribatur is valor loco x in serie quæ exprimit longitudinem curvæ propositæ ea evadet

$$\frac{PS \times f}{\sqrt{PN \times \overline{PN + PM}}} \times 1 + \frac{l + f - g}{2.3.\, l \times \overline{PN + PM}} PN + \frac{3l^2 + 2lf + 3f^2 + 2lg - 6fg - gg}{2.4.5\, l^2 \times \overline{PN + PM}^2} PN^2 \text{ \&c.}$$

quæ series in omni casu convergit propter quantitatis PN + PM dignitates in denominatore positas quæ quantitas semper major est quam PN, f & g in numeratore positas (per 20. 1i. Elem.), imo si loco l ponatur ejus valor $\frac{PN^2}{g}$ fiatque reductio series evadet

$$\frac{PS \times f}{\sqrt{PN \times \overline{PN + PM}}} \times 1 + \frac{PN^2 + fg - g^2}{2.3.\, PN \times \overline{PN + PM}} + \frac{3PN^4 + 2PN^2 gf + 3f^2 g^2 + 2PN^2 gg - 6fg^3 - g^4}{2.4.5.\, PN^2 \times \overline{PN + PM}^2} \text{ \&c.}$$

Sumt

Cum autem in Triangulo P N q, vel in Triangulo P M N, P N + M N ſit ſumma laterum & P N numquam ſit minimum latus, demonſtrabitur facilè quod Rectangulum P N per P M + P N, eſt majus Rectangulis aut quadratis factis ex reliquis lateribus P N, P q vel M N, unde in quocumque caſu hæc ſeries tam reſpectu litteralium quantitatum quàm reſpectu numerorum coefficientium erit convergens, idque ſatis promptè, ſiquidem duobus gradibus creſcunt dimenſiones ab uno termino ad alterum

Portio autem curvæ quæſitæ reſpondens tali abſciſſæ, eſt accuratè quarta pars totius curvæ quæſitæ, ſumptis enim a puncto P ſecundum lineas P M, P N longitudinibus P S, P Z æqualibus radio ſphæræ, ductâque S Σ; & recto Cono P M D N E ſecundum lineam S Σ per planum perpendiculare Plano P N M ſectio erit Ellipſis & S Σ unus ejus Ellipſeos axibus; quia verò Triangulus P S Σ eſt Iſoſceles & linea P X angulum S P Σ bifariam dividit, ea linea P X ſecabit axem Ellipſeos S Σ in ipſo centro K Ellipſeos, quoniam autem alter axis K Δ eſt perpendicularis in axem S Σ, & eſt in plano ad Planum P N M perpendiculari, erit axis Δ K perpendicularis in lineam P K X ideoque erit Parallelus ordinatæ X Z, & linea P Z tranſibit per punctum Δ; Ergo unus Ellipſeos quadrans intercipietur inter lineas P N, P Z, hoc eſt reſpondebit portioni N D Z ſemicirculi N Z D N, alter verò quadrans Ellipſeos reſpondebit reliquæ portioni M Z ſemi-circuli ejuſdem; Jam verò evidens eſt quod ſi habeatur Conus rectus cujus baſis ſit Ellipſis quævis, & ab ejus Vertice ut Centro, radio quovis deſcribatur curva in ejus Coni ſuperficie, portiones ejus curvæ ſingulis quadrantibus Ellipſeos reſpondentes erunt inter ſe æquales; Ergo portio curvæ reſpondens abſciſſæ $x = \frac{PN}{PN + PM} f$ eſt accuratè quarta pars totius curvæ quæſitæ. 9

Ergo ex prius inventis, cum attractio Puncti P à Pyramidibus in peripheriam M D N E deſinentibus, exprimi debeat per P C ductum in numerum linearum P Z, quæ à puncto P æqualibus angulis procedentes ad peripheriam M D N E deſinunt, is vero numerus linearum P Z ſit ut curva quæ intercipitur in ſuperficie ſphæræ deſcriptæ radio quocumque P S inter eas lineas P Z, eaque curva in quatuor æquales quadrantes dividatur, erit etiam is numerus linearum P Z ut unus ex eis quadrantibus, exprimitur verò is quadrans per ſeriem ſuprà inventam ergo (poſito P S = 1) attractio Puncti P à ſolido

$$\text{eſt ut } \frac{PC \times f}{\sqrt{PN \times \overline{PN + PM}}} \times 1 + \frac{PN^2 + ff - gg}{2.3.PN \times \overline{PN + PM}} + \frac{3PN^4 + 2PN^2 gf + 3f^2g^2 + 2PN^2 gg - 6fg^3 - g^4}{2.4.5.PN^2 \times \overline{PN + PM}^2} \,\&c.$$

Hæc ſeries tunc minimùm convergit cum ex ſolis coefficientibus numericis convergit cum nempe punctum M coincidit cum puncto P, tunc enim quantitates omnes N M, ſive f; P q ſive g, P N & P N + P M ſunt inter ſe æquales & $PC = \frac{g}{2}$ tunc ergo ſeries redit ad $PC \times 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7} + \frac{35}{2.4.4.4.9}$ &c.

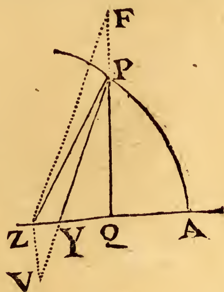
Eo autem in caſu, ex ipsâ conſtructione liquet, portionem curvæ ſphæræ inſcriptæ eſſe quadrantem circuli cujus radius eſt 1, eumque quadrantem exprimi iſtâ ſerie; hinc totam hanc ſeriem æquipollere quantitati $1.57079 \times PC$.

Facilior paulo evadet calculus, ſi loco ſummæ laterum P M + P N, adhibeatur quantitas $\frac{fg}{PN - PM}$ ipſi æquipollens, Prolixior tamen eſt, quàm ut illum applicare ſuſtinuerimus ad ulteriores conſequentias.

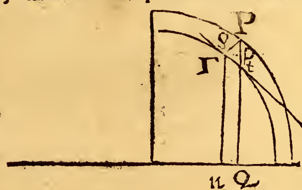
Dixi ex his viam ſterni ad determinationem curvæ quam affectat Meridianus Telluris nam ſi ex Æquatione generali $y = Ax^n + Bx^{2n} + Cx^{3n}$ &c. & ex ſerie inventâ determinetur attractio puncti P à quovis circulo, & erigatur in puncto axis quod ejus circuli eſt centrum ordinata quæ ejus circuli attractionem repræſentet, &

DE MUNDI SYSTEMATE. intelligatur curva per earum ordinatarum vertices transiens, quæratur ejus curvæ area per vulgatas methodos, habebiturque gravitas puncti P in solidum; quæratur præterea punctum axeos Y in quo si erigeretur ordinata illi curvæ quæ gravitatem puncti P exprimit, ejus curvæ area bifariam divideretur, erit Y punctum axeos ad quod attractio puncti P dirigetur.

90. Pariter ex Æquatione generali curvæ habebitur punctum axeos Z ad quod pertinget perpendiculum in curvæ punctum P, habebuntur ergo intervalla ZY & YQ, ex Z ducatur ZV Parallela PQ quæ concurrat cum PY productâ in V, producatur PQ in F ut fiat PF = ZV, ducaturque FZ, quoniam curva circa axem revolvitur, PF erit directio vis centrifugæ agentis in puncto P, PV directio gravitatis, PZ verò curvæ perpendicularis erit directio media nata ex utriusque vis compositione (ut constat facto cum agatur de tellure ipsâ); sed quia habentur ZY, YQ, PQ & PY habebuntur ZV & VY, ideóque habebitur VP, ergo habebuntur latera & Diagonalis Parallelogrammi FPVZ sive habebuntur rationes vis centrifugæ puncti P, vis ejus gravitatis & vis mediæ PZ ex utrâque resultantis, fiat ergo ut PV ad PZ ita gravitas puncti P ex attractione solidi nata & per aream curvæ inventa ad residuum ejus gravitatis demptâ vi Centrifugâ.



Tandem inscripta intelligatur in curva quæ quæritur, alia curva ipsi omninò similis ita ut earum sit idem centrum, & axes supra se mutuò jaceant, Æquatoris prioris curvæ semi-Diameter dicatur m, & differentia ejus à semi-Diametro alterius, quæ quamminima assumi potest, dicatur dm, abscissa CQ prioris curvæ sit z, erit ejus differentia ab abscissâ correspondenti alterius curvæ $\frac{zdm}{m} = Q\kappa = \Gamma p$; ordinata PQ sit y ejus differentia ab ordinatâ correspondenti erit $\frac{ydm}{m} = Pp$; quoniam Γt potest sumi ut portio tangentis curvæ, triangulum Γpt erit simile Triangulo fluxionali in puncto Γ sive etiam in Puncto P ob similitudinem curvarum & abscissarum erit ergo: $dz : dy = \Gamma p \left(\frac{zdm}{m}\right) : pt = \frac{zdy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ergo $Pt = Pp + pt = \overline{y + \frac{zdy}{dz}} \times \frac{dm}{m}$ sed si ducatur $P\varrho$ perpendicularis ad curvam in P erit etiam Triang. $P\varrho t$ simile Triang. Γpt ideoque Triang. fluxionali; nam ob similitudinem curvarum, tangens Γt est parallela curvæ in P, ideóque angulus ϱ est rectus, est ergo dv ad dz ut Pt sive $y + \frac{zdy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ad $P\varrho$ quod erit ergo $\frac{ydz+zdy}{dv} \times \frac{dm}{m}$ sive deletâ ratione $\frac{dm}{m}$ quæ data est, perpendiculi portio inter duas curvas similes intercepti erit ut $\frac{ydz+zdy}{dv}$, multiplicetur id perpendiculum per ydv, factum erit ut annulus solidus inter curvas interceptus tandem ergo multiplicetur $y^2dz + zydy$ per valorem gravitatis acceleratricis secundum PZ quæ prius inventa fuit, factum erit ut Pondus fluidi inter curvas similes intercepti in puncto P, sumantur ejus facti fluxiones factâ dz constanti, & nihilo æquentur illæ fluxiones, sic pondera omnium partium inter duas curvas contentarum fient æqualia, & habebitur æquatio fluxionalis curvæ quam Meridianus terræ affectat.

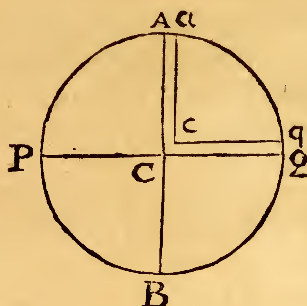


Alia etiam est in hoc Problemate conditio quæ brevius æquationem suppeditare posset, nem-

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diversis.

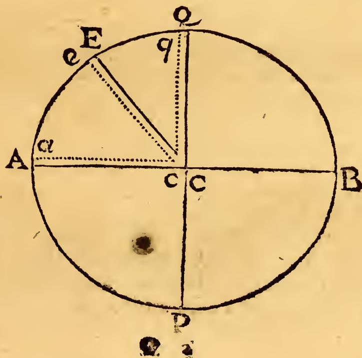
(a) Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ



ACQqca æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem

nempe (fig. præced.) cum sit P Q ad Z V ut Z Y ad Y Q, & Z V sit ubique ut vis centrifuga puncti P quæ est semper proportionalis ordinatæ P Q, ratio Z Y ad Y Q constans esse debet. Bene ergo res se habet si utroque modo eadem obtineatur curva; sin minus, oportet ut inter has hypotheses aliqua sit repugnantia, nempe dari solidum, uniformiter densum, rotans circa axim & in æquilibrio constitutum, in quo media actio inter gravitatem & vim Centrifugam sit perpendicularis ad curvam; Quæ quidem dicta non putentur ut præripiam palmam & laudem illi qui majori patientiâ aut industriâ, determinabit generalissimè Meridiani figuram ex genuinis Newtonianis principiis, nullâ præsuppositâ ad circulum, Ellipsim, aliamve curvam affinitate, sive his calculis ipsis felicius tractatis sive aliis.

(a) * *Quoniam pondera.* Concipiatur (ut suprà prop. 19.) canalis aquæ plena a polo Q q ad centrum C c & inde ad æquatorem A a pergens. Quia oportet fluidum quiescere (ex hyp.) erit fluidum in canalis crure A C in æquilibrio cum fluido in ejusdem canalis crure Q C, & portio quælibet fluidi in crure C A consistet in æquilibrio cum simili & similiter positâ fluidi portione in crure C Q (ex demonstratis (in prop. præc.) idem quoque simili argumento colligitur de corporibus quibusvis homogeneis etiamsi fluida non sint. Quare corpora homogenea quæ

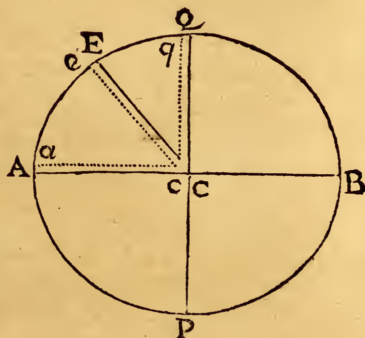


sunt

ut pondera totorum, ideóque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut 230 ad 229. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut diſtantiæ corporum à centro terræ. Proindè ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie terræ conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciprocè ut diſtantiæ locorum à centro: & (b) propterea, ex hypotheſi quod terra ſphærois ſit, dantur proportione.

Un-

90. ſunt ut A C, Q C in locis A & Q conſtituta æque gravia ſunt versùs centrum C. Sed gravitas corporis in A poſiti quod eſt ut Q C eſt ad gravitatem alteriùs corporis homogenei ibidem conſtituti quod eſt ut A C ſicut Q C ad A C. Sunt enim corporum homogeneorum in eodem loco conſiſtentium pondera ut ipſamet corpora, ergò corporum homogeneorum in A & Q poſitorum gravitates ſunt ut Q C ad A C. Eodem modo oſtendetur gravitatem corporis in loco E, in alterâ quâcumque canali C E, eſſe ad gravitatem corporis æqualis & homogenei in loco Q, ut C Q ad C E; fluidum enim in canali A C E quieſcere debet ſicut in priori canali A C Q (per hyp.) unde, ex æquo, æqualium & homogeneorum corporum* in telluris ſuperficie ubivis conſiſtentium gravitates abſolutæ ſunt ut diſtantiæ à centro reciprocè.



* Gravitatem corporis in E eſſe ad gravitatem corporis in Q ut C Q ad C E verum eſt non Mathematicè, ſed quam proximè; directio enim gravitatis corporis poſiti in E non eſt ſecundùm E C, ita ut ad centrum C tendat, ſed eſt perpendicularis ſuperficiei Q F A (ut ex facto liquet) hinc gravitates in ſingulis punctis forent reciprocè ut radii oſculatores curvæ, verùm ob figuram terræ prope ſphæricam id ſubtilius ſectari videtur ſuperfluum, tanto magis quod calculorum conſequentiæ, cum experimentis ſint conferendæ in quibus ſemper deficiet Mathematica ἀκρίβεια.

91. (b) * *Et propterea.* Ex hypotheſi enim quod terra ſit ſphærois qualem vult Newtonus, hoc conſit theorema; quod ſcilicet *incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos ſit quam proximè ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, vel quod perindè eſt, ut quadratum ſinûs recti latitu-*

Unde tale confit theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, fit quam proximè ut finus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde eft, ut quadratum finus recti latitudinis. Et ([c]) in eâdem circiter ratione augen- LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROBL. IV.

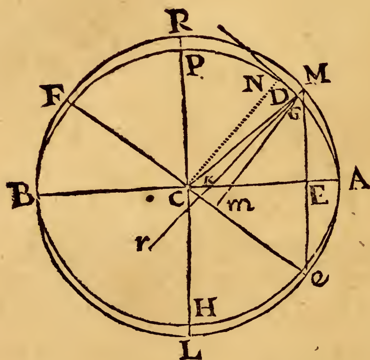
latitudinis. Sit enim APBA, ellipfis quæ referat meridianum terræ & ARBLA, circulus radio CA, defcriptus ad quem Ellipfis APBA proxime accedit, fitque radius CA femidiameter æquatoris terreftris, erit (ex naturâ ellipfis 247 lib. 1.) $RP:MG=CR:EM$, ideóque $MG=\frac{RP\times EM}{CR}$. Sed propter triangula DMG, EMC, fimilia, ubi ellipfis ad circulum proximè accedit (tunc enim DG, fumi poteft pro rectâ tangente Ellipfim in puncto D, & ea tangens eft quam proximè perpendicularis radio DC) eft $MG:MD=MC:ME$ ac proindè $MG=\frac{MD\times MC}{ME}$, erit ergò $\frac{RP\times ME}{CR}=\frac{MD\times MC}{ME}$, undè fit $MD=\frac{RP\times ME^2}{CR^2}$. Jam verò ex puncto M, ducatur perpendicularis Mm ad rectam Fe, erit em finus verfus arcûs duplicati AM, hoc eft, arcûs Me, fivè quia AM exhibet latitudinem (10) erit em, finus verfus latitudinis duplicatæ; fed eft $em\times eF=M^2$ (ex proprietate circuli). Quarè ob datam eF, eft em ut eM^2, vel etiam ut ME^2 ideóque MD, eft ut $\frac{RP\times em}{CR^2}$, vel ob datas $\frac{RP}{CR^2}$, fit MD, ut em, fivè ut ME^2. Quia verò pondera in locis A & D funt ut diftantiæ locorum à centro reciprocè (ex dem.) erit incrementum ponderis in D, ut $\frac{1}{CD}-\frac{1}{CA}$, hoc eft, ut $CA-CD$, vel ut $CM-CD$ ideóque ut MD. Quarè *incrementum ponderis* &c.

(c) 92. * *Et in eâdem circiter ratione.* Minimus arcus circuli curvam aliquam in dato puncto ofculantis pro arcu infinitefimo curvæ in hoc puncto ufurpari poteft (... 1. lib 1.). Sed integri gradus funt ut minimi arcus fimiles, arcus autem illi funt ut radii circulorum curvam ofculantium; quarè gradus integri erunt ut iidem radii. Erit itaque gradus in loco D, ut radius circuli ellipfim ibidem ofculantis, & gradus in loco A, itidem ut radius circuli ellipfim ofculantis in eodem puncto A. Jam verò ductâ perpendiculari CN, ad tangentem DN, fumptoque Dr, pro radio ofculatore in D, erit Dr ut Dk^3, five quia eft $CP^2=CN\times DK$ (ibid.) ob datam CP^2 erit Dk ut $\frac{1}{CN}$, ideóque radius circuli qui eft ut Dk^3, erit ut $\frac{1}{CN^3}$, hoc eft, radius circuli ellipfim ofculantis eft reci-

De Mundi Systemate.

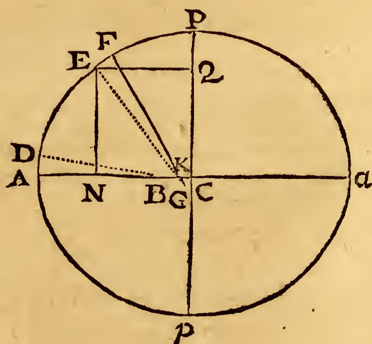
augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Ideóque cum latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit 48gr. 50', ea locorum sub æquatore 00 gr. 00', & ea locorum ad polos 90 gr. & duplorum tore

92.



reciprocè ut cubus perpendiculi ex centro C in tangentem D N demissi. Quarè incrementa graduum in D, pergendo ab æquatore ad polos erunt ut $\frac{1}{CN^3} - \frac{1}{CA^3}$ hoc est, ut $CA^3 - CN^3$, sivè ut $CM^3 - CN^3$, vel etiam ut $CM^3 - CD^3$ quoniam differentia rectarum C N, C D admodùm exigua est. Sed est $CM^3 = (CD + DM)^3 = CD^3 + 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3$, ideóque $CM^3 - CD^3 = 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3 = 3CD^2 \times DM$, ob quantitates DM^2, DM^3, ferè evanescentes respectu $3CD^2 \times DM$, sunt igitur incrementa graduum ut $3CD^2 \times DM$, sivè ut D M, ob rectam C D proximè constantem. Quarè incrementa graduum sunt ut ponderum incrementa.

93. Idem analyticè præstari potest quemadmodum elegantissimè, pro more suo, fecit Clariss. D. De Maupertuis in monumentis Paris. an. 1734. & in libro de figurâ terræ. Semiellipsis P A p, referat meridianum sphæroidis cujus est axis P p, diameter verò secundum æquatorem A a. Ponatur $CA = 1$, $CP = m$, $CN = x$, $EN = y$ erit (ex naturâ ellipseos per lem.



4. de Conicis) $EN^2 : CP^2 = AN \times Na : AC^2$, ideóque $y^2 = m^2 \times (1 - xx)$ & $y = m\sqrt{1 - xx}$. Sit G E, radius circuli ellipsim osculantis in E, is erit (214. lib. 1.) $= \frac{1}{m}(1 - xx + mmxx)^{\frac{3}{2}}$. Quia verò $EK^3 = \frac{EG \times PC^4}{AC^2}$ (239. lib. 1.) erit $EK = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2}$. Jam sinus anguli latitudinis A K E, dicatur s, posito sinu toto $=1$, erit $1 : s = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2} : m\sqrt{1 - xx}$, ac proindè $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$ quo valore substituto, loco xx in expressione radii osculatoris, fiet $EG = \left(\frac{mm}{1 - ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}}$. Nunc conferantur simul duo gradus meridiani AD, EF, quorum unus incipiat ab æquatore, alter verò

finus verfi fint 1134, 00000 & 20000, exiftente radio 10000, & gravitas ad polum fit ad gravitatem fub æquatore ut 230 ad 229. & exceffus gravitatis ad polum ad gravitatem fub æ- finus

verò fumatur ubivis in arcu A P, fumpto A B, pro radio circuli ellipfim ofculantis in A, erit (92) $AD:EF=AB:EG$, fed eft $AB=\frac{PC^2}{AC}$ (241. lib. 1.) $=mm$, quarè fi gradus AD dicatur A & gradus EF, dicatur E fiet $A:E=mm:\frac{mm}{(1-ss+mmss)}^{\frac{3}{2}}$ ac proindè $E=A\times(1-ss+mmss)^{-\frac{3}{2}}$. Hæc formula exprimit relationem inter primum gradum latitudinis & alium quemlibet gradum, atque inter diametrum & axem.

94. Si quantitas $1+mm-ss$, evehatur ad dignitatem cujus exponens eft $-\frac{3}{2}$ (550. lib. 1.) erit $E=A\times(1-\frac{3}{2}(mm-1)ss+\frac{15}{8}\times(mm-1)ss^2-$&c.) vel $A-E=\frac{3}{2}(mm-1)AS^2-\frac{15}{8}(mm-1)^2AS^4+$&c Quia verò fphærois terræ ad fphæram proximè accedit, erit ferè $m=1$, ideóque in fuperiori formulâ negligi poterunt termini in quibus quantitas $mm-1$, ad altiorem poteftatem evecta occurrit, undè fit pro tellure $2A-2E=3(mm-1)\times ASS$. Si terra pònatur versùs polos compreffa erit $1>m$ & $E>A$, hincque prodit $E-A:ASS=3\times(1-mm):2$. Quarè iterum patet id quod jam demonftravimus (92) arcus fcilicet graduum latitudinis in meridiano augeri in duplicatâ ratione finûs recti latitudinis.

95. Si gradus AD, non computetur ab ipfo æquatore, fed ubivis inter A & E fumatur, fitque S finus anguli latitudinis, patet (94) fore $BD=\frac{mm}{(1-SS+mmSS)}^{\frac{3}{2}}$ ideóque $A:E=\frac{mm}{(1-SS+mmSS)}^{\frac{3}{2}}:\frac{mm}{(1-ss+mmss)}^{\frac{3}{2}}$, ac proindè $E\times(1-ss+mmss)^{\frac{3}{2}}=A\times(1-SS+mmSS)^{\frac{3}{2}}$. Jam verò evectis terminis ut fuprà ad dignitatem cujus exponens $\frac{2}{3}$, neglectifque quantitatibus evanefcentibus (95), fiet $1-mm=\frac{2(E-A)}{3E\times(ss-SS)}$.

Si gradus unus ab æquatore, alter à polo numeretur, erit $s=1$, & $S=0$, ideóque formula præcedens abit in hanc $1-mm=\frac{2(E-A)}{3E}$.

96. Si loco femidiametrorum CA, CP, & finus latitudinis ss, in æquatione $xx=\frac{1-ss}{1-ss+mmss}$, (93) fubftituantur expreffiones quælibet indeterminatæ, æquatio præcedens quatuor continebit variabiles, quarum tribus cognitis quarta innotefcet. Quare datis femidiametro æquatoris C A, femidiametro paralleli N C vel E Q, x, aut quod idem eft, datis gradu æquatoris & gradu paralleli (funt enim gradus illi ut ipfimet circuli, ideóque ut radii) & fimul cognitâ latitudine, cujus finus s, dabitur axis ellipfoidis. Simili prorfus modo ductâ quálibet aliâ ordinatâ E Q, quæ fit alterius paralleli Semidiameter & mutatâ utcumque latitudine, inftitui poterit alia æquatio quatuor variabiles continens ac proindè duplex obtinebitur æquatio. Jam verò quia hæc utraque æquatio duas continet indeterminatas communes, nempè femidiametros ellipfis, patet datis duorum parallelorum gradibus, datifque latitudinibus, per vulgares algebræ regulas collatâ fimul utrâque æquatione, determinari poffe femidiametrorum rationem. Cæterum hæc omnia conftructionibus geometricis facilè abfolvi poffunt, verùm in præfenti materiâ præftat calculum adhibere.

De Mundi Systemate.

quatore ut 1 ad 229: (d) erit exceſſus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem ſub æquatore, ut $1\frac{11334}{20000}$ ad 229, ſeu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. (e) Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, & in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* longitudo penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis ſit pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius (f) ob pondus aëris $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli ſub æquatore ſuperabitur à longitudine ſynchroni penduli Pariſienſis, (g) exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ. Et ſimili computo conſit tabula ſequens.

46. (d) * *Erit exceſſus gravitatis.* Exceſſus gravitatis ad polum dicatur E, exceſſus gravitatis in latitudine Lutetiæ dicatur e, ſitque G, gravitas ſub æquatore, erit.

$E : G = 1 : 229$

$e : E = 11334 : 20000$, ideóque per compoſitionem rationum & ex æquo $e : G = 1 \times 11334 : 229 \times 20000 = \frac{1 \times 11334}{20000} : 229$, hoc eſt, exceſſus gravitatis in latitudine Lutetiæ eſt ad gravitatem ſub æquatore $= \frac{1 \times 11334}{20000} : 229 = 5667 : 2290000$, & propterea addendo 5667 numero 2290000, gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000.

(e) * *Quarè cum longitudines pendulorum.* (Cor. 4. Prop. 24. Lib. 2.).

(f) * *Ob pondus aeris.* Corpus oſcillans in aere ponderis ſui partem amittit æqualem ponderis paris voluminis aeris, quarè ſi idem corpus ponatur moveri in vacuo, paululum augeri debet illius pondus ideoque celeriùs vibrabit & ut ad Iſochroneitatem reducatur augeri debebit longitudo penduli eâdem ratione quâ augetur gravitas hinc cum $\frac{1}{11000}$ parte plumbi pondus in vacuo augeatur tantumdem augeri debet penduli longitudo quæ erit ergo ad $440\frac{1}{2}$ l. ut 11001 ad 11000 inveníeturque $440\frac{5}{9}$ (289. lib. 2.). Hinc in latitudine Lutetiæ Pariſiorum longitudo penduli ad minuta ſecunda oſcillantis in vacuo hic ponitur pedum trium Pariſ. & lin. $8\frac{5}{9}$ proximè.

(g) * *Exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum.* Cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, erit 2295667 ad 2290000 ut longitudo penduli in latitudine Lutetiæ, hoc eſt, ut 3 ped. $8\frac{5}{9}$ lin. vel ut $\frac{3965}{9}$ lin. ad quartum proportionalem $\frac{9079850000}{20661003} = 439.468$, qui eſt penduli longitudo ſub æquatore. Hâc autem demptâ ex longitudine penduli in latitudine Lutetiæ ped. 3. & $8\frac{5}{9}$ lin., ſeu lin. 440.555, remanet exceſſus lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ.

Lati-

Latitudo loci.	*Longitudo penduli.*		*Mensura gradus unius in meridiano.*
grad.	*ped.*	*lin.*	*hexapedæ.*
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	59382

Constat autem per hanc tabulam quod graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus geographicis figura terræ pro sphæ-

DE MUNDI SYSTEMATE.

ricâ haberi possit: (h) præsertim si terra paulo densior sit versus planum æquatoris quam versus polos.

Jam vero astronomi aliqui in longinquas regiones ad observationes astronomicas faciendas missi, observarunt quod horologia oscillatoria tardiùs moverentur prope æquatorem quàm in regionibus nostris. Et primo quidem D. *Richer* hoc observavit anno 1672. in insulâ *Cayennæ*. Nam dum observaret transitum fixarum per meridianum mense *Augusto*, reperit horologium suum tardius moveri quam pro medio motu solis, existente differentiâ 2′. 28″ singulis diebus. Deinde faciendo ut pendulum simplex ad minuta singula secunda per horologium optimum mensurata oscillaret, notavit longitudinem penduli simplicis, & hoc fecit sæpius singulis septimanis per menses decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus penduli cum longitudine penduli Parisiensis (quæ erat trium pedum Parisiensium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem esse, existente differentiâ lineæ unius cum quadrante.

Postea *Halleius* noster circa annum 1677 ad insulam *Sanctæ Helenæ* navigans, reperit horologium suum oscillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, sed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit plusquam octavâ parte digiti, seu lineâ unâ cum semisse. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in imâ parte penduli non sufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interposuit.

Deinde anno 1682. D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis in observatorio regio Parisiensi esse ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in insulâ *Goreâ* eâdem methodo longitudinem penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, existente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Posthac

(h) * *Præsertim si terra.* In eo siquidem casu minui diametrorum differentiam ostendimus (in prop. præc.).

Posthac D. *Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum solis medium in observatorio regio Parisiensi sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu solis congrueret. Deinde *Ulyssiponem* navigans invenit quod mense *Novembri* proximo horologium tardiùs iret quàm priùs, existente differentiâ $2'. 13''$ in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardiùs ire quam *Parisiis*, existente differentiâ $4'. 12''$ in horis 24. Et affirmat pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Parisiis*. (i) Rectius posuisset differentias esse $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum $2'. 13''$, & $4'. 12''$ respondent. Crassioribus hujus observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes* ad *Americam* denuò navigans determinavit quod in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuilleus* invenit in *Porto-belo* in *Americâ* longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est, tribus fe-

rè

(i) * *Rectiùs posuisset.* Horologium tardiùs ibat Ulyssiponi quam Parisiis, existente differentiâ $2'\ 13''$, seu $133''$, ideóque horologium illud Parisiis conficiens 24. hor. spatio $86400''$, Ulyssiponi conficiebat tantùm $86400'' - 133''$, hoc est, $86267''$. Sed est longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$. Quarè si longitudo penduli ad minuta secunda Ulyssipone oscillantis dicatur L, erit (cor. 4 prop. 24. lib. 2.) $(86400)^2 : (86267)^2 = \frac{3965}{9} : L$, seù $67184640000 : 29507491312885 = 3965 : L$ aç proindè $L = \frac{29507491312885}{67184640000} = 439\ \frac{13434352885}{67184640000} = 439\frac{5}{6}$ lin. circiter. Est autem longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$ seu 440.555, vel $440\ \frac{1}{2}$, quarè differentia pendulorum Parisiis & Ulyssipone ad minuta secunda oscillantium debet esse $440\frac{1}{2} - 439\frac{1}{6} = 1\frac{1}{3}$. Rectius itaque posuisset D. Couplet differentiam esse $1\frac{1}{3}$. Simili computo patet differentiam pendulorum Parisiis & Paraibæ esse $2\frac{5}{9}$.

rè lineis breviorem quàm *Lutetiæ Parisiorum*, sed (k) errante observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem penduli isochroni esse pedum tantum trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est 6 gr. 38' ad austrum, & ea *Porto-beli* 9 gr. 33' ad boream, & latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granada*, *Sancti Christophori*, & *Sancti Dominici* sunt respectivè 4 gr. 55', 14 gr. 40', 14 gr. 00', 14 gr. 44', 12 gr. 6', 17 gr. 19', & 19 gr. 48' ad boream. Et excessus longitudinis penduli Parisiensis supra longitudines pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas sunt paulò majores quam pro tabulâ longitudinum penduli superius computatâ. Et propterea (l) terra aliquanto altior est sub æquatore quam pro superiore calculo, & densior ad centrum quam in fodinis prope superficiem, nisi forte calores in zonâ torridâ longitudinem pendulorum aliquantulum auxerint.

Ob-

(k) * *Sed errante observatione.* Latitudo Portobeli est 9°. 33' ad boream, & latitudo Martinicæ est 14°. 44'. Hinc differentia latitudinum est 5°. 11'. Est autem latitudo Lutetiæ 48°. 50', quare differentia latitudinum Lutetiæ & Portobeli est 39°. 17' Sed præterquam quod observationes Feuillæi à tabulâ Newtonianâ maximè discrepant, secum invicem non satis consentire videntur Cum enim differentia latitudinum 39°. 17', ex iisdem observationibus, præbuerit longitudinem penduli minorem Portobeli quam Parisiis tribus ferè lineis, differentia latitudinum Martinicæ & Portobeli quæ est 5°. 11' majorem in hisce latitudinibus præbere debuisset penduli differentiam quam $\frac{3}{12}$ lin. qualem invenit Feuillæus. Hunc cæteroquin diligentissimum observatorem non satis hâc in re accuratum fuisse confirmant observationes an. 1735. Portobeli habitæ à Clariss. Viris DD Godin & Bouguer, quorum prior penduli longitudinem Portobeli invenit 36 poll. 7 lin. $\frac{7}{89}$, posterior verò eandem longitudinem summo consensu determinavit 36. poll. 7 lin. $\frac{7}{99}$.

(l) 97. *Terra aliquantò altior est.* Materia ad centrum redundans quâ densitas ibi major fit, seorsim à reliquâ tellure uniformiter densâ spectetur, gravitas in terram uniformiter densam erit reciproce ut distantia à centro (ex demonstratis in prop. 19.). Gravitas autem in materiam redundantem erit reciproce ut quadratum distantiæ à materiâ illâ quam proximè (prop. 76. lib. 1.) cum igitur in casu terræ uniformiter densæ, illiùs superficies versùs æquatorem elevetur, versùs polum verò deprimatur, gravitasque ad æquatorem minor fit quam ad polum in ratione distantiæ poli à centro ad æquatoris semidiametrum, ad prædictam autem materiam redundantem circà centrum gravitas ad æquatorem minor fit quam ad polum in ratione duplicatâ distantiæ poli à centro ad æquatoris semidiametrum, quæ ratio priori ratione simplici minor est, patet in casu telluris versùs centrum densioris ex utrâque simul causâ fieri ut gravitas ad æquatorem ex binis prioribus composita minor sit gravitate ad polum in ratione minore quam est ratio distantiæ poli à centro

Obſervavit utique D. *Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evaſit pedis unius cum quartâ parte lineæ. (m) Deinde D. *De la Hire* obſervavit quod virga ferrea quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi ſoli æſtivo exponebatur evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quam in poſteriore, in hoc verò major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad ſolem æſtivum valde incaleſcunt. At virga penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori ſolis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quam hyberno, ſed exceſſu quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus aſtronomorum è *Galliâ* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfectè congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint.

centro ad æquatoris ſemidiametrum, & ideò ob minorem hanc gravitatem in æquatore reſpectu gravitatis ad polos, tellus magis ad æquatorem elevabitur quam pro ſuperiori calculo, ac proindè longitudo pendulorum quæ gravitati acceleratrici proportionalis eſt (cor. 4. prop 24. lib. 2.) paulò major eſſe debet quam pro tabulâ longitudinum computatâ in caſu terræ uniformiter denſæ.

(m) 9. * *eindè D. Delahire.* Hiſce obſervationibus adjungi debent inſtituta à Clariſſ. Viro D. De Mairan experimenta quæ in monum. Pariſ. an. 1735. leguntur. Ut caloris Solaris vim exploraret, laminas ferri & cupri à loco clauſo ac temperato vel etiam frigeſcente, ad locum Solaribus radiis apertum transferebat, ibique plurium horarum ſpatio relinquebat. Deinde laminarum dilatationem circino accuratè capiebat, menſurato priùs caloris Solaris incremento ope thermometri Reaumuriani. Obſervavit ob majorem Solis calorem reſpectu loci clauſi in quo anteà ſuſpenſum erat thermometrum, ad 15 vel 20 gradus liquorem perveniſſe & ferri laminam 3. ped. $8\frac{1}{2}$ lin. longam dilatari invenit $\frac{1}{30}$ vel $\frac{1}{22}$ lin. cuprum flavi coloris majorem quam ferrum à radiis Solaribus patiebatur dilatationem. Experimentum quoque tentavit in aquâ ebulliente; immerſit nempè in eâ cuprum flavi coloris & ferrum, eandem plane in utroque metallo dilatationem fieri obſervavit; cæterum lamina cuprea tres pedes 8. lin $\frac{1}{2}$ longa, menſe Julio, aſcendente thermometro ad altitudinem 22. grad. ſuprà congelationem, ob aquæ ebullientis calorem dilatabatur $\frac{1}{5}$ lin. circiter.

98.

De Mundi Systemate.

poſſint. Et in hoc concordant omnes, quod iſochrona pendula ſunt breviora ſub æquatore quam in obſervatorio regio Pariſienſi, exiſtente differentiâ non minore quam lineæ unius cum quadrante, non majore quam linearum $2\frac{2}{3}$. Per obſervationes D. *Richeri* in *Cayenna* factas differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum ſemiſſe vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accuratas prodiit eâdem quaſi duarum linearum. Et hæc diſcrepantia partim ab erroribus obſervationum, (n) partim à diſſimilitudine partium internarum terræ & altitudine montium, & partim à diverſis aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Angliâ*, brevior eſt quam tempore æſtivo, ſextâ parte lineæ unius, quantum ſentio. Ob calores ſub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante à *Richero* obſervatâ, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum linea $1\frac{87}{1000}$ per theoriam jam ante collecta probe congruit. *Richerus* autem obſervationes in *Cayennâ* factas, ſingulis ſeptimanis per menſes decem iteravit, & longitudines penduli in virgâ ferreâ ibi notatas cum longitudinibus ejus in *Gallia* ſimiliter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis obſervatoribus defuiſſe videtur. Si hujus obſervationibus fidendum eſt, (o) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium ſeptendecim circiter, ut ſupra per theoriam prodiit.

98. (n) * *Partim à diſſimilitudine.* Quæ de pendulorum longitudinibus dicta ſunt in hâc propoſitione, ſupponunt homogeneam eſſe telluris materiam; ſi verò homogenea non ſit ubique, ſed aliqua ſit in partibus internis terræ diſſimilitudo patet (96) hinc quaſdam oriri poſſe in pendulorum longitudinibus irregularitates. Similem ob cauſam, ex montium altitudine, vallium cavitate inæqualitates aliquæ naſci poterunt, pro exceſſu enim vel defectu materiæ augebitur vel minuetur gravitas. Obſervationum diſcrepantiam repeti etiam poſſe à diverſis aëris caloribus manifeſtum eſt ex obſervationibus Picarti, La Hirii & ex notâ præcedenti.

(o) * *Terra altior erit.* Si hujus obſervationibus fidendum eſt, longitudo penduli ſub æquatore ſuperabitur à longitudine penduli ſynchroni Pariſienſis exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ, ideóque longitudo penduli ſub æquatore erit 3. ped. 7. $\frac{4217}{9000}$ lin. ſeu 3. ped. 7. 468. lin. proximè, eſt enim longitudo pen-

penduli Parif. 3. ped. $8\frac{5}{9}$ lin. fed eft incrementum ponderis fivè incrementum longitudinis penduli pergendo ab æquatore ad polos ut finus verfus latitudinis duplicatæ, ac proindè $\frac{1087}{1000}$ feu 1. lin. $\frac{87}{1000}$ erit ad incrementum longitudinis fub polo ut 11334 ad 20000. Quarè incrementum illud eft $1\frac{10406}{11334}$, feu $1\frac{919}{1000}$ proximè. Erunt ergò pondera feu pendulorum longitudines fub æquatore & fub polo refpectivè 3. ped. 7,468 lin. & 3. ped. 9,387 lin. hoc eft proximè ut in tabulâ Newtonianâ. Sed pondera funt reciprocè ut diftantiæ à centro (ex demonftratis in Prop. 19.) ideóque 439468 eft ad 441387 ut diameter versùs polos eft ad diametrum fecundum æquatorem, fivè ut 229 ad 230 proximè, ideóque pofitâ femidiametro terræ (ut in Prop. præced.) patet (per notas in eandem Prop.) terram altiorem effe ad æquatorem quam ad polos exceffu milliarium feptemdecim circiter.

99. Clariff. D. Campbell Londini in latitudine 51°. $\frac{1}{2}$° & in Jamaicâ in latitudine 18°. accuratiffimis obfervationibus inftitutis, invenit longitudinem penduli fimplicis ad minuta fecundæ Londini ofcillantis effe 39.129. poll. angl. idemque pendulum tardius ire in Jamaicâ quam Londini deprehendit, exiftente differentiâ 1' 58" fpatio 24. hor. Ex his obfervationibus, eodem quo hactenus ufi fumus computo determinavit longitudinem penduli fub æquatore effe ad longitudinem penduli fub polis ut 39000 ad 39206, undè prodit diameter æquatoris ad diametrum versùs polos in ratione 39206 ad 39000 fivè ut 190 ad 189 ferè; ideóque pofitâ femidiametro terræ ut in prop. præced. terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceffu milliarium 41 circiter. Doctiffimi Viri DD. Godin, Bouguer, De la Condamine fummâ diligentiâ in latitudine 18° 27' obfervationes habuerunt quæ cum obfervationibus D. Campbell probè congruunt. In id quoque confpirant obfervationes versùs polum inftitutæ à Celeberrimo D. De Maupertuis Clariffimifque Sociis ut terram versùs æquatorem magis elatam conftituant quam pro theoriâ Newtoni. Idem confirmat accurata graduum terreftrium menfura. Longitudo gradus meridiani qui circulum polarem fecat à D. De Maupertuis inventa eft 57437,9 hexaped. & longitudinem gradûs in galliâ in 45°. 57100. hexaped. probabiliter affumi poffo oftendimus. Hinc gradûs utriufque differentia eft 337 hexaped. aut ad minimum 300 hex. fed ex tabulâ Newtonianâ differentia inter 45 gr. & 65. eft 240. hexapedarum, crefcunt itaque gradus latitudinis pergendo ab æquatore ad polos magis quam juxtà tabulam Newtonianam ac proindè non folum terra eft elata fub æquatore (94), fed etiam diametrorum differentia ex obfervationibus major quam ex ipsâ theoriâ colligitur. Confulatur obfervationum feries quam tranfactionibus Anglicanis an. 1734. inferuit Autor verfionis gallicæ.

LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROBL. IV.

99.

100. Scholium. Penduli longitudinem Romæ determinare pluribus experimentis tentavimus cum Doctiffimis & in obfervando verfatiffimis PP. Bofcovik & Maire S. J. Mathematicis. Ufi fumus methodo illâ accuratiffimâ quam fagaciffimus naturæ indagator fummufque Geometra D. De Mairan tradit in Monum. Acad. Reg. Parif. ad an. 1735., ubi experimenta recenfet quæ cum incredibili curâ adversùs omne errorum genus peregit. Paravimus itaquè horologium ofcillatorium à Celeber. Graham Londini conftructum, nobifque ab Illuftriffimo D. Leprotti humaniffimè commodatum, quod per appulfum fixæ ad telefcopium immotum fingulis obfervationum diebus dirigebamus ut tempus Solis medium indicaret. In machinâ quâdam immotâ conftituimus plana duo horizontalia, è quorum altero filum pendebat laminis metallicis aptè inter fe congruentibus compreffum cochlearum ope, alterum ità fenfim elevabatur per cochleas ut horizontalem fitum fervaret, & globum è filo fufpenfum inferius contingeret. Diftantiam puncti fufpenfionis à puncto illo infimo globi, quo planum horizontale fubjectum contingebat, inveftigabamus ope menfuræ Londinenfis bipedalis accuratiffimæ, quam cum pluribus aliis confentientem P. Abbas Revillas Clariff. Vir, publicus Profeff. Math. & Acad. Londin. Socius exhibuit nobis. Huic menfuræ infera eft altera regula mobilis quam pro arbitrio educere ad altitudinem 4. pedum conficiendam. Hanc igitur inter punctum fuf-

DE MUNDI SYSTEMATE.

suspensionis & punctum globi infimum interponebamus perpendiculariter ad plana horizontalia, maxime que cavebamus ne in hâc mensurâ error aliqualis irreperet.
100. Plura idcirco neglęximus experimenta in quibus filum extendebatur observationis tempore, aliaque rejecimus facta cum filo serico vel cum globo eburneo qui nimiam in aëre resistentiam patiebatur. Sex igitur tantum quæ nobis tutissima visa sunt describemus, facta sunt cum globo cupreo cujus quælibet semidiameter inventa est partium digiti Londinensis millesimarum 603, pondus verò unciarum $4\frac{3}{8}$ seu granorum 2520. Illum suspendebàmus è filo ex foliis aloës parato quod gallicè dicitur: *fil de pite*, hujusmodi filum 21 $\frac{1}{2}$ ped. Londin. longum, æquiponderabat granis 5, & propterea pondus fili 44 digit. erat ad pondus globi ut 1 ad 2955, pondus verò 35. digit. ad pondus ejusdem globi ut 1 ad 3715. Hinc per ea quæ D. De Mairan loco citato demonstravit, si distantia puncti suspensionis à centro globi sit 44 digit. Lond. circiter, ex longitudine observatâ seu interceptâ inter punctum suspensionis & punctum infimum globi subtrahenda erit longitudo 0,6023 digit. ut habeatur vera longitudo penduli simplicis pendulo observationis isochroni. Si verò distantia puncti suspensionis à centro globi sit 35 digit. circiter, auferenda erit longitudo 0,6004 digit.

1. Experimentum 13â. Julii manè.

Longitudo observata	45.145 dig. Lond.
Longit. subtrahenda.	0.6023
Longitudo vera	44.5427.

Numeravimus oscillationes globi 3261 eo tempore quo horologium oscillatorium 3479 absolvit, hoc est, interuallo 3480.69 secundorum temporis medii Horologium enim tardius movebatur quam pro medio motu Solis & differentia erat 42 secundorum pro horis 24. est igitur 3480.69^2 ad 3261^2 ut 44.5427 ad 39.09736 digit. Lond. quæ est longitudo penduli simplicis ad singula minuta temporis medii oscillantis.

2. Experimentum eâdem die vespere. Longitudo observata 45. 18. digit. Lond. longitudo vera 44.5777. Numerus oscillationum globi 3387. tempore medio 3616.75. secund. undè habetur longitudo penduli simplicis ad singula minuta secunda oscillantis 39.0941 digit. Lond.

3. Experimentum 14â. Julii. Longitudo observata 36.26. longitudo vera 35.6596 digit. Lond. numerus oscillationum globi 3740 tempore medio 3571.75 secund. longitudo penduli quæsita 39.09827. digit. Lond.

4. Experimentum 16â. Julii. Longitudo observata 36.97. longitudo vera 36.3696. numerus oscillationum globi 3832 tempore medio 3695.88 secund. longitudo penduli quæsita 39.09703 digit. Lond.

5. Experimentum 19â. Julii. Longitudo observata 35.185. longitudo vera 34.5846. digit. numerus oscillationum globi 3870 tempore medio 3639.85. secund. penduli quæsita 39.096485.

6 Experimentum 5â. Augusti. Longitudo observata 45. 427. longitudo vera 44.8247 digit Lond. numerus oscillationum globi 3563 tempore medio 3815.03 secund. longitudo quæsita 39.097872.

Ex his omnibus experimentis invenitur media longitudo penduli 39.09686 digit. Lond. verum si rejiciatur secundum experimentum quod ab aliis quinque inter se probe consentientibus nimis differt; media longitudo prodit 39.0974 digit. Lond. Hoc autem experimentum secundum rejici debere inde etiam concludimus quod sextum maxime accuratum nobis visum sit, nam omninò invariata fuit fili longitudo toto observationis tempore & omnes concursus diligentissimè notati inter se congruebant.

Pes Londinensis vulgò supponitur esse ad ped. Parif. ut 135 ad 144 vel etiam ut 1000 ad 1068, quâ ratione cum primum usi essemus, longe minorem, quam par est, penduli longitudinem inveniebamus. Sed ratio illa in re adeò subtili satis accurata non est. Nam D. Godin. monum. Acad. Reg. Scientiarum ad an. 1735 pag. 508, scribit se cum D. Bouguer observasse pedem Lond. se habere ad ped. Parif. ut 1351 $\frac{1}{3}$ ad 1440. si hanc adhibeamus rationem, longitudo penduli Romæ erit 3. ped. Parif. 8. lin. $\frac{28}{100}$. Tandem si ratio illa sit numeri 1351 ad 1440 ut quibusdam Mathematicis mensurarum peritissimis videtur, major prodit penduli longitudo nimirum ped. Parif. 3. lin. 8. 3888.

Hæc

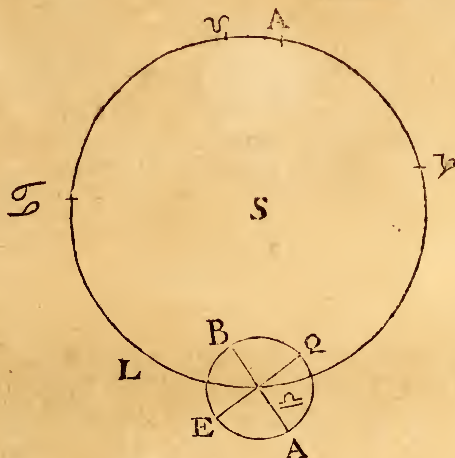
PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

(p) *Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis* (q) *inclinari in eclipticam & bis redire ad positionem priorem.*

Patet per corol. 20. prop. LXVI. lib. I. Motus tamen iste nutandi

Hæc sunt quæ ad telluris figuram spectant. Hâc de re nova quamplurima an. 1740. & 1741. duplici Dissertatione edidit P. Boscowick S. J. insignis matheseos Professor: maxime autem exoptandum ut ad hujusce quæstionis totiusque matheseos utilitatem salvi & incolumes redeant Clariss. Academici qui ad definiendam telluris figuram nobili ardore laboriosum iter versus æquatorem susceperunt. Simul enim collatis versùs polum & versùs æquatorem institutis observationibus, à Doctissimis Viris pro bono Scientiarum in unum conspirantibus certissima de telluris magnitudine & figurâ, gravitatis decremento, aliisque ad Astronomiam, Geographiam & Physicam maxime momentosis speranda sunt.

(p) 101. *Puncta æquinoctialia.* Si terra nullo alio motu præter motum progressivum in suâ orbitâ motumque vertiginis circa axem agitaretur axem suum sibi semper parallelum retineret (cor. 22. prop. 66. lib. I.) sed ob telluris figuram versùs polos depressam & versùs æquatorem oblongatam fit ut axis situs perturbetur. Referat ♈ ♋ ♎ ♑, orbitam telluris circà solem S, sitque A E B Q, ipsa tellus cujus poli A & B æquator E Q. Quoniam (ex prop. præc.) terra est sphæroïs ad polos A & B, depressa & versùs æquatorem E Q, elata, instar globi annulo inhærentis spectari poterit, annulo enim æquivalet materia redundans in regionibus æquatoris. Quarè (per cor. 20. prop. 66.) annuli hujus nodi regredientur, hoc est, tellus digressa à librâ ♎, ubi communis sectio Eclipticæ & æquatoris versùs Solem S, dirigitur, & per ♑ versùs ♈ pergens, ad nodum *A* priùs pertinget quam ad ♈ pervenerit, & tellus ab ♈ per ♋ versùs ♎ progrediens priùs alterum nodum *L* attinget quam ♎ ubi in priori revolutione erat nodus, id est, æquatoris pla-

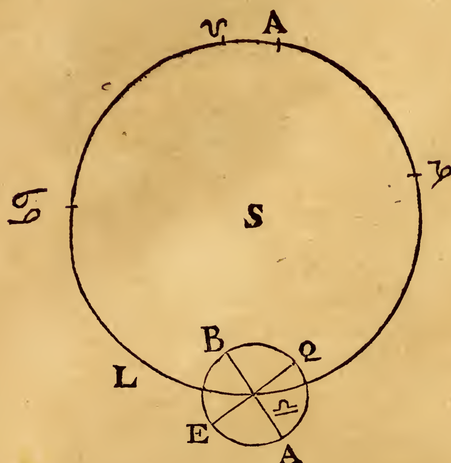


101. num productum, per solem priùs transibit quam telluris centrum ad ♎ pervenerit, sed tunc contingit æquinoctium dum nempè sol in plano æquatoris terrestris versatur (4) illaque puncta pro æquinoctialibus habentur in quibus sol videtur tempore æquinoctiorum. Quarè patet, stellis fixis quiescentibus, puncta æquinoctialia omniaque Eclipticæ puncta quæ à punctis æquinoctialibus numerantur regredi seu in antecedentia moveri. Hic punctorum æquinoctialium regressus pendet ab actione Solis in materiam ad partes æquatoris redundantem, sed & Lunæ etiam non leves vires esse possunt; cum enim Luna in Eclipticæ plano aut non procul ab eo jaceat, ad eundem cum Sole effectum concurret. Sed infrà computabitur motus æquinoctiorum ab utrâque vi, Solis scilicet & Lunæ oriundus.

(q) 102. *Bis inclinari in eclipticam.* In semirevolutione telluris circà solem à

De Mundi Systemate.

nutandi perexiguus eſſe debet, & vix aut ne vix quidem ſenſibilis.



102. ♎ per ♑ ad ♈, actio ſolis inclinationem æquatoris in eclipticam minuere conatur cum illa actio eam inclinationem augere conetur à ♋ ad ♎, hinc maxima fit inclinatio inter ♎ & ♑ poſtea minuitur ex Solis actione oriunda (cor. 10. & 18. prop. 66. lib. 1.) fitque inclinatio illa minima, cum terra eſt inter ♑ & ♈, cum verò tellus inter ♈ & ♋ pervenit, rurſus reſtituitur præcedens inclinatio (ibid.) ſicque deinceps ſimulque cum æquatore telluris axis oſcillatur. Axis igitur terræ ſingulis revolutionibus annuis nutando bis inclinatur in eclipticam & bis redit ad poſitionem priorem: Hæc omnia facile intelliget qui in mentem revocaverit prop 66. lib. 1. ultimaque ejuſdem corollaria

103. In ſingulis octantibus inter æquinoctia & ſolſtitia ſequentia, inclinatio axis terræ ad eclipticam redit ad priorem magnitudinem pluriumque annorum decurſu ſenſibilior non evadit, at regreſſus punctorum Eclipticæ continuo fit in antecedentia, nec ad priſtinum locum redeunt puncta æquinoctialia, niſi poſt integrum circulum. Hinc mutatio quæ unius anni ſpatio inſenſibilis eſt, poſt plurium annorum intervalla notabilis evadit.

104. Cum ſtellæ fixæ quieſcant & retrocedat communis ſectio æquatoris & Eclipticæ, neceſſe eſt ut mutabilis ſit fixarum à punctis æquinoctialibus diſtantia & ſtellæ ab iiſdem punctis verſus orientem quotidie progredi videantur, undè ipſarum longitudines quæ in ecliptica ab initio arietis ſive interſectione vernali eclipticæ & æquatoris computari ſolent, continuò creſcunt & fixæ omnes videntur moveri in conſequentia ſignorum. Hinc fit quod conſtellationes omnes antiquam ſedem mutaverint. Sic conſtellatio arietis quæ tempore Hipparchi prope interſectionem vernalem Eclipticæ & æquatoris viſa fuit, nunc ab eâdem digreſſa in ſigno Tauri moratur, ſicut & Tauri conſtellatio in geminorum locum tranſivit geminique in cancrum promoti ſunt ità ut unaquæque conſtellatio è ſuo in proximum locum ſucceſſerit. * Cum autem hìc, dum de inclinatione egimus, nec ad motum ipſum nodorum, nec ad Excentricitatem orbitarum quas terra aut Luna deſcribunt nec ad Apſidum motus, nec ad irregularitatem molis terræ attenderimus nec denique ad aliorum Planetarum actiones, quædam etiam Eclipticæ inclinationi mutatio afferri poteſt, quæ forte perſeverabit ſatis ut ſenſibilis evadat, inclinationis angulum 1′ centum annis decreſcere volebat Louvillæus, cui non repugnant quæ Caſſinus in Aſtronomiæ Elementis, ex variâ Aſtronomorum æſtimatione inclinationis Eclipticæ retulit. Sed de iis plura in poſterum erunt dicenda.

LIBER TERTIUS. PROP. XXII. THEOR. XVIII.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, & minores illos in ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per prop. LXV. lib. I. Actione autem solis perturbabuntur eorum motus multimodè, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in lunâ nostrâ notantur. Hæc utique (per corol. 2, 3, 4, & 5. prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad terram, in syzygiis quam in quadraturis, nisi quâtenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per corol. 9. prop. LXVI.) ubi apogæum lunæ in syzygiis versatur, & minima ubi idem in quadraturis consistit; & inde luna in perigæo velocior est & nobis propior, in apogæo autem tardior, & remotior in syzygiis quam in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, & regrediuntur nodi, sed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per corol. 7. & 8. prop. LXVI.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per corol. 2. prop. LXVI.) quiescunt in syzygiis suis & velocissimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major est lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis (per corol. 10. prop LXVI.) quam in syzygiis: & motus medius tardior in perihelio terræ (per corol. 6. prop. LXVI.) quam in ipsius aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam à (a) prioribus astronomis non observatæ

(a) * *A prioribus Astronomis non observatæ.* Inæqualitates illæ quas hic per transennam enumerat Newtonus, æquationesque omnes seu correctiones deinceps com- 104.

De Mundi Systemate. ſervatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii apogæi & nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in ſyzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per corol. 14. prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis ſolaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per corol. 1, & 2. lem. X. & corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) ſed hæc inæqualitas in calculo aſtronomico ad proſthaphæreſin lunæ referri ſolet, & cum eâ confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales ſatellitum jovis & ſaturni à motibus lunaribus derivare.

Ex motibus lunæ noſtræ motus analogi lunarum ſeu ſatellitum jovis ſic derivantur. Motus medius nodorum ſatellitis extimi jovialis, eſt ad motum medium nodorum lunæ noſtræ, in ratione compoſitâ ex ratione duplicatâ temporis periodici terræ circa ſolem ad tempus periodicum jovis circa ſolem, & ratione ſimplici temporis periodici ſatellitis circa jovem ad tempus periodicum lunæ circa terram (per corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) ideoque (b) annis centum conficit nodus iſte 8 gr. 24′. in antecedentia. Motus medii nodorum ſatellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium) & inde dantur. Motus au-

204. commodius explicabuntur, & quomodò variatio Lunæ ad proſtaphæreſim in calculo Aſtronomico referri ſoleat, exponetur. Variatio autem dicitur inæqualitas illa quâ fit ut motus Lunæ in primo menſis quadrante, ſive pergente Lunâ à conjunctione ad quadraturam proximam retardetur, in ſecundo acceleretur dum tendit à quadraturâ ad oppoſitionem, in tertio retardetur rurſus & in quarto iterum acceleretur.

(b) * *Ideóque annis centum.* Tempus periodicum terræ circà ſolem eſt dierum 365.2565; tempus periodicum jovis circà ſolem eſt dierum 4332.514 (per phæn. 4.) tempus periodicum ſatellitis circà jovem eſt

autem augis satellitis cujusque in consequentia est ad motum nodorum ipsius in antecedentia, ut motus apogæi lunæ nostræ ad hujus motum nodorum, (per idem corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob (c) causam quam hic exponere non vacat.

est dierum 16.6880 (per phæn. 2.) & tempus periodicum Lunæ circà terram dierum 27.321. (prop. 17.). Sumptisque Logarithmis, erit

L. $(365.2565)^2 = 5.1251956$
L. $16.6880 = 1.2224043$

utriusque summa $= 6.3475999$

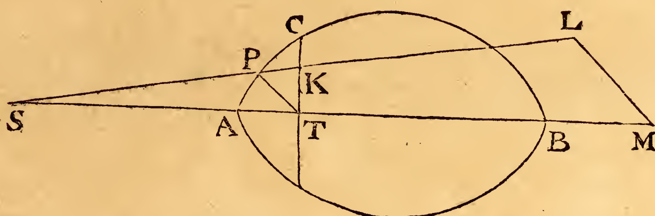
Deindè L. $(4332.514)^2 = 7.2734600$
L. $27.321 = 1.4364966$

utriusque summa $= 8.7099566$

Ab hâc ultimâ subtrahatur summa superior - - 6 3475999

residuum erit L. 2,3623567

Cui respondet numerus 230.38. Quarè ex hoc calculo & Analogiâ Newtoni patet motum nodorum satellitis extimi jovis esse partem circiter 230am. motûs nodorum Lunæ, sed est motus annuus nodorum Lunæ 19°. 21′ 21″, ut dicetur postea. Hisce si multiplicetur motus ille annuus per 100 factumque dividatur per 230, prodibit motus nodorum satellitis intervallo annorum centum 8°. 24′. Ab hujus sæculi initio nullum in nodis satellitum jovialium sensibilem motum fuisse observatum testatur Clariss. Cassinus in elem. Astr.



(c) 105. *Ob causam quam hic exponere non vacat.* Referat S Solem, sitque P satelles, putà Luna revolvens circà Planetam primarium T scilicet terram, in ellipseos umbilico positum; erit B apsis summa, A apsis ima, eritque T B, distantia maxima & A T distantia minima. Jam verò quò minor est distantia A T, respectu distantiæ T B, eò celerius apsides progrediuntur, (per not. in cor. 8. prop. 66. lib. 1.). Ea est correctionis causa quam Autor noster non exponit. Cum enim satellites Jovis & Saturni circà suos Planetas primarios describant circulos ferè concentricos (phæn. 1. & 2.) Luna verò circà terram in orbitâ ellipticâ revolvatur, & major sit motus nodorum in orbita elliptica quam in circulari, cæteris omnibus manentibus, hinc motus augis cujuscumque satellitis per Analogiam ex motu Augis Lunaris inventus, diminui debet in ratione paulò minore quam 1 ad 2, calculo non absimili illi qui 31a. prop. instituetur.

De Mundi Systemate.

vacat. (d) Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque ferè ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis lunæ reſpectivè, ut motus nodorum & augis ſatellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. (e) Variatio ſatellitis è jove ſpectati, eſt ad variationem lunæ, ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & luna ad ſolem revolvuntur, per idem corollarium; ideóque in ſatellite extimo non ſuperat 5″. 12‴.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus ſolis ac lunæ oriri.

Mare ſingulis diebus tam lunaribus quam ſolaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere, patet (f) per corol. 19. & 20. prop.

105. (d) * *Æquationes maximæ.* Nam errores angulares in ſingulis revolutionibus geniti, ideóque eorumdem errorum correctiones ſeu æquationes maximæ ſunt ut ſatellitum tempora periodica reſpectivè (per cor. 16. prop. 66. lib. 1.). Sed tempora periodica ſunt ut motus ipſi angulares reſpective (ibid.). Quare in eâdem quoque ratione ſunt æquationes maximæ.

(e) * *Variatio Satellitis è jove ſpectati*, hoc eſt, motus angularis ſatellitis eſt ad motum angularem Lunæ ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & Luna ad Solem revolvuntur, ſive clariùs in ratione nodorum Lunæ ad motum nodorum annuum & temporis periodici Lunæ ad tempus periodicum ſatellitis (per cor. 16. prop. 66. lib. 1. & not. in idem coroll.). Jam verò motus nodorum Lunæ annuus eſt 69681″, ut poſteà ſtatuitur à Newtono, nodus autem ſatellitis extimi jovialis annis centum conficit 8°. 24′ ideóque motus ejuſdem annuus eſt 302 $\frac{2}{5}$, tempus periodicum Lunæ eſt dierum 27 321 & ſatellitis extimi dierum 16.688. Sumptis Logarithmis erit

L. -	69.681	= 4.8431144
L. dierum	27.321	= 1.4364966
utriuſque Log. ſumma		= 6.2796110
Deindè L.	302 $\frac{2}{5}$	= 2.4805818
Lòg. dier.	16.688	= 1.2224043
utriuſque ſumma		= 3.7029861

Hæc ſubtrahatur à ſummâ ſuperiori 6.2796110 remanet Log. 2.5766249, cui reſpondet numerus 378. fere. Quare ex Analogiâ Newtoni & calculo colligitur variationem ſatellitis eſſe partem 378am. variationis Lunæ circiter. Sed variationem Lunæ maximam in apogæo Solis deinceps determinat Newtonus 33′ 14″ ſivè 1994″. Quarè pars 378a. eſt 5″ 15‴ ut Newtonus invenit, quamproximè.

(f) * *Per Cor. 19. & 20.* Si fluidum in alveo per ſuperficiem cujuſvis Planetæ excavato contineatur, ſimulque cum Planetâ motu diurno periodico uniformiter revolvatur, partes ſingulæ hujus fluidi per vices acceleratæ & retardatæ in ſyzigiis ſuis, hoc eſt, in meridie & mediâ nocte velo-

prop. LXVI. lib. I. ut (g) & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei* ut & in maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit, nisi ubi motus ab Oceano profundo per loca vadosa propagatus usque ad horam quintam sextam septimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quam supra, & per horas diei lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis solis vel lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu & per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit, id quod fiet spatio horæ unius duarumve sed sæpius ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium si mare sit vadosum.

(h) Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernen-

velociores erunt; in quadraturis sivè horâ sextâ matutinâ, & vespertinâ tardiores quam superficies globi contigua, quarè fluet in alveo refluetque per vices perpetuò (per cor. 19. & 20.) idem posteà iterum demonstrabitur viresque Solis & Lunæ seorsim computabuntur.

(g) * *Aqua maximam altitudinem.* Rem ità se habere patet ex observatis æstibus marinis, ratio autem hæc est. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum & posteà decrescit, attamen hujus vis effectus nondum est maximus. Omnis enim motus semel impressus perseverat uniformiter, donec motu contrario destruatur vel saltem retardetur. Hinc fit ut fluxus maris per sex circiter horas antemeridianas auctus & cum motu diurno conspirans acceleratus, majori celeritate ulterius pergere debeat & aquas magis magisque attollet, usquè dum eadem vis motui diurno contraria fluidi cursum paulatim sistat & aquas cogat refluere. Hæc motûs retardatio maximè circà octantes sive horam tertiam notabilis est. Alia non desunt exempla maximorum effectuum qui post causas maximas contingunt. Non in ipsis solstitiis æstivis maxime fervet æstas, sicut neque in ipsis solstitiis Hybernis maximè friget hiems; sed integro circiter mense post solstitia maximus deprehenditur æstatis Hyemisque effectus. Indubitatâ quoque constat experientiâ summum calorem secundâ aut tertiâ post meridiem horâ fieri. 105.

(h) * *Motus autem bini.* Quemadmodum corpus quodvis duplici vi sollicitatum in lineis duabus progredi nequit, sed conjunctis viribus parallelogrammi diagonalem eodem modo describit ac si unicâ vi juxtà diagonalis directionem urgeretur

(41,

De Mundi Systemate.

cernentur diſtinctè, ſed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppoſitione conjungentur eorum effectus, & componetur ([i]) fluxus & refluxus maximus. In quadraturis ſol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit; & ex effectuum differentia æſtus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teſte, major eſt effectus lunæ quam ſolis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra ſyzygias & quadraturas, æſtus maximus qui ſolâ vi lunari incidere ſemper deberet in horam tertiam lunarem, & ſolâ ſolari in tertiam ſolarem, compoſitis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius eſt; ideóque in tranſitu lunæ à ſyzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia ſolaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt octantes lunæ, & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam lunarem in tranſitu lunæ à quadraturis ad ſyzygias. Hæc ita ſunt in mari aperto. Nam in oſtiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum diſtantiis à terrâ. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in ([k]) triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur ſol tempore hyberno, in perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in ſyzygiis ([l]) paulò majores ſint, & in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æſtivo; & luna in perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quam antè vel poſt dies quindecim, ubi in apogæo verſatur. ([m]) Unde fit ut æſtus duos omnino maximi in ſyzygiis continuis ſe mutuò non ſequantur. Pen-

165. (41. lib. 1.) ità motus bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur diſtinctè ſed motum quemdam mixtum efficient.

(i) * *Fluxus & refluxus maximus*, utpotè è virium ſummâ tum temporis oriundus.

(k) * *In triplicatâ ratione diametrorum* (cor. 14. prop. 66. lib. 1.).

(l) * *Paulò majores ſint*, ob majorem virium ſummam & in quadraturis paulò minores ob minorem virium differentiam quam tempore æſtivo.

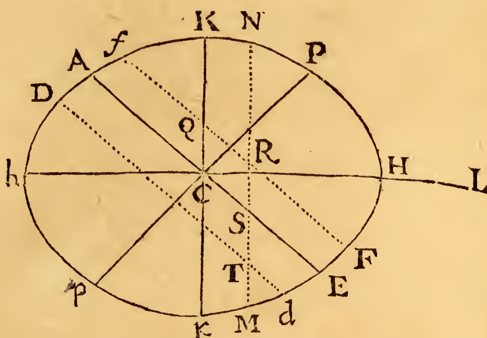
(m) * *Undè fit ut æſtus.* Si enim Luna in ſyzigiarum altera ſit circà perigæum, æſtumque maximum conjunctis cum ſole viribus tunc temporis excitet, neceſſe eſt ut in alterâ ſyzygia verſetur circà apogæum minoreſque vires obtineat.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione seu distantiâ ab æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione & remissione ideóque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maximè superat effectum solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in syzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiam solis à terrâ, tempòre hyberno quam tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpiùs præcedant æquinoctium vernum quam sequantur, & sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

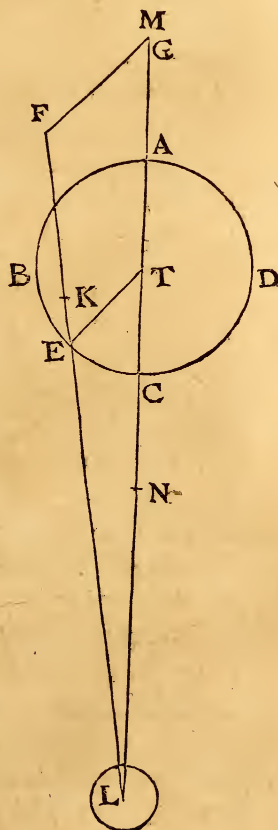
Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Designet *ApEP* tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE* æquatorem; *F* locum quemvis extra æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei respondentem ex alterâ parte æquatoris; *L* locum quem luna tribus ante horis occupabat; *H* locum telluris ei perpendiculariter subjectum; *h* locum huic oppositum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 distantia, *CH*, *Ch* maris altitudines maximas mensuratas à centro telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & si axibus *Hh*, *Kk* describatur ellipsis, deinde ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* describatur sphærois *HPKhpk*; designabit hæc figuram maris

De Mundi Systemate.

ris (n) quam proximè, & erunt CF, Cf, CD, Cd altitudines maris in locis F, f, D, d. Quinetiam si in præfatâ ellipseos revolutione punctum quodvis N describat circulum NM, secantem parallelos Ff, Dd in locis quibusvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo maris in locis omni-



106. (n) 106. * *Figuram maris quam proximè.* Circulus centro T descriptus tellurem referat, circulus autem centro L, descriptus exhibeat Lunam. Si nullâ esset in tellurem actio, tellus profundis aquis undiquè cooperta & quiescens (per hyp.) in sphæram sese componeret. At singulæ telluris partes gravitant in Lunam estque gravitas in Lunam in ratione duplicatâ distantiarum à centro reciprocè. Jam verò recta L T, exponat gravitatem acceleratricem corporis in centro T positi versùs Lunam, sitque E quælibet fluidi marini particula. Si in rectâ L E productâ sumatur L K æqualis L T, sitque L F ad L K in duplicatâ ratione L K ad L E, recta L F exponet gravitatem corporis in loco E versus Lunam, quæ vis dividitur in vires ut F G & G L (prop. 66. lib. 1.). Si autem à vi illâ quâ corpus in E, locatum urgetur quæ est ut G L, auferatur vis ut T L quâ centrum telluris urgetur versus Lunam relinquentur vires ut F G, G T, quibus corpus E sollicitatur præter vim propriæ gravitatis quâ tendit versus centrum terræ & vim ipsi communem cum centro ipsius terræ. Jam sit C punctum telluris cujus zenith Luna immineat, A verò punctum oppositum, sintque B & D puncta circumposita, sivè potius exhibeant circulum horizontis in quo Luna versatur, liquet punctum G à T maximè distare, ubi punctum E est aut in C, aut in A; in priori casu G, transeat in M, in posteriori in N; dum verò punctum E versatur in circulo B D, punctum G ferè coincidit cum T, nullaque partibus in



bus *R*, *S*, *T*, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, horâ tertiâ post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem; postea defluxus maximus in *Q* horâ tertiâ post occasum lunæ; dein affluxus maximus in *f* horâ tertiâ post appulsum lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* horâ tertiâ post ortum lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemisphæricos, unum hemisphærio *KHk* ad boream vergentem, alterum in hemisphærio opposito *Khk*; quos igitur fluctum borealem & fluctum australem nominare licet.

circulo B D locatis relinquitur vis præter vim gravitatis propriæ atque vim F G; ipsa verò F G, fit B T aut D T, coeuntibus punctis F & K; quare fluidi particulæ in locis B & D, præter vim gravitatis propriæ urgentur etiam versus centrum T vi ex Lunâ procedente; Particulæ in loco C, versus Lunam magis attrahuntur quam terra integra quæ in centro T, locata fingi potest, particulæ autem in loco A, versus Lunam minus attrahuntur quam terra integra in T, ideóque eodem modo afficiuntur ac si ad partes contrarias urgerentur. At particulæ in circulo B D, magis gravitant versus T; in locis inter A, vel C, & B vel D, intermediis fluidi particulæ utramque conditionem participant; quo viciniores sunt fluidi terrestris partes punctis C & A, eò minùs graves sunt, nam actio Lunæ sivè vis ut G T, vim propriæ gravitatis versus T, minuit, & quo propiores sunt punctis B & D, eò graviores fiunt, eadem enim actio Lunaris sivè vis ut F G, gravitatem propriam auget. Quia verò globus A B C D, fluido satis profundo undiquè coopertus ponitur fluidi autem partes cedunt vi cuicumque illatæ & cedendo facilè moventur inter se, fluidum illud versus A & C positum à fluido versus B & D, posito expelletur, levius scilicet à graviore, attolletur ergò fluidum versus A & C, deprimeturque versus B & D, donec scilicet major fluidi moles & altitudo majorem gravitatem compenset, & ubiquè constituatur æquilibrium. Quapropter superficies maris sese componet in figuram sphæroidem cujus axis est recta A C, quæ producta per Lunam transibit. Hinc patet figuram maris in sphæroidem oblongam formari debere.

107. Simili argumento patet consideratâ Solis actione fluidum terrestre componi in sphæroidem oblongam cujus axis productus per Solem transit. Si enim (in figur. præc.) globus L non Lunam sed Solem designet, cætera se habent ut suprà. At in hoc casu minor erit quam in altero axium differentia. Nam fluidi tumor in C hinc oritur quod fluidum magis gravitet versus Lunam quam telluris centrum T, tumor autem fluidi in A, inde provenit quod terræ centrum magis quam fluidum versus Lunam gravitet; quarè, si hæc elevatio Solis actioni tribuatur, minor erit effectus quamvis actio Solis in terram major sit quam actio Lunæ in eamdem, telluris enim semidiameter T C vel T A ferè evanescit respectu immensæ Solis à terrâ distantiæ, ideóque fluidi in C locati gravitas versus solem erit insensibiliter major gravitate telluris versus eundem, & fluidi in A positi gravitas versus solem erit insensibiliter minor gravitate telluris versus eundem, quarè figura sphæroidea indè genita parum intumescet ad vertices C & A, parumque in circulo B D deprimetur, attamen propter immensas Solis licet remotissimi vires, aliquis erit actionis Solaris effectus. 107.

DE MUNDI SYSTEMATE.

licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuò oppoſiti veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æſtus autem major, lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem, & lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in (o) tempora ſolſtitiorum; præſertim ſi lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic experientiâ compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperant veſpertinos & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proximè poſt quadraturas minuit. Unde fit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multò magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint (p) quarti vel etiam quinti à ſyzygiis.

Porro

107. (o) * *In tempora ſolſtitiorum.* Tunc enim in ſyzygiis utrumque luminare ab æquatore maximè declinat, atque fluxuum differentia adhuc augebitur, ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis; nam præter declinationis Solis maximam, Luna quoque Soli conjuncta quantitate latitudinis maximæ in Boream aut auſtrum magis declinat. Hinc fit fluctus Borealis nobis viciniſſimus & fluctus auſtralis remotiſſimus in eâdem revolutione diurnâ.

(p) * *Sint quarti vel etiam quinti.* In opuſculo de mundi ſyſtemate quædam occur-

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ab oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſivè advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales à diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquillè ſtagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini

LIBER TERTIUS. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

occurrunt obſervationes quæ ad hunc locum pertinent, eas itaque exſcribemus. Fieri etiam poteſt, inquit Autor, ut æſtus omnium maximus ſit quartus vel quintus à ſyzygiis vel tardius adveniat, eò quod retardantur motus marium in tranſitu per loca vadoſa ad littora. Sic enim æſtus accedit ad littus occidentale Hiberniæ horâ tertiâ Lunari, & poſt horam unam & alteram ad portus in littore auſtrali ejuſdem inſulæ ut & ad inſulas Caſſiterides vulgò Sorling dictas. Dein ſucceſſivè ad Falmuthum, Plimuthum Portlandiam inſulam Vectam, Winchelſeiam, Doveriam, oſtium Tameſis & Pontem Londinenſem, conſumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed & Oceani ipſius alveis haud ſatis profundis impeditur æſtuum propagatio, incidit enim æſtus ad inſulas fortunatas & ad Occidentalia marique atlantico expoſita littora Hiberniæ, Galliæ, Hiſpaniæ & Africæ totius uſquè ad caput bonæ ſpei in horam tertiam Lunarem, præterquam in locis nonnullis vadoſis ubi æſtus impeditus tardiùs advenit inque freto Gaditano quod motu ex mari mediterraneo propagato citiùs æſtuat; pergendo verò de his littoribus per Oceani latitudinem ad oras Americæ, accedit æſtus primò ad Braſiliæ littora maximè Orientalia circà horam Lunarem quartam vel quintam; deindè ad oſtium fluvii Amazonum horâ ſextâ, ad inſulas verò adjacentes horâ quartâ, poſteà ad inſulas Bermudas horâ ſeptimâ & ad Floridæ portum S. Auguſtini horâ $7\frac{1}{2}$. Tardius igitur progreditur æſtus per Oceanum quam pro ratione motûs Lunæ; & pernéceſſaria eſt hæcce retardatio ut mare eodem tempore deſcendat inter Braſiliam & novam Franciam, aſcendatque ad inſulas fortunatas & littora Europæ & Africæ & viceverſâ. Namque mare aſcendere nequit in uno loco quin ſimul deſcendat in altero. Lege jam deſcriptâ agitari quoque mare pacificum veriſimile eſt. Namque æſtus altiſſimi in littore Chilienſi & Peruviano incidere dicuntur in horam tertiam Lunarem, ſed quâ velocitate propagantur indè ad littus Orientale Japoniæ & ad inſulas Philippinas cæteraſque regno Sinarum adjacentes nondum reperi.

108. In alveis fluminum pendet influxus & refluxus à fluminum curſu. Nam curſus ille facit aquam tardiùs influere ex mari & in mare citius & velocius re- 108.

 fluere

DE MUNDI SYSTEMATE. bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam; & altitudo maxima, si luna declinat in polum supra horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu lunæ ad meridianum, atque lunæ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* sub latitudine boreali 20 gr. 50'. *Halleius* ex nautarum observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum lunæ per æquatorem sequente stagnat, dein lunâ ad boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimam vel octavam, dein

109. fluere atquè adeò diutius refluere quam influere, præsertim si longè in flumen ascenditur ubi minor est vis maris. Sic in fluvio Avonæ ad tertium lapidem infrà Bristoliam refert Sturmius aquam horis quinis influere, septenis refluere suprà Bristoliam ut ad Canesham vel Bathoniam differentia procul dubio major est. Pendet etiam hæc differentia à magnitudine fluxûs & refluxûs. Nam propè Luminarium syzigias, vehementior maris motus facilius superando resistentiam fluminum faciet aquam citius ac diutius influere, adeóque minuet hanc differentiam: intereà verò dum Luna ad syzigias properat, necesse est ut flumina ob cursus suos per magnitudinem æstuum impeditos magis impleantur & propterea maris refluxum paulò magis impediant proximè post syzigias quam proximè antè. Eâ de causâ æstus omnium tardissimi non incident in ipsas syzigias, sed paulò præcedent. Dixi æstus etiam antè syzigias retardari vi Solis. Conjungatur causa utraque & æstuum retardatio & major erit & syzigias magis præcedet. Quæ omnia ità se habere colligo ex tabulis æstuum quas Flamsteedius ex observationibus quamplurimis construxit.

109. Æstuum magnitudo non parum etiam pendet à magnitudine marium, ut in opusculo citato observat Clariss. Autor. Sit C centrum terræ, EADB oblonga maris figura, CA semiaxis major, GB semiaxis minor priori insistens ad angulos rectos. Sumatur D punctum medium inter A & B, sitque ECF, vel ipsi æqualis eCf angulus ad centrum terræ quem subtendit latitudo maris littoribus E, F, vel e, f, terminati; versetur autem punctum A, in medio inter puncta E, T, & punctum D in medio inter puncta e, f. Si per differentiam altitudinum CA, CB, exponatur quantitas æstus in mari satis profundo terram totam cingente, excessus altitudinis CA super altitudinem CE vel CF designabit maximam quantitatem æstus in medio maris EF littoribus E, F terminati, & excessus altitudinis Ce super altitudinem Cf.

dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinenſi* inter continentem & inſulam *Luconiam*, alter à mari *Indico* inter continentem & inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim à mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum lunæ & marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

C f, exponet maximam quantitatem æſtûs ad littora ejuſdem maris. (Nam, differentia inter Diametrum biſecantem angulum datum quem faciunt duæ Diametri Ellipſeos & alterutram ex illis Diametris major eſſe non poteſt ex naturâ Ellipſeos quam ſi illa Diameter biſcecans ſit ſemi axis major, & differentia inter illas duas ipſas Diametros angulum datum conſtituentes major eſſe nequit quàm ſi Diameter angulum biſecans faciat angulum cum axe ſemi-rectum). Unde patet æſtus ad littora eſſe propemodum ut maris latitudo E F, arcu quadrantali non major. Hinc fit ut nullus aut fere nullus obſervetur aquarum motus in maribus non ſatis late patentibus, niſi cum Oceano ipſo liberè communicent. Si enim nihil aut parum cum Oceano communicent, ut accidit in mari mediterraneo, æſtus quoquè eam ob cauſam minor deprehenditur. Hinc eſt etiam quod propè æquatorem ubi mare inter Africam & Americam anguſtum eſt, æſtus ſint multò minores quam hinc indè in zonis temperatis ubi maria latè patent, & in maris pacifici littoribus ferè ſingulis tam Americanis quam Sinicis & intrà tropicos & extrà. Contingere tamen poteſt ut æſtus qui in Oceano mediocris eſt in fluviis evadat maximus propter tranſitûs anguſtias littorumque ſeorſim coeuntium convergentiam. Hæc de maris æſtu pro præſenti dicta ſint, de hâc Nobiliſſimâ inter Phyſicos quæſtione plurima in decurſu ubi recurret occaſio, adjungemus. Prolixius foret proſequi factas à diligentiſſimis Philoſophis æſtuum obſervationes; legantur quæ huc & illuc tum in tranſact. Angl. tum in Mon. Pariſ. diſperſa inveniuntur, ſed ea præſertim quæ Clariſſ. Viri Halleius num. 226. tranſact. & Caſſinus in Mon. Pariſ. an. 1712. 1713. ſcripta reliquerunt. 109.

EDITOR

EDITOR LECTORI.

Felicius commentari non possumus ea quæ tradit Autor noster de Maris æstu, quam huic Propositioni subjungendo eas Dissertationes quæ Præmio fuère condecoratæ à Celebri Parisiensi Scientiarum Academiâ: Id quidem primum nobis fuerat propositum, ut ea quæ in illis Dissertationibus momentosiora viderentur & ad Newtonianæ Philosophiæ illustrationem pertinerent, brevi compendio comprehensa Notis adjiceremus; verùm trunca ac ingenii nostri vitio detrita exhibere hæc Illustrissimorum Virorum scripta meritò piguit, & non dubitavimus nos meliùs consulturos tùm Lectoribus nostris tùm ipsis eorum scriptorum Authoribus, si qualia sunt edita hìc illa insereremus: cumque Authorum à typothetis absentiâ factum sit ut in Editione Parisinâ plurima irrepserint menda nullo Errorum catalogo correcta, ea, demonstrationibus ac calculis accuratè repetitis, emendavimus, figurasque ad loca quibus respondent aptari curavimus.

Quatuor quidem Dissertationes Parisinis typis fuerunt evulgatæ, quarum prior à Patre Cavallieri Jesuitâ, secunda à Daniele Bernoullio, tertia à . . . Mac-Laurino, quarta à Leonardo Eulero fuere ad Academiam missæ; Prior in eo occupatur ut Cartesianæ hypotheseos circa causam æstus marini vitia & hiatus corrigat & resarciat, quod quidem ingeniosè admodum præstat; tres reliquæ ex Legibus gravitatis aquarum Maris in Solem Lunam & Terram omnes Phænomeni propositi circumstantias explicant & calculis determinant, has ergo tres, omissâ priore, hujus esse loci credidimus.

In Dissertatione Mac-Laurini occurrit solutio syntheticâ Problematis de Figurâ Terræ, quale illud proposueramus in Notis nostris ad Prop. XIX. quodque parum felici successu Analyticè solvere tentaveramus, ex ejus solutione patet Meridianum esse veram Ellipsim in Hypothesi quod terra sit homogenea, cum autem hæc in manus nostras non devenerint nisi cum notæ ad eam Propositionem XIX prælum subiissent, inde factum est ut in iis Notis de illo Problemate ut nondum soluto egerimus: Quæ in his tribus Dissertationibus ingeniosa sunt enumerare longiùs foret, intelligit Lector quæ sint ipsi speranda à tantis Viris & quam facilis, his intellectis & perlectis, futurus sit transitus ad ea quæ sequuntur de Lunæ motu, de præcessione Æquinoctiorum, aliisque; Lectorem itaque rogamus ut nobis vitio non vertat, quod Typographo indulserimus hæc qualia sunt edere, ne, & ipse Lector & Typographus, eam paterentur moram quæ ad condendam Epitomem istarum Dissertationum necessaria fuisset.

TRAITÉ SUR LE FLUX ET REFLUX DE LA MER.

Par Mr. DANIEL BERNOULLY Professeur d'Anatomie & de Botanique à Basle.

Devise, *Deus nobis hæc otia fecit.*

Pour concourir au Prix de 1740.

CHAPITRE PREMIER.

Contenant une Introduction à la Question proposée.

I.

DANS le grand nombre des Systêmes sur le Flux & Reflux de la Mer, qui sont parvenus à notre connoissance depuis l'antiquité la plus reculée, il n'y a plus que ceux des Tourbillons & de l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps célestes & de la Terre, qui partagent encore les Philosophes de notre tems : l'un & l'autre de ces Systêmes ont eu les plus grands Hommes pour Défenseurs, & ont entraîné des Nations entieres dans leur parti. Il semble donc que tout le mérite qui nous reste à espérer sur cette grande Question, est de bien opter entre ces deux Systêmes, & de bien manier celui qu'on aura choisi pour expliquer tous les Phénomenes qu'on a observés jusqu'ici sur le Flux & Reflux de la Mer, pour en tirer de nouvelles propriétés, & pour donner des uns & des autres les Calculs & les Mesures.

I I.

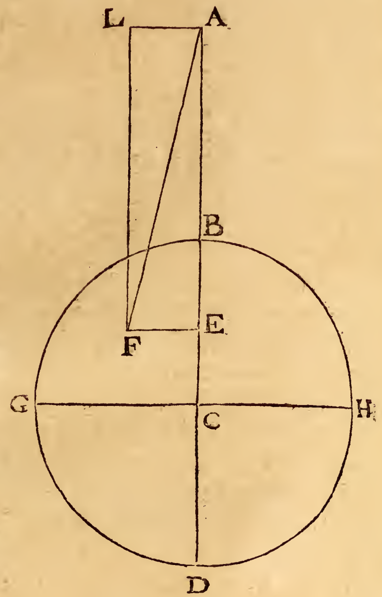
J'ai commencé d'abord par l'idée de Kepler, qu'on nomme avec justice le Pere de la vraie Philosophie. Elle est fondée sur l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps céleftes & de la Terre : cet incompréhensible & inconteftable Principe, que le grand Newton a si bien établi, & qu'on ne sçauroit plus revoquer en doute, sans faire tort aux sublimes connoissances & aux heureuses découvertes de notre siécle. Après un examen fort scrupuleux, j'ai vû que cette Gravitation mutuelle, considérée dans les Globes de la Terre, de la Lune & du Soleil, non-seulement pouvoit produire tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, mais même qu'elle le devoit necessairement, & qu'elle le devoit, suivant toutes les loix qu'on a observées jusqu'ici. Avec ces heureux succès, j'ai poussé mes recherches aussi loin qu'il m'a été possible de les porter. En chemin faisant, je suis tombé sur les Théoremes de M. Newton, dont je n'avois pû gueres voir la source auparavant; mais en même tems j'ai remarqué le peu de chemin qu'on a encore fait dans cette matiere, & même l'insuffisance de la Méthode ûsitée, lorsqu'elle est appliquée à des Questions un peu détaillées. J'ai suivi une toute autre route; j'ai poussé mes recherches bien plus loin, & je suis entré dans un détail tel que l'ACADEMIE m'a paru le demander; & je dois dire à l'avantage des Principes que nous adopterons, que j'ai trouvé par-tout un accord merveilleux entre la Théorie & les Observations, accord qui doit être d'autant moins suspect, que je n'ai consulté les Observations, qu'après avoir achevé tous mes Calculs, de maniere que je puis dire de bonne foi, d'avoir deviné la plufpart des Observations, sur lesquelles je n'étois pas trop bien informé, lorsque j'ai entrepris cet Ouvrage.

I I I.

Quant aux Tourbillons, j'avouë qu'il est bien difficile d'en demontrer le faux à ceux qui veulent s'obstiner à les défendre : mais aussi il n'en est pas de la Physique, comme de la Géometrie. Dans celle-ci on n'admet, ni ne rejette rien, que ce dont on peut absolument démontrer la vérité ou la fausseté, pendant que dans la Physique il faut se rapporter souvent à un certain instinct naturel de sentir le faux & le vrai, après avoir bien pésé toutes les raisons de part & d'autre. Quant à moi, je ne trouve point ce caractere de vérité, ni dans l'hypothese des Tourbillons, ni dans les conséquences que l'on en tire. Si nous disons que le Tourbillon a la même densité, la même direction & la même vitesse que la Lune, ce Tourbillon ne sçauroit faire aucun effet; & si au contraire

traire nous ſuppoſons ces trois choſes n'être pas les mêmes de part & d'autre, il me paroît bien clair & bien certain, que l'effet du Tourbillon devroit ſe manifeſter infiniment davantage dans le mouvement de la Lune, que dans celui des Eaux de la Terre. Cependant on ſçait parfaitement bien que la Lune, quoique ſujette à beaucoup d'irrégularités dans ſes mouvemens, n'en a aucune qui puiſſe être attribuée à l'action auſſi ſenſible d'un Tourbillon. Si nous paſſons par deſſus toutes ces différentes difficultés, nous en rencontrerons d'autres également embaraſſantes. C'eſt contre les loix de l'Hydroſtatique, que la Lune, qui nage dans le Tourbillon, puiſſe cauſer des variations dans la compreſſion des parties du Fluide. C'eſt une propriété eſſentielle des Fluides de ſe remettre auſſi-tôt à l'Equilibre, lorſque ſes Parties en ſont ſorties. Si une colonne de Tourbillon, entre la Lune & la Terre, étoit plus comprimée qu'une autre colonne ſemblable, rien ne ſçauroit empêcher ſes parties de s'échaper de côté juſqu'au retabliſſement de l'Equilibre. Qu'on s'imagine, par exemple, l'air de notre Atmoſphere tout d'un coup extrêmement échauffé; ce changement feroit en même tems hauſſer à proportion le Mercure dans le Barometre, puiſque l'air chaud a plus de reſſort que l'air froid; mais comme rien n'empêche l'air de s'échaper de côté juſqu'à la parfaite conſervation de l'Equilibre, cela fait qu'un tel changement n'en ſçauroit faire aucun ſur le Barometre; auſſi n'obſerve-t-on dans le Barometre aucune variation du jour à la nuit, qui cependant, par un raiſonnement tout-à-fait ſemblable à celui des Tourbillonnaires pour expliquer les Marées, devroit être très-ſenſible. Pareillement ſi les eaux d'une Riviere donnent contre un pieu, on ne remarquera aucune différence dans la ſurface des eaux, que bien près du pieu, & le fond du lit de la Riviere ſera toujours également preſſé. En voilà aſſez & trop ſur cette matiere; car ce ſera toujours aux Sectateurs de Deſcartes de montrer l'effet des Tourbillons ſur l'Océan, avec la même clarté qu'on peut le faire, moyennant le principe de Kepler, principe d'ailleurs qui n'eſt plus conteſté; ſçavoir, que la Terre & tous les Corps céleſtes ont une tendance mutuelle à s'approcher les uns des autres. Ce principe poſé, il eſt facile de faire voir, que la Terre que nous ſuppoſerons devoir être ſans cette tendance parfaitement ronde, en changera continuellement ſa figure, & que c'eſt ce changement de figure qui eſt la cauſe du Flux & Reflux de la Mer: Comme ce changement dans la Figure de la ſurface de la Terre eſt produit de differentes façons, j'en ferai ici un dénombrement, & je tâcherai dans la ſuite d'en donner la meſure.

IV.



Si *A* eſt le centre de la Lune, ou du Soleil: *B G D H* la Terre; ſi l'on tire par les centres de la Lune ou du Soleil & de la Terre la droite *A D*, & qu'on prenne au dedans de la Terre un Point quelconque *F*, on tirera *F E* perpendiculaire à *B D*, avec la droite *F A*, & on achevera le Rectangle *F L A E*. Chaque point *F* eſt tiré ou pouſſé vers *A*, & cette force étant repreſentée par *F A*, elle ſera conſidérée comme compoſée des deux Laterales *F L* & *F E*: cela étant, on voit que la force *F E* étant appliquée dans chaque point de la Terre, ne ſçauroit que l'allonger au tour de *B D*: Et comme c'eſt une même raiſon pour tous les Plans qui paſſent par *B D*, il eſt clair que la Terre formera ainſi un Sphéroïde produit par la rotation d'une Courbe *B G D* autour de *B D*.

On remarquera, que cet allongement ne ſçauroit être qu'extrêmement petit. *Premierement*, à cauſe de la petiteſſe des Lignes, *F E* par rapport à *F A*. *En ſécond lieu*, à cauſe du peu de rapport qu'il y a entre la péſanteur du Point *F* vers *A*, à la péſanteur du même Point vers le centre de la Terre *C*. Nous verrons dans la ſuite que cet allongement ne peut aller qu'à un petit nombre de pieds, ce qui eſt fort peu conſidérable, par rapport au Diametre de la Terre.

On remarquera encore, que l'allongement total étant imperceptible par rapport au Diametre de la Terre, la différence des allongemens pour l'Hemiſphere ſupérieur *G B H*, & pour l'inférieur *G D H*, doit être inſenſible par rapport à l'allongement total; à la rigueur, il faudroit dire, que les forces exprimées par *F E*, ſont tant ſoit peu plus grandes dans l'Hemiſphere *G B H*; que dans l'Hemiſphere oppoſé, dont les parties ſont plus éloignées du point *A*, & qu'ainſi ledit Hemiſphere *GBH* ſera un peu plus allongé que l'autre Hemiſphere: mais on ſent bien que la différence doit être inſenſible. On peut donc prévoir que les Poles *B* & *D* reſteront également éloignés du Point *C*, & que la Courbe *GBH* pourra être cenſée la même que *G D H*. Nous donnerons un Calcul juſte & détaillé de tout cela dans la ſuite de ce Traité.

Ve-

Venons à une feconde confidération, qui produira le même refultat, que celle dont nous venons de parler.

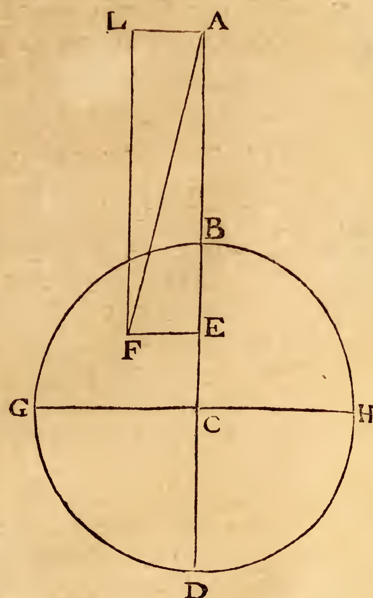
V.

Comme la Terre tâche continuellement à s'approcher du Soleil & de la Lune, il faut qu'il y ait en même tems d'autres forces qui la rètiennent; & ce font les forces centrifuges de la Terre, qu'elle a par fon mouvement autour du Soleil, & autour du centre de Gravité (je l'appelle ainfi, pour me conformer à l'ufage) qui eft entre la Terre & la Lune. Je démontrerai auffi ci-deffous, que cette force centrifuge doit être fuppofée égale dans toutes les parties de la Terre, & parallele à la Ligne *AD*, pendant que l'autre force fe répand inégalement fur les parties de la Terre. Elle eft plus grande dans les parties les plus proches de *A*, & plus petite dans les parties qui en font plus éloignées, & cela en raifon quarrée reciproque des Diftances. Cette raifon fuppofée, le Calcul fait voir, que pourvû que les Couches concentriques de la Terre autour du Point *C*, foient homogenes, la force moyenne, qui pouffe les parties de la Terre vers *A*, eft précifément celle qui répond au centre de la Terre *C*; & que c'eft dans ce centre *C*, où la force centrifuge eft précifément égale à la force centripete. Ainfi chaque partie qui eft entre *C* & *B*, eft plus pouffée vers *A*, qu'elle n'eft repouffée; & au contraire chaque partie fituée entre *C* & *D*, eft moins pouffée vers *A*; qu'elle n'eft repouffée; de forte qu'en s'imaginant deux Canaux communiquans entre eux *GH* & *BD*, on voit que chaque goute dans la partie *CB*, eft tirée vers *A*, & que chaque goute dans la partie *CD*, eft pouffée dans un fens contraire. Cela diminue l'action de la péfanteur vers le centre de la Terre dans le Canal *BD*, pendant que cette même péfanteur n'eft pas diminuée dans le Canal *GH*, d'où il arrivera encore un allongement autour de l'Axe *BD*, ce que je m'étois propofé de faire voir.

Le Calcul montre que cette raifon eft en foi-même de fort peu d'importance; qu'elle ne fçauroit allonger l'Axe *BD* confidérablement. Mais fon refultat eft affez comparable avec celui de l'allongement expofé auparavant. On prévoit d'ailleurs encore que l'allongement produit par cette raifon, doit être égal dans les Canaux *BC* & *CD*, la différence ne pouvant être fenfible; & ainfi les Points *B* & *D* refteront encore également éloignés du centre *C*.

V I.

Une troifiéme raifon, qui peut allonger davantage l'Axe *BD*, eft que par l'allongement même, produit par les deux caufes précedentes,



la péſanteur terreſtre qui fait deſcendre tous les Corps vers le centre *C*, eſt changée. Cette péſanteur peut être conſidérée comme égale dans les Canaux *GC* & *BC*, ou *DC* à des Diſtances égales du centre *C*, tant que la Terre eſt ſuppoſée Sphérique ; mais cette Sphéricité ôtée, il eſt naturel que cette égalité ne pourra plus ſubſiſter. Il eſt auſſi vraiſemblable que la péſanteur eſt diminuée dans les Canaux *CB* & *CD*, & qu'ainſi l'Axe doit encore être prolongé. Pour calculer cet allongement, nous aurons recours au Syſtême de M. Newton, qui ſuppoſe la péſanteur produite par l'Attraction commune de la matiere en raiſon quarrée reciproque des Diſtances. Ce n'eſt pas que je croye cette hypotheſe bien démontrée ; car la concluſion de la Gravitation mutuelle des Corps du Syſtême du Monde en raiſon quarrée reciproque des Diſtances, qu'on ne ſçauroit plus nier, à une ſemblable attraction univerſelle de la matiere, de laquelle M. Newton déduit la péſanteur ; cette conſéquence, dis-je, demande beaucoup d'indulgence. Mais je l'adopterai pour ce ſujet, parce que tous les autres Syſtêmes ſur la péſanteur me feroient inutiles : c'eſt le ſeul, qui étant du reſſort de la Géometrie, donne des meſures aſſurées & fixes ; & il eſt d'ailleurs digne de l'attention de tous les Géometres & Phyſiciens.

VII.

Les trois cauſes que je viens d'expoſer, comme pouvant & devant allonger la Terre autour de la Ligne qui paſſeroit par le centre du Soleil & de la Lune, ſont d'une force aſſez égale ; de ſorte qu'il faudra tenir compte de toutes, quoique chacune ſoit ſi petite, qu'elle ne ſçauroit allonger la Terre au delà d'un petit nombre de pieds, & peut-être moins d'un pied. Il ſera bon de remarquer ici que ce qui, après le Calcul, exprime leſdits allongemens, eſt toujours un certain multiple, ou ſous-multiple de $\frac{bg}{aG} \times b$, entendant par b le rayon de la Terre, par

a la diſtance du luminaire en queſtion & par $\frac{g}{G}$ la raiſon qui eſt entre la péſanteur d'un Corps placé en *B* vers *A*, & ſa péſanteur vers *C*, laquelle raiſon eſt extrêmement petite.

J'ai jugé à propos d'alleguer ici cette Formule, que le Calcul m'a enſeigné, afin que ceux qui voudroient le faire après moi, ſçachent d'abord quels termes on peut rejetter, comme inutiles, qui rendent les Calculs extrêmement pénibles, & qui ſe trouvent au bout du Calcul, n'être d'aucune importance. Ce ſeroit une choſe ridicule, de vouloir faire ici attention à des parties d'une Ligne qui proviendroient, ſi ladite quantité $\frac{bg}{aG} \times b$ étoit encore multipliée par $\frac{b}{a}$, ou par $\frac{g}{G}$.

VIII.

Notre deſſein eſt d'abord de chercher & d'exprimer analytiquement les allongemens dont nous venons de parler. On peut les trouver par rapport aux deux premieres cauſes, indépendamment de la Figure de la Terre; mais par rapport à la troiſiéme cauſe expoſée au ſixiéme Article, il faut ſuppoſer la Terre, c'eſt-à-dire, le Méridien *BGDH* d'une Figure donnée; & c'eſt l'hypotheſe la plus naturelle, de la ſuppoſer elliptique, ayant pour Axes les Lignes *BD* & *GH*; quelle qu'elle ſoit, elle n'en ſçauroit être ſenſiblement différente, & ſi elle l'étoit, cela ne ſçauroit produire un changement bien conſidérable ſur le rapport des deux Axes *BD* & *GH*, que nous cherchons. Outre cela nous verrons que c'eſt ici un Problême, qui dépend encore de la loi des changemens dans les Denſités des couches de la Terre. M. Newton ſuppoſe la Terre par-tout homogene. Il ne l'a fait apparemment, que pour faciliter le Problême, qui eſt aſſez difficile dans toute autre hypotheſe. Mais cette ſuppoſition de M. Newton n'a aucune vraiſemblance; je dirai même, qu'elle ſeroit fort peu favorable à notre Syſtême, comme nous le verrons dans la ſuite. C'eſt pourquoi je n'ai pas voulu reſtreindre ſi fort la Solution du Problême en queſtion. J'ai cru que je payerois trop cher l'avantage d'applanir les difficultés du Problême, & les peines du Calcul. J'ai donc rendu notre Queſtion infiniment plus générale, pour en tirer tous les Corollaires, & pour choiſir ceux qui conviennent le plus à notre ſujet, & qui rendront par-là même plus vraiſemblables les hypotheſes, auxquelles ils appartiennent.

IX.

Voici à preſent nos hypotheſes. Nous conſidererons la Terre, comme

me naturellement ſphérique, & compoſée de couches concentriques: Nous ſuppoſerons ces couches homogenes, chacune dans toute ſon étendue; mais qu'elles ſont de différentes Denſités entre elles, & que la loi des variations de leur Denſité ſoit donnée. Quant à la Sphericité de la Terre, que nous ſuppoſerons, on voit bien qu'il ſeroit ridicule de s'y arrêter, puiſque l'élevation des eaux de l'Océean, cauſée par les deux Luminaires, ne ſçauroit différer ſenſiblement, que la Terre ſoit un peu applanie, ou un peu allongée. La ſuppoſition de l'Homogénéïté des couches concentriques, ne doit pas non plus nous faire de la peine, puiſqu'on ne ſçauroit donner aucune raiſon, pourquoi elles devroient être hétérogenes.

CHAPITRE II.

Contenant quelques Lemmes ſur l'Attraction des Corps.

I.

JE prie encore une fois le Lecteur, de ne conſidérer ce Chapitre, que comme hypothétique. Je ne ſuppoſe l'Attraction univerſelle de la matiere, que parce que c'eſt la ſeule hypotheſe, qui admette des Calculs, & qu'elle eſt d'ailleurs aſſez bien fondée, pour mériter l'attention de tous les Philoſophes du monde.

On appelle au reſte Attraction qu'exerce un Corps *A* ſur un Corps *B*, la force accéleratrice, que le Corps *B* acquiert à chaque inſtant, en tombant vers *A*. On voit donc que l'effet de l'Attraction du Corps *A* ſur le Corps *B*, eſt de communiquer à celui-ci une péſanteur, qu'on ſuppoſe proportionnelle à la maſſe du Corps *A* diviſée par le quarré de la Diſtance; & cette péſanteur doit encore être multipliée par la maſſe du Corps *B*, pour avoir la force que ce Corps exerce s'il eſt empêché de s'approcher du Corps *A*.

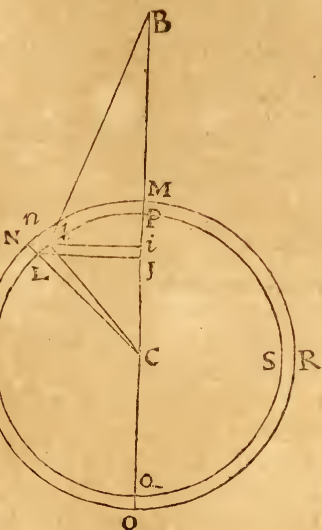
PROBLEME.

I I.

Soit une couche ſphérique homogene, infiniment mince, & d'une épaiſſeur égale, compriſe entre les ſurfaces ſphériques *MNOR* & *PQLS*, trouver l'Attraction, ou la force accéleratrice, que cette couche exercera ſur un Corps placé au point *B*, pris hors de la ſurface extérieure.

SOLU-

SOLUTION.



Qu'on tire la droite BO par le Point B & le Centre C, dans laquelle on prendra deux Points infiniment proches J & i: on tirera ennsuite les deux Perpendiculaires JL & il, & par les Points L & l, on tirera du centre les droites CN & Cn. Soit à présent $CB = a$; $CJ = x$; $Ji = dx$; $CP = b$; PM ou LN (que nous regardons comme infiniment petite) $= \beta$: la Densité de la matiere de la couche $= m$.

On voit que pendant la revolution autour de l'Axe MO, la petite partie $NLln$ garde toujours une même Distance du Point B, & que cette Distance sera $= \sqrt{(aa - 2ax + bb)}$: or, comme il faut toujours diviser par le Quarré des Distances, il faudra pour trouver la force accéleratrice en question d'abord prendre $\frac{1}{aa - 2ax + bb}$, & cette quantité doit être multipliée par la raison de Bi à Bl, & on aura $\frac{a-x}{(aa - 2ax + bb)^{\frac{3}{2}}}$: & cette quantité doit encore être multipliée par la Masse de l'Anneau, que la partie $NLnl$ forme par sa revolution, & la Masse doit être exprimée par la Densité m & la capacité de l'Anneau, c'est-à-dire (en nommant n la raison de la circonférence d'un Cercle à son rayon) par $m \times NL \times Ll \times n \times LJ$: ou par $m \times \beta \times \frac{b\,dx}{\sqrt{(bb - xx)}} \times n \times \sqrt{(bb - xx)}$ ou enfin par $nmb\beta dx$; de sorte qu'on a la force accéleratrice absoluë produite par ledit Anneau $= \frac{nmb\beta(a-x)\,dx}{(aa - 2ax + bb)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'Intégrale exprimera l'Attraction cherchée de toute la couche. Pour trouver cette Intégrale, nous supposerons $aa - 2ax + bb = yy$, & nous aurons $\int \frac{nmb\beta(a-x)\,dx}{(aa - 2ax + bb)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-nmb\beta(aa - bb + yy)\,dy}{2aayy}$ $= \frac{nmb\beta}{2aa} \times \left(\frac{aa - bb - yy}{y} + C\right) = \frac{nmb\beta}{2aa} \times \left(\frac{2ax - 2bb}{\sqrt{aa - 2ax + bb}} + C\right)$, entendant par C une Constante convenable: pour la trouver il faut remarquer, que l'Intégrale doit être $= 0$, lorsque $x = -b$, d'où l'on tire

$C = \frac{2ab + 2bb}{a + b} = 2b$: substituant cette valeur, on obtient pour l'Intégrale en question $\frac{nmb\varsigma}{aa}\left(\frac{ax - bb}{\sqrt{aa - 2ax + bb}} + b\right)$, & mettant enfin b à la place de x, on obtient la force accéleratrice cherchée $= \frac{2nmbb\varsigma}{aa}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

III.

Comme la quantité de la matiere de toute la couche (pour laquelle nous venons de déterminer la force accéleratrice, qu'elle exerce sur le Corps placé au point B) est $= 2nmbb\varsigma$, nous voyons que cette force accéleratrice est exprimée par la quantité de matiere divisée par le quarré de la Distance du Point B au Centre C, & par conséquent la même, que si cette quantité de matiere étoit concentrée au Centre.

SCHOLIE.

IV.

On remarquera que cette Solution n'a lieu, que lorsque le Point B est placé hors de la couche, parce que dans notre Calcul nous avons supposé, que chaque Anneau formé par la revolution de la partie $NLln$ produit une force accéleratrice du même côté, ce qui n'a plus lieu, lorsque le Point B est placé entre les deux surfaces, ou au-dedans de la surface intérieure. Je ne dirai rien de ces deux cas, dont chacun demande une Solution particuliere, parce que nous n'en aurons pas besoin, & qu'ils ont déja été resolus par l'Auteur de ces Problêmes. Je n'aurois même rien dit du cas que nous venons de résoudre, comme pareillement résolu par M. Newton, si je n'avois pas crû, qu'il étoit convenable de suivre toutes les traces qui nous menent à l'intelligence de notre Question principale : aussi ces précautions sont-elles nécessaires, pour pouvoir toujours exprimer d'une même façon les Quantités constantes; & ainsi nous nous souviendrons toûjours dans

dans la ſuite d'exprimer la force accéleratrice d'un Corps infiniment petit, par la Maſſe diviſée par le quarré de la Diſtance, & de dénoter la Maſſe par le produit de ſon étenduë, & de ſa Denſité.

PROBLEME.

V.

Trouver l'Attraction pour un Corps placé en B, cauſée par une Sphere ſolide, compoſée de couches homogenes; mais de différentes Denſités entre elles.

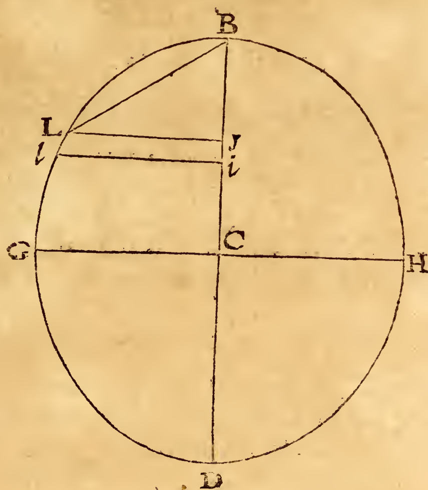
SOLUTION.

Il paroît par le troiſiéme Article, qu'on n'a qu'à concevoir la Maſſe de toute la Sphere ramaſſée au Centre C, & qu'elle cauſera la même Attraction, tant que le Point B eſt hors de la Sphere: nommant donc M la Maſſe du Globe, ou la ſomme des Maſſes de toutes les couches, l'Attraction cherchée ſera $= \frac{M}{aa}$. C. Q. F. T.

PROBLEME.

VI.

Soit $BGDH$ une Ellipſe preſque circulaire, c'eſt-à-dire, dont la différence des Axes BD & GH ſoit regardée comme infiniment petite; & qu'on conçoive cette Ellipſe former par ſa rotation autour de l'Axe BD, un Sphéroïde homogene. On demande la force accéleratrice, ou l'attraction que ce Sphéroïde produira ſur un Corps placé au Pole B.



SOLUTION.

Soit la Denſité de la matiere exprimée par μ; le petit demi Axe $GC = b$; le grand demi Axe $BC = b + \beta$; $BJ = x$; $Ji = dx$; on aura la perpendiculaire $LJ = \frac{b+\beta}{b} \times \sqrt{2(b+\beta)x - xx}$. On voit facilement

ment * que l'Attraction causée par la couche, qui répond au Rectangle $LJil$, est $= n\mu dx - n\mu dx \times \frac{BJ}{BL}$, c'est-à-dire, par $n\mu dx - n\mu dx : \sqrt{xx + \frac{bb}{(b+\beta)^2} \times (2bx + 2\beta x - xx)}$ ou par $n\mu dx - (b+\beta)\, n\mu x dx : \sqrt{(2b\beta xx + \beta\beta xx + 2b^3 x + 2bb\beta x)}$: Dans cette derniere quantité, nous rejettons le Terme $\beta\beta xx$, comme devant être comparé aux infiniment petits du second ordre, & nous changerons le Signe radical du Dénominateur en Signe exponentiel de Numerateur ; & de cette maniere nous aurons $n\mu dx - (b+\beta)\, n\mu x dx \times (2b^3 x + 2b\beta xx + 2bb\beta x)^{-\frac{1}{2}}$: or on sçait par la formation des suites de M. Newton, que $(2b^3 x + 2b\beta xx + 2bb\beta x)^{-\frac{1}{2}}$ est $= (2b^3 x)^{-\frac{1}{2}} - (2b^3 x)^{-\frac{3}{2}} \times (b\beta xx + bb\beta x)$: substituant donc cette valeur, on obtient $n\mu dx - \frac{(b+\beta)\, n\mu x dx}{\sqrt{2b^3 x}} + \frac{(b+\beta)\, n\mu x dx\, (b\beta xx + bb\beta x)}{2b^3 x \sqrt{2b^3 x}}$, qui marque l'action de la couche formée par la rotation du Rectangle $LJil$: à la place de cette quantité, on peut encore, en multipliant les quantités à multiplier, & rejettant les termes affectés de la seconde Dimension de β, poser $n\mu dx - \frac{n\mu dx \sqrt{x}}{\sqrt{2b}} - \frac{\beta n\mu dx \sqrt{x}}{2b\sqrt{b}} + \frac{\beta n\mu x dx \sqrt{x}}{2bb\sqrt{b}}$, & l'Intégrale de cette quantité (qui doit être $= 0$, lorsque $x = 0$) est $= n\mu x - \frac{2n\mu x\sqrt{x}}{3\sqrt{2b}} - \frac{\beta n\mu x\sqrt{x}}{3b\sqrt{2b}} + \frac{\beta n\mu xx\sqrt{x}}{5bb\sqrt{2b}}$; & faisant enfin $x = 2b + 2\beta$, on trouve, en rejettant toujours les infiniment petits du second ordre $2n\mu b + 3n\mu\beta - 2n\mu b - 2n\mu\beta - \frac{2}{3}n\mu\beta + \frac{4}{5}n\mu\beta$, ou bien enfin

$$\frac{2}{3}n\mu b + \frac{2}{15}n\mu\beta,$$

qui marque la force accéleratrice causée par l'action de tout l'Ellipsoïde sur un petit Corps placé au Pole B. C. Q. F. T.

PROBLEME.

VII.

Les hypotheses étant les mêmes, que dans la proposition précedente, trouver la même chose pour un petit Corps placé en G, qui est sous l'Equateur de l'Ellipsoïde.

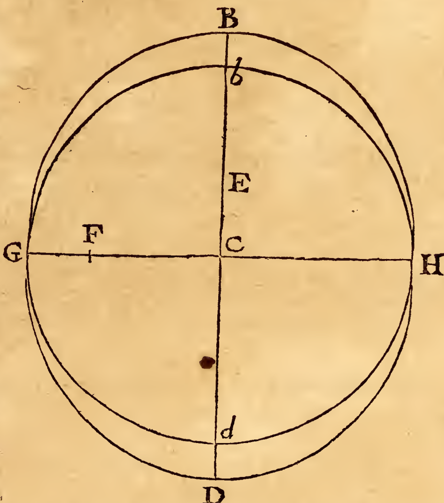
SOLUTION.

Il est facile de démontrer par la Géometrie, que toute Section de l'Ellipsoïde parallele à l'Axe de Rotation BD, fait une Ellipse sembla-

* Ceci se trouve demontré par le Cor. 1. de la Prop. XC. du 1er. Livre de Mr. Newton ; on y voit que l'Attraction du point B par le Cercle dont LJ est le Rayon, est $1 - \frac{BJ}{BL}$ qu'il faut multiplier par la Masse du petit Cylindre dont ce Cercle est la Base & dont Ji est la hauteur pour avoir l'Attraction causée par la Couche qui répond au Rectangle $LJil$.

ble à l'Ellipse génératrice $BGDH$. Considérons l'Ellipsoïde comme composée de la Sphere inscrite, ayant pour Diametre le petit Axe GH, & de l'écorce formant un double Menisque: l'action de la Sphere doit être exprimée par $\frac{2}{3} n \mu b$, comme nous avons démontré au 5. §. Car la masse de cette Sphere est $\frac{2}{3} n \mu b^3$, & la distance du Point G au centre est $= b$. Il nous reste donc à chercher quelle action resulte du double Menisque.

Concevons pour cet effet tout l'Ellipsoïde partagé en couches paralleles & perpendiculaires à GH. Soit la distance du centre d'une de ces couches au Point $G = x$; son épaisseur $= dx$; il n'est pas difficile de voir * que la capacité du bord de cette couche (qui fait partie du double Menisque en question) est $= \frac{n\beta}{2b} \times (2bx - xx)\, dx$, & que ce bord étant multiplié par la Densité μ, en donne la quantité de matiere $= \frac{n\mu\beta}{2b} \times (2bx - xx)\, dx$. Or toutes les parties de ce bord infiniment mince, peuvent être censées agir également, & avec une même obliquité sur le Corps placé au point G: on n'a donc qu'à multiplier cette quantité de matiere par la raison de la distance du centre de la couche au Point G à la distance du bord de la couche au même Point G, & diviser par le quarré de cette Distance, pour avoir l'attraction du bord de la couche, qui sera donc $\frac{n\mu\beta}{2b} \times (2bx - xx)\, dx \times \frac{x}{\sqrt{2bx}} \times \frac{1}{2bx}$, ou bien $\frac{n\mu\beta dx}{4bb\sqrt{2b}} \times (2b\sqrt{x} - x\sqrt{x})$ dont l'Intégrale est $= \frac{n\mu\beta}{4bb\sqrt{2bb}} \times (\frac{4}{3} bx\sqrt{x} - \frac{2}{5} xx\sqrt{x})$ puisqu'il ne faut point ajoûter ici de constante; & pour avoir enfin l'Attraction de tout le double Menisque, il faut mettre $x = 2b$, après quoi on aura simplement $\frac{4}{15} n\mu\beta$. Si on ajoûte



* Car l'aire de l'Ellipse éloignée de G de la quantité x est $\frac{n}{2b} \times b + \beta(2bx - xx)$ & l'aire du Cercle inscrit est $\frac{n}{2}(2bx - xx)$. Donc otant cette aire du Cercle de celle de l'Ellipse reste $\frac{n\beta}{2b}(2bx - xx)$ pour l'aire de Menisque.

à cette quantité l'action de la Sphere inscrite, on aura l'attraction cherchée de tout l'Ellipsoïde sur un Corps placé au Point $G = \frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \beta$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE. VIII.

On voit par ces deux dernieres Propositions, que les forces accéleratrices au Pole, & sous l'Equateur dans un Ellipsoïde homogene, sont comme $\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \beta$ à $\frac{2}{3} n \mu \beta + \frac{4}{15} n \mu \beta$, ou comme $5b + \beta$ à $5b + 2\beta$, laquelle raison peut passer pour celle de 1 à $1 + \frac{\beta}{5b}$. Je vois que cela est conforme à ce que M. Newton dit à la page 380. * des *Princip. Math. Phil. Nat. Edit.* 2. pour déterminer la Proportion de l'Axe de la Terre au rayon de son Equateur. Quant à son raisonnement, il n'y a peut-être que lui, qui pût y voir clair; car ce grand Homme voyoit à travers d'un voile, ce qu'un autre ne distingue qu'à peine avec un Microscope.

LEMME.

Dans un Sphéroïde elliptique homogene, la force accéleratrice pour un Point quelconque, est à la force accéleratrice pour un autre Point pris dans le même Diametre, comme la distance du premier Point au centre, à la distance pareille du second Point.

† M. Newton a démontré cette Proposition à la 199. page de son Livre, que nous venons de citer: & comme il ne s'agit ici que de la proportion entre les deux forces accéleratrices, sans qu'il soit question de les exprimer analytiquement, il seroit superflu, pour mon dessein, de la démontrer à ma façon.

PROBLEME. X.

Soit encore le double Menisque, tel que nous l'avons décrit au septieme Article, compris entre la surface de l'Ellipsoïde *GBDH*, & *GbHd*, qui marque la surface de la Sphere inscrite; il s'agit de trouver la force accéleratrice, que ce double Menisque produira au point *E*, pris dans l'Axe de rotation *BD*.

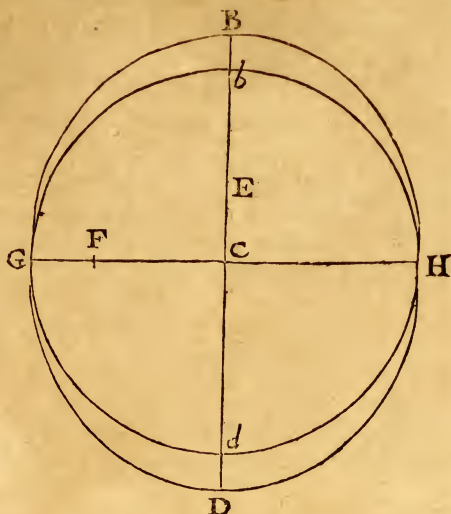
SOLUTION.

Nous garderons les dénominations de ci-dessus: or on voit qu'on trouvera l'action du double Menisque, en prenant celle de tout l'Ellipsoïde consideré comme homogene avec les Menisques, & en retranchant celle de la Sphere inscrite. L'action de tout le Sphéroïde est en vertu

* Ceci se raporte à la page 80. & suiv. de ce Volume, & nous avons essayé d'éclaircir cet endroit de M. Newton dans la Notte (r) & suivantes.

† C'est le Cor. 3. de la Prop. XCI. du Livre 1er. vol. 1er. pag. 519.

des 6 & 9 Articles $= (\frac{2}{5} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \beta) \times \frac{CE}{CB}$, & celle de la Sphere $= \frac{2}{5} n \mu b \times \frac{CE}{Cb}$: de là on tire la force accéleratrice, qui convient aux Menifques $= \frac{2}{5} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \beta) \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{5} n \mu b \times \frac{CE}{Cb}$. Subftituons à la place de $\frac{CE}{Cb}$ cette quantité $\frac{CE}{CB - Bb}$, qui peut être cenfée égale à $\frac{CE}{CB} + \frac{Bb \times CE}{CB^2}$ (à caufe que nous traitons la petite Bb, comme infiniment petite, par rapport à CB) & nous trouverons la force accéleratrice pour les Ménifques



$$= \frac{2}{15} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{5} n \mu b \times \frac{Bb \times CE}{CB^2} = \frac{2}{15} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{5} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB}$$

(puifque $\frac{Bb}{CB} = \frac{\beta}{b + \beta} = \frac{\beta}{b}$) $= - \frac{8}{15} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

X I.

Le Signe négatif fait voir, que la Gravitation au Point E, caufée par l'action des deux Ménifques, fe fait vers le Pole B, & non vers le Centre C. Au refte on remarquera, que cette Propofition n'eft vraie que pour les Points compris entre C & b, en excluant tous les Points, qui font au-delà de b; & cela à caufe que le Lemme du 9. §. ne fçauroit être appliqué à trouver la force accéleratrice caufée par l'action de la Sphere pour le Point E, fi ce Point eft pris hors de la Sphere infcrite au Sphéroïde. Ainfi par exemple, au point B, la Gravitation caufée par les Ménifques, fe feroit vers le Centre avec une force accéleratrice $\frac{22}{15} n \mu \beta$. Je reftreins ces Propofitions, quoique ma Méthode fuffife pour des folutions beaucoup plus générales; & cela pour ne me point engager dans des longueurs qui nous meneroient au-delà de notre fujet.

PROBLEME.

X I I.

Trouver la même chofe que dans l'Art. X. pour un Point quelconque F, pris dans une Ligne GH perpendiculaire à BD.

SOLUTION.

On obtient encore l'action des Ménisques, en retranchant celle de la Sphere de celle du Sphéroïde. Or celle de la Sphere est $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CF}{CG}$, & celle du Sphéroïde $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \beta) \times \frac{CF}{CG}$, en vertu des § § 7. & 9. Donc la Gravitation au Point F se fait vers le centre C par la simple action du double Ménisque, & la force accéleratrice y sera $= \frac{4}{15} n \mu \beta \times \frac{CF}{CG}$. C. Q. F. T.

XIII.

Voilà les Propositions qui nous seront nécessaires, pour mésurer les haussemens & baissemens des eaux dans la Mer libre par l'action de l'un des deux Luminaires, entant que ces variations répondent à la relation qui se trouve entre la pésanteur & la figure de la Terre. Ceux qui voudront employer l'analyse pure pour la Solution de nos deux derniers Problêmes, se plongeront dans des Calculs extrêmement pénibles, & verront par là l'avantage de notre Méthode.

CHAPITRE III.

Contenant quelques Considérations Astronomiques & Physiques, préliminaires pour la Détermination du Flux & Reflux de la Mer.

COmme le Flux & Reflux de la Mer dépendent de la Lune & du Soleil, on voit bien que notre sujet demande une exacte Théorie du mouvement de ces deux Luminaires. Quant au mouvement apparent du Soleil, on le connoit avec toute l'exactitude requise ici. Mais on est encore bien éloigné de sçavoir avec la même précision la Théorie de la Lune, qui est cependant d'une plus grande importance. Une idée qui m'est venuë là-dessus, d'employer le principe de la conservation de ce que l'on appelle communément *Forces vives* (principe déja employé sous un autre nom par le grand & incomparable M. Huguens, pour trouver les Loix du choc des Corps parfaitement élastiques, & auquel on est redevable d'une grande partie des connoissances nouvelles dans la Dynamique, tant des Fluides, que des Solides:) Cette idée, dis-je, m'a conduit par un chemin fort abregé, à déterminer beaucoup plus

plus exactement, que l'on n'a fait jufqu'ici, les mouvemens de la Lune, que l'on appelle communément irréguliers, mais qui font tous fujets aux loix Méchaniques. Je m'étois propofé d'inferer ici ma nouvelle Théorie fur la Lune; mais, comme notre fujet n'eft déja que trop étendu, & qu'il demande des difcuffions affez pénibles, je la différerai à une autre occafion, où je la donnerai en forme d'Addition, fi l'Académie trouve ce Traité digne de fon attention. Je ne ferai donc ici qu'indiquer en gros les connoiffances tirées du Syftême du Monde, qui fervent à donner un Syftême général du Flux & Reflux de la Mer; & quand nous viendrons au détail, nous fuppoferons les mouvemens de la Lune parfaitement connus.

I I.

On fçait que la Lune & la Terre font un Syftême à part: l'un & l'autre de ces Corps tournent autour d'un Point, & font leur revolution dans un même tems, décrivant chacun une Ellipfe: l'action du Soleil fur l'un & l'autre Corps, change un peu ces Ellipfes, & fait même que la proportion des diftances dudit Point aux Centres de la Lune & de la Terre, ne demeure pas exactement la même: mais, comme nous ne prétendons jufqu'ici que d'expofer en gros les chofes néceffaires à notre Queftion, nous ne ferons point d'attention à ces inégalités, & confidérerons la Terre & la Lune, comme faifant des Ellipfes parfaites & femblables entre elles autour d'un même Point.

I I I.

Par ladite Revolution, les deux Corps tâchent à s'éloigner l'un de l'autre; & cet effort eft contrebalancé par leur Gravitation mutuelle: & comme la Terre fait autant d'effort pour s'approcher de la Lune, que celle-ci en fait pour s'approcher de la Terre, il faut que les forces centrifuges foient auffi égales: d'où il fuit que le Point autour duquel ces deux Corps tournent, doit être placé, en forte que les forces centrifuges foient égales: c'eft là la premiere idée. Il vaudroit donc mieux appeller ce Point, *Centre de Forces centrifuges*, ou bien, puifque les viteffes gardent dans notre hypothefe une proportion conftante, *Centre de Maffes*, que *Centre de Gravité*. Il eft vrai que ces mots reviennent au même, à prendre celui du Centre de Gravité dans le fens commun: Mais quelle idée y peut-on attacher, lorfque la péfanteur eft inégale dans les différentes parties du Corps? Il n'y a aucun Point alors, qu'on puiffe nommer tel, quelque définition qu'on donne à ce mot. Quoi qu'il en foit, il eft certain que les diftances du Point en queftion aux Centres de la

Terre & de la Lune, sont en raison reciproque des Masses ou Quantités de matiere de ces Corps.

I V.

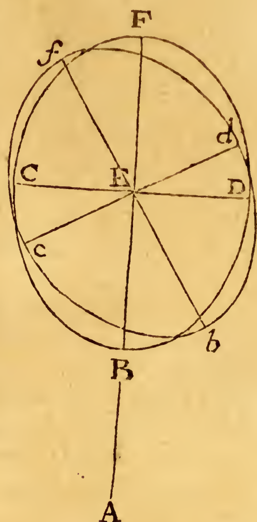
Si la Lune & la Terre étoient des Corps parfaitement homogenes dans toute leur étenduë, ou du moins chacun composé de Couches concentriques parfaitement homogenes, & qu'ils fussent parfaitement sphériques, sans avoir aucun mouvement, imprimé originairement, ou produit par une Cause Physique, autour d'un Axe passant par leur propre Centre de Gravité, il est clair, que toutes les parties des Corps garderoient pendant leur Revolution un Parallélisme; de sorte que les deux Corps vûs du Centre de Gravité commun, paroîtroient faire précisément le tour en sens contraire autour d'un Axe perpendiculaire au plan des Orbites, pendant chaque Revolution des Corps. Cependant cela ne se fait point dans la Lune: car nous sçavons qu'elle nous montre constamment une même face (je ne fais pas encore attention à quelques legers changemens;) & cela est contraire au Parallélisme, que nous venons d'alléguer: quoique ce ne soit pas ici proprement l'endroit pour expliquer ce Phénomene de la Lune, je ne laisserai pas de le faire, pour nous préparer à ce que nous aurons à dire sur la Terre, comme essentiel à notre matiere.

V.

Considérons donc, que la parfaite Homogénéïté dans les Couches concentriques de la Lune, aussi bien que sa parfaite Sphéricité, sont moralement impossibles: mais il n'est pas encore expliqué, comment on peut déduire de là, pourquoi la Lune nous montre toujours une même face. Il ne suffit pas de dire que le Centre de Gravité de la Lune pris dans le sens commun, tâche toûjours à s'éloigner, le plus qu'*il est* possible, du Centre de Revolution. Quelques inégales que fussent les Couches, & quelque irréguliere que fut la Figure, la Lune garderoit toujours le Parallélisme des Faces, s'il n'y avoit pas une autre raison; sçavoir, celle de l'inégalité de pésanteur de ses Parties vers la Terre: les parties ayant d'autant plus de pésanteur, qu'elles sont plus près de la Terre: c'est cette raison, qu'il faut joindre à l'une des deux autres, ou à toutes les deux ensemble; de sorte que quand même la Lune seroit parfaitement homogene, sa seule Figure, jointe à l'inégalité de pésanteur de ses parties vers le Centre de la Terre, pourroit même produire le Phénomene en question.

Soit *A* le Centre de la Terre: *BCFD*, par exemple, une Ellipse, dont l'Axe *BF* soit le plus grand, & *CD* le plus petit: que cette Ellipse forme par sa Revolution autour de l'Axe *BF*, le Corps de la Lune.

ne. Suppoſons après cela la Lune homogene & mobile autour de ſon Centre E, & ſervons-nous de l'hypotheſe ordinaire, que la péſanteur de chaque partie de la Lune vers A, ſoit en raiſon quarrée reciproque des diſtances au Point A. Cela étant, je dis, que la Lune montrera conſtamment au Point A la Face CBD, & que l'Axe FB paſſera toujours par le Point A, & que la Lune reprendroit cette ſituation, dès qu'elle en ſeroit détournée. Comme cette matiere eſt aſſez intéreſſante, tant pour l'Aſtronomie, que pour la Phyſique, je l'expliquerai par un exemple, qui rendra fort ſenſible, tout ce que nous venons de dire. Je dis donc qu'on doit regarder, à cet égard, la Lune, comme un Corps flottant dans un Fluide; car les parties d'un tel Corps, ſont pareillement animées de différentes péſanteurs: or on ſçait qu'un Corps flottant, qui n'eſt pas Sphérique, ou qui étant tel, n'eſt pas homogene, n'eſt pas indifférent à chaque ſituation; mais qu'il affecte conſtamment de certaines ſituations, qu'il reprend auſſi-tôt qu'il en a été détourné. Quelquefois le Corps n'a qu'une ſeule ſituation d'Equilibre; d'autres fois pluſieurs, ſuivant la ſtructure du Corps: Mais on ſe tromperoit toujours, ſi l'on croyoit, que le Centre de Gravité du Corps tâche à ſe mettre dans l'endroit le plus bas qu'il eſt poſſible; de même qu'on ſe trompe, en diſant, que le Centre de Gravité de la Lune, tâche à s'éloigner, le plus qu'il eſt poſſible, du Centre de la Terre. On voit donc aſſez, que la cauſe principale de ce que la Lune nous préſente toujours une même face, eſt l'inégalité de péſanteur; & à cette cauſe, il faudra joindre, ou la non-parfaite Sphéricité, ou la non-parfaite Homogénéïté des Couches de la Lune, ou les deux cauſes à la fois.

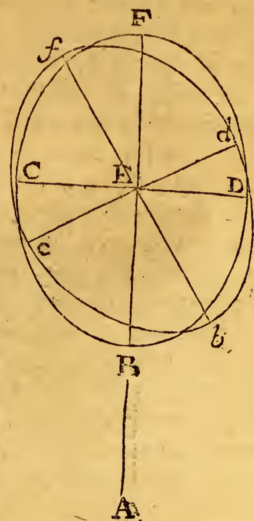


V I.

Comme la Queſtion que nous venons d'expliquer, entraîne celle d'une legere nutation de la Lune en Longitude, que les Aſtronomes ont obſervée, il ne ſera pas hors de propos de faire voir comment cette nutation découle de notre Théorie. Nous avons vû que le Sphéroïde $CBDF$ mobile autour d'un Point E, doit toujours montrer au Point A la Face CBD tant que le Point E reſte dans ſa place. Suppoſons à préſent, que ce Corps s'éloigne un peu de cette ſituation, en faiſant une rotation infiniment petite autour du Point E, la force qui tend à la remettre dans ſa ſituation naturelle, eſt de même infiniment petite; ce qui fait voir,

 que

que le Point E faisant sa revolution autour du Point A, ce ne sçauroit plus être exactement la Face CBD, qui regarde vers A, parce qu'à chaque petit mouvement du Point E, la Lune fait une petite rotation autour de ce Point, pour garder le Parallélisme, & la force qui tâche à tourner vers le Point A la Face CBD, étant encore infiniment petite, ne sçauroit s'en acquitter assez-tôt : & ce sera la même chose pendant que le Point E parcourt un second Elément, & ainsi de suite, jusqu'à-ce qu'à la fin la Lune se place assez obliquement, pour que la force, qui tâche à mettre la Lune dans sa situation naturelle, soit assez grande, pour réparer, à chaque moment, une nouvelle petite inclinaison, qui survient par la rotation du Point E autour du Point A. [Cette explication pourra nous servir dans la suite, pour démontrer un des principaux Phénomenes des Marées.] La Lune prendra donc la situation oblique $cbdf$, si sa Revolution autour du Point A est supposée se faire de E vers D. Mais cette situation oblique demeureroit encore la même à l'égard de la Ligne FA, sans que la Lune eût aucune nutation, si le Point E faisoit sa Revolution autour du Point A dans un Cercle parfait, & avec une vitesse constante : c'est donc l'inégalité des distances AE, & des vitesses du Point E, qui fait que l'obliquité de la situation $fcbd$ varie ; & c'est cette variation qui fait la nutation de la Lune en Longitude.



VII.

Venons maintenant à la Terre, & examinons quel mouvement elle doit avoir autour du Centre de Gravité, qui est entre elle & la Lune : cette recherche est nécessaire pour notre Question, & elle ne sera plus difficile, après ce que nous avons dit de la Lune dans cette vûë. Nous remarquerons donc, que si la Terre est parfaitement homogene, soit dans toute son étendue, soit seulement dans chacune de ses Couches concentriques ; & si elle est en même tems parfaitement sphérique, elle doit conserver parfaitement un Parallélisme dans la situation de ses parties, pendant sa Révolution. Cependant cette parfaite Homogénéïté, est moralement impossible ; & la parfaite Sphéricité a été refutée par les Observations les plus exactes. Ce Parallélisme seroit donc alteré, de même qu'il l'est dans la Lune, & la Terre ne manqueroit pas de presenter

ſenter à la Lune une même face, ſans le mouvement journalier de la Terre. Ce mouvement empêche l'action de la Lune; & l'effet de cette action étant, à cauſe dudit mouvement journalier, tantôt d'un côté de la Terre, tantôt de l'autre, il ne pourroit plus produire qu'une legere nutation journaliere dans l'Axe de la Terre, & quelque petite inégalité dans le mouvement journalier de la Terre. Mais l'une & l'autre doivent être tout-à-fait inſenſibles, à cauſe de la grandeur de la Maſſe de la Terre, de l'extrême petiteſſe de l'action de la Lune, & de la rapidité du mouvement journalier.

VIII.

On voit donc que la Terre fera ſa revolution autour du Centre de Gravité, qui lui eſt commun avec la Lune, de telle maniere que ſon Axe gardera conſtamment une ſituation parallele. Si nous conſidérons donc le mouvement journalier de la Terre à part, il eſt clair que l'autre mouvement doit être ſuppoſé ſe faire d'une maniere à garder un Parallélisme dans toutes les Sections de la Terre. Cela étant, il s'enſuit que chaque point de la Terre fait, à l'égard de cet autre mouvement, une même Ellipſe; que chaque partie a une même force centrifuge, & que les Directions des forces centrifuges ſont par-tout paralleles entre elles. Et c'eſt ici le point principal, que je me ſuis propoſé d'établir, & de bien démontrer dans ce Chapitre.

IX.

Ce que nous venons de démontrer du mouvement de la Terre à l'égard de la Lune, doit auſſi s'entendre à l'égard du Soleil; en ſorte que la force centrifuge des parties de la Terre, par rapport à ſon Orbite annuelle, doit être cenſée la même, & leurs directions paralleles entre elles. Mais cette Propoſition n'eſt pas ſi eſſentielle à l'égard de l'Orbite annuelle, comme à l'égard de l'Orbite, qui ſe fait autour du Centre de Gravité, qui eſt commun à la Terre & à la Lune, à cauſe de l'extrême petiteſſe de cette derniere Orbite.

CHAPITRE IV.

Qui expoſe en gros la Cauſe des Marées.

I.

APrès avoir expliqué au premier Chapitre trois différentes raiſons, qui peuvent allonger la Terre autour des deux Axes, qui paſſent par les Centres des deux Luminaires, il n'eſt pas difficile de voir comment on doit déduire de ces allongemens le Flux & Reflux de la Mer, pourvû qu'on ait égard en même tems au mouvement journalier de la Terre. Il eſt clair que ce mouvement journalier doit faire continuellement changer de place les deux Axes d'Allongement. Mais il faut remarquer ici par avance, que l'action compoſée des deux Luminaires, peut toujours être conſiderée comme une action ſimple, quoi-qu'à la vérité fort irréguliere. Cependant cette conſidération ſuffit, pour voir en gros, que la Mer doit en chaque endroit s'élever & ſe baiſſer environ deux fois dans un jour. Mais il s'agit de mettre cette cauſe en tout ſon jour, d'en développer tous les effets, & de les réduire à leur juſte meſure, autant que les circonſtances peuvent le permettre.

I I.

La Queſtion qui ſe préſente d'abord, & qui eſt en même tems la plus importante pour notre ſujet, eſt de trouver la quantité de l'allongement cauſé par chacun des deux Luminaires. Nous ne conſidérerons donc qu'un ſeul Luminaire. Voici, avant toutes choſes, les ſuppoſitions dont je me ſervirai dans les Calculs, & que j'ai déja expoſées en partie.

I. Nous ſuppoſerons que la Terre eſt naturellement ſphérique. Cette hypotheſe n'eſt que pour abréger le Calcul, & on voit bien que l'effet des deux Luminaires doit être ſenſiblement le même ſur une Terre ronde, ou un peu applatie, ou un peu allongée.

I I.. Que les Couches concentriques de la Terre ſont d'une même matiere, ou d'une même denſité. Cette ſuppoſition eſt ſans doute fort naturelle ; car les inégalités ne peuvent qu'être tout-à-fait inſenſibles: mais il me ſemble qu'il n'y a aucune vraiſemblance de ſuppoſer que la Terre eſt homogene dans toute ſon étendue, comme M. Newton l'a fait.

I I I. Que la Terre, que nous ſuppoſons ſans, l'action des Luminaires, ronde, eſt changée par l'action de l'un des deux Luminaires en Ellipſoïde, dont l'Axe paſſe par le Centre du Luminaire agiſſant. C'eſt l'hy-

l'hypothefe de M. Newton; & quoi qu'on ne puiffe pas le démontrer pour le Syftême des Attractions, elle ne doit pas nous arrêter: car quelle que foit la Figure de la Terre après ce petit changement, on voit affez qu'elle ne fçauroit s'éloigner fenfiblement de l'Ellipfoïde. Auffi trouvons-nous cette Figure elliptique dans toutes les hypothefes, qu'on pourroit fe former fur la péfanteur, fufceptibles d'un Calcul & tant foit peu naturelles. D'ailleurs un petit changement dans cette Figure extérieure de la Terre, n'en fçauroit produire, qui foit fenfible, entre l'Axe du Sphéroïde, & le Diametre qui lui eft perpendiculaire.

IV. Nous fuppoferons, que les Luminaires ne fçauroient faire changer de figure toutes les Couches qui compofent la Terre jufqu'au Centre. Car vraifemblablement la Terre eft, dans fa plus grande partie, folide; & quand même elle feroit toute fluide, fa Maffe feroit trop grande, pour être mife toute entiere en mouvement, & pour obéïr affez vîte à une action auffi petite. Ces refléxions m'ont engagé à confidérer la Terre, comme un noyau fphérique, compofé de Couches parfaitement fphériques & inaltérables par l'action des deux Luminaires, & inondé d'un Fluide homogene, tel que font les eaux de la Mer; & à fuppofer, qu'il n'y a que ce Fluide inondant, qui reçoive des impreffions des Luminaires, & que fa profondeur n'eft pas fenfible par rapport au rayon de la Terre. Cette hypothefe eft fans contredit la plus naturelle, lorfque la Terre n'eft pas fuppofée homogene dans toute fon étenduë, mais, fi on la fuppofoit homogene, comme M. Newton l'a fait, contre toutes les apparences de vérité, notre hypothefe n'entre plus en ligne de compte.

V. Enfin nous fubftituerons à la place des Forces centrifuges, qui empêchent la Terre de tomber vers les Luminaires, un autre force qui agiffe de la même façon, afin que nous puiffions confidérer d'abord la Terre, comme dans un parfait repos, & un entier équilibre dans toutes fes parties. Cette force à fubftituer, doit être fuppofée égale dans toutes les parties de la Terre (§. *VIII. Chap. III.*) & parallele à la Ligne qui paffe par les Centres de la Terre & du Luminaire, dont il fera queftion.

III.

La Force centrifuge dont nous venons de parler, doit être prife pour notre fujet, précifément telle, qu'elle foit égale à la force totale de l'Attraction du Luminaire, tout comme fi la Terre fe foutenoit dans fa diftance, en décrivant un Cercle parfait; & cela eft vrai, quelle que foit la Force centrifuge réelle de la Terre. C'eft ici une Propofition, dont on ne fent la vérité, qu'après quelque réflexion; & elle eft fondée fur ce que la différence entre la Force centrifuge, telle que nous venons de

la

la décrire, & la force centrifuge réelle, n'eſt employée qu'à pouſſer ou repouſſer la Terre, & ne ſçauroit lui faire changer ſa figure, puiſque nous avons démontré au VIII. Art. du précedent Chapitre, que chaque partie eſt pouſſée également & parallelement.

I V.

La Force centrifuge totale devant être parfaitement égale à la Gravitation totale de la Terre vers le Luminaire, & la premiere Force étant la même dans toutes les Parties, on voit bien qu'on pourroit ſuppoſer la Force centrifuge égale à la Gravitation vers le Luminaire, telle qu'elle eſt au Centre de la Terre. Car la Gravitation qui répond au Centre, peut être cenſée la moyenne entre toutes les Gravitations du Globe; & cela, quelque relation qu'on ſuppoſe entre les Diſtances & les Gravitations, puiſque la différence des diſtances eſt inſenſible, par rapport à la Diſtance totale; & que par conſéquent la Gravitation diminue comme également pour des égales augmentations de Diſtances, & qu'il ſe fera ainſi une juſte compenſation pour l'Hemiſphere tourné au Luminaire, & pour l'Hemiſphere oppoſé. Cette Propoſition n'eſt pourtant pas géometriquement vraie; mais la fin du Calcul m'a fait voir, qu'elle peut être cenſée vraie pour notre ſujet: & comme elle abrége fort le Calcul, je l'ai miſe ici, pour en faire uſage dans la ſuite.

PROBLEME.

V.

Soit *A* le Centre du Soleil, *BGDH* la Terre; *AD* une Ligne tirée par les Centres du Soleil & de la Terre: trouver la différence entre *BD* & ſa perpendiculaire *GH*, qui paſſe par le Centre *C*.

SOLUTION.

Qu'on s'imagine deux Canaux *BC* & *GC*, communiquans entre eux au Centre *C*, rempli d'un Fluide de différentes Denſités, telles qu'on ſuppoſe dans les couches de la Terre. Pour déterminer ces couches, nous conſidererons la Sphere inſcrite *GbHd*, & nous ſuppoſerons tout ce noyau immuable pendant la revolution journaliere de la Terre, fondés, à cet égard, ſur ce que nous avons dit dans la quatriéme hypotheſe du II. §. Quand même on feroit attention aux changemens de figure dans les couches près de *GbHd*, cette conſidération ne ſçauroit changer ſenſiblement le reſultat du Calcul, parce que ces changemens de

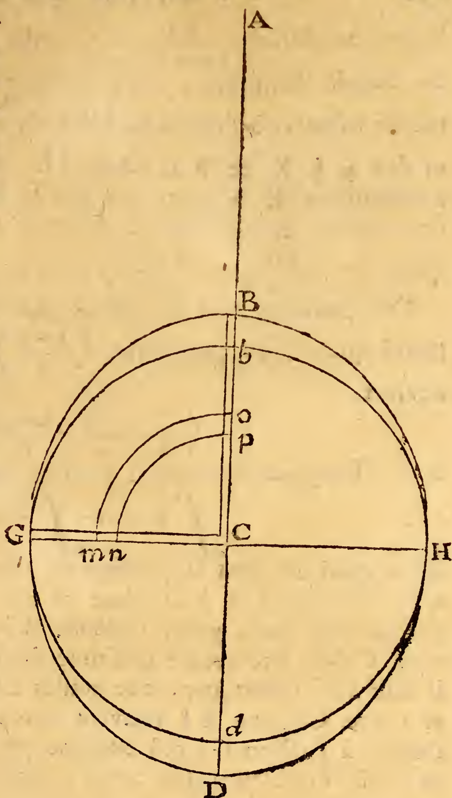


figure font tout-à-fait infenfibles, & que, felon toutes les apparences, ils ne fçauroient fe faire au-delà d'une certaine profondeur affez petite à l'égard du rayon de la Terre. Après cette remarque, nous déduirons la Solution de notre Problême, de ce que le Fluide doit être en équilibre dans les Canaux *G C* & *B C*. Pour fatisfaire à cette loi, & pour obferver un ordre, nous diviferons la Solution en trois parties : dans la premiere, nous chercherons la preffion totale du Fluide *B C* au Point *C*: dans la feconde, nous ferons la même chofe à l'égard du Fluide *G C*; & enfin nous ferons le Calcul, en faifant les deux preffions totales égales entre elles.

I. Soit $A\ C = a$; $G\ C$, ou $b\ C = b$; la cherchée $B\ b = \beta$: Qu'on tire du Centre *C* deux quarts de Cercles infiniment proches $p\ n$, $o\ m$; foit Cp ou $Cn = x$; $p\ o$ ou $n\ m = d\ x$; la Denfité variable en $p\ o$ ou $n\ m = m$, la Denfité uniforme de l'eau (qui couvre le noyau fphérique, & qui forme le double Ménifque) $= \mu$. Soit la Gravitation au Centre *C* vers le Centre du Soleil $A = g$, & la force centrifuge, qui agit parallelement à *B D*, fera par-tout $= g$ (§ *VIII. Chap. III.* & §. *IV. Chap. IV.*) qu'on nomme *G* la Force accéleratrice en *G* ou *b*, caufée par l'action du Globe *G b H d*, & *Q* la même force accéleratrice pour les Points *p* & *n*. Après toutes ces préparations, on voit que la goute *p o* (dont la Maffe doit être exprimée par la Denfité *m*, & par la hauteur $d\,x$, c'eft-à-dire $m\,d\,x$) eft animée par plufieurs Forces accéleratrices : la *premiere* Force accéleratrice eft celle qui refulte de l'action du Globe *G b H d*, que nous avons nommé *Q*: la *feconde* eft la Force centrifuge de *A* vers *C*, provenant par la revolution de la Terre autour du Point *A*: nous avons démontré, que cette Force doit être faite $= g$: la *troifiéme* fe fait vers *A*, & provient de la Gravitation vers le Soleil : celle-ci eft négative à l'égard du Point *C*,

& doit être faite $= -\frac{aa}{(a-x)^2} \times g$: enfin la *quatriéme* provient de l'action du double Ménisque, compris entre $GBHD$ & $GbHd$, & elle est encore négative à l'égard du Point C; elle est $= -\frac{8}{15} n\mu\beta \times \frac{x}{b}$, en vertu des §. §. X. & XI. Chap. II. En multipliant toutes ces pressions accéleratrices de la goute po par sa Masse, on obtient la pression absolue qu'elle exerce sur le Point C; & cette pression absolue sera $\left(Q + g - \frac{aag}{(a-x)^2} - \frac{8n\mu\beta x}{15b}\right) \times m\,dx$.

On remarquera ici en passant, que comme a est censé infiniment plus grand que x, on peut poser $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 = 1 + \frac{a}{2x}$, & ainsi cette pression devient

$$\left(Q - \frac{2xg}{a} - \frac{8n\mu\beta x}{15b}\right) \times m\,dx.$$

dont l'Intégrale donnera la pression de la Colonne pC; sçavoir,

$$\int Qm\,dx - \int \frac{2gm\,dx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta m x\,dx}{15b},$$

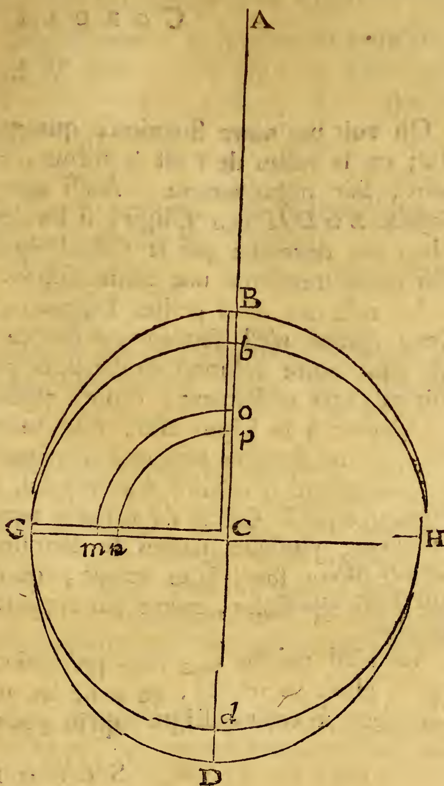
après quoi on aura la pression de toute la Colonne bC, en substituant dans l'Intégrale b à la place de x. A cette pression, il faut encore ajoûter celle de la petite Colonne Bb, dont la gravitation ou pésanteur vers C doit être censée uniforme dans toute sa hauteur, & égale à G: il faut aussi remarquer, que toutes les autres forces qui agissent sur cette petite Colonne Bb peuvent être négligées, comme infiniment inférieures à l'action G, qui exprime proprement la pésanteur près la surface de la Terre vers son centre; ainsi donc la pression de la petite Colonne Bb doit être simplement estimée par sa hauteur β, sa densité μ & sa pésanteur G, ce qui fait $\mu\beta G$. Il resulte enfin de tout cela, que la pression totale de toute la Colonne BC sur le Point C est

$$\mu\beta G + \int Qm\,dx - \int \frac{2gmx\,dx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta m x\,dx}{15b},$$

en prenant après l'intégration $x = b$.

II. Pour trouver à présent la pression de la Colonne GC, il faut chercher toutes les Forces qui animent la goute mn, dont la Masse est encore $m\,dx$. La *premiere* de ces Forces provient de l'Attraction du Globe $GbHd$, & est encore $= Q$, puisque cette Force est la même en n & en p: la *seconde* Force, provenant de la Force centrifuge des parties de la Terre, entant qu'elle se tourne autour du Point A, est $= 0$, cette Force étant par-tout perpendiculaire à GC (§. *VIII. Chap. III.*) La *troisiéme* Force provient de la Gravitation des Parties de la Terre vers A, cette Gravitation est au Point n vers le Point $A = \frac{aag}{aa+xx}$, & étant

étant décomposée, la Gravitation résultante vers C doit être exprimée par $\frac{aagx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$: dans cette derniere expression on peut rejetter au Dénominateur le terme xx, comme le Calcul me l'a fait voir; ainsi il provient $\frac{gx}{a}$, qui marque la troisiéme force vers C resultante de la Gravitation vers A.



La *quatriéme* Force accéleratrice, qui anime la goute mn à descendre vers le centre, provient de l'action du double Ménisque, qui en vertu du XII. §. Ch. II. est $= \frac{4}{15} n\mu\beta \times \frac{x}{b}$. En prenant la somme de toutes ces Forces accéleratrices, la Force totale sera $Q + \frac{gx}{a} + \frac{4n\mu\beta x}{15b}$; cette Force accéleratrice totale doit être multipliée par la petite Masse mdx; & du produit il faut prendre l'Intégrale, qui marquera la pression qu'exerce la Colonne mC sur le centre C: Cette pression est donc

$$\int Qmdx + \int \frac{gmxdx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mxdx}{15b};$$

& pour avoir la pression, qui réponde à toute la Colonne GC, il faut encore après l'intégration faire $x = b$.

III. Après avoir exprimé analytiquement les valeurs des pressions des Colonnes BC & GC, il ne reste plus pour achever la Solution de notre Problême, qu'à faire une équation entre les deux dites valeurs trouvées dans la premiere & seconde partie. On aura donc $\mu G\beta +$

$$\int Qmdx - \int \frac{2gmxdx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta mxdx}{15b} = \int Qmdx + \int \frac{gmxdx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mxdx}{15b},$$

& cette équation arrangée donne

$$5\mu Gab\beta - \int 4n\mu a\beta mxdx = \int 15gbmxdx;$$

& de là on tire la valeur cherchée de β, qui est constante; savoir,

$$\beta = \frac{\int 15gbmxdx}{5\mu Gab - \int 4n\mu amxdx}. \text{ C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE.

VI.

On voit par notre Solution, que généralement Bb doit être égale à Dd; car la valeur de $\mathfrak{b}$ est la même, soit que l'on prenne x affirmativement, soit négativement. Aussi auroit-il été ridicule de supposer la Courbe $BGDH$ une Ellipse, si les deux parties GBH & GDH n'étoient pas devenues par le Calcul également allongées, & la supposition auroit renfermé une contradiction.

Au reste ces deux petites Lignes ne seroient pas égales à la rigueur. Cette égalité n'est fondée que sur ce que nous avons rejetté plusieurs fois dans notre Solution de certaines petites quantités; mais qu'on pouvoit négliger réellement, comme tout-à-fait insensibles, non-seulement par rapport à la Ligne BC, mais même par rapport à la petite Ligne Bb, qui ne sçauroit être que d'un petit nombre de pieds. Cependant je crois encore nécessaire d'avertir ici, qu'il faut être sur ses gardes, en rejettant dans le Calcul de certains termes; car, comme dans l'équation resultante, plusieurs termes se détruisent, & qu'il n'en reste que des termes d'une fort petite valeur, on ne doit rejetter que des quantités qui sont insensibles, même par rapport aux quantités restantes dans l'équation.

Ce n'est qu'avec une telle précaution, que j'ai négligé dans ma Solution plusieurs termes, & je ne les aurois point négligées, si la fin du Calcul ne m'avoit enseigné, qu'ils peuvent & doivent être négligés.

SCHOLIE.

VII.

Pour avoir une juste idée de notre équation, remarquons que μ signifie la densité de l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, & m la densité quelconque de la couche, dont la distance au centre est égale à x: n exprime la circonference du Cercle, dont le rayon est égal à l'unité: b est le rayon de la Terre: a la distance entre les centres du Soleil & de la Terre: g exprime la force accéleratrice vers le Soleil, d'un Corps placé au centre de la Terre; & enfin G exprime la force accéleratrice, ou la pésanteur des Corps à la surface de la Terre vers son centre.

Or, pour voir que tous les termes de notre équation sont homogenes & comparables entre eux, & en même tems de quelle maniere il faut faire usage de notre équation, il faut remarquer qu'en vertu du III. §. Chap. II. G doit être exprimée par la Masse de toute la Terre, divisée par le quarré de son rayon; c'est-à-dire, qu'il faut suppo-

ser

ſer $G = \frac{\int 2\, n m x x d x}{b b}$, & comme on connoît pour le Soleil le rapport entre g & G, auſſi-bien que celui d'entre a & b, on voit qu'on peut enfin exprimer ϵ ſimplement par b: mais il faut pour cet effet intégrer auparavant les quantités $m x x d x$ & $m x d x$: c'eſt ce que nous allons faire dans quelques hypotheſes particulieres.

VIII.

Soit d'abord la denſité de la Terre uniforme, & nommément celle de l'eau de la Mer: c'eſt ici l'hypotheſe de M. Newton.

En ce cas m eſt une conſtante & égale à μ, & ainſi notre équation finale du V. §. eſt $\epsilon = \frac{15\, g b b}{2\, a\, (5 G - 2\, n \mu b)}$;

Mais par le VII. §. on obtient $G = \frac{2}{5}\, n \mu b$, ou bien $2\, n \mu b = 5\, G$, & ſubſtituant cette valeur pour le ſecond terme du Dénominateur, il provient $\epsilon = \frac{15\, g b}{4 G a} \times b$.

Nous verrons dans la ſuite, que cette expreſſion analytique donne préciſément la hauteur indiquée par M. Newton (†) ſimplement en pieds, pouces & lignes, ſans en donner le Calcul, ou du moins ſans le mettre à la portée, je ne dirai pas de tout le monde, mais uniquement de ceux qui voudroient bien prendre la peine néceſſaire pour l'approfondir. Notre Methode comprend donc le cas tout particulier de M. Newton. Mais ce cas donne une ſi petite quantité, qu'il ne me paroît pas poſſible

X 3 d'en

(†) C'eſt dans le Corollaire de la Prop. XXXVI. du Liv. III.; M. Newton dit que la hauteur de l'eau de la Mer ſous le Soleil ou au point oppoſé au Soleil, ſurpaſſe la hauteur de l'eau de la Mer à 90^d de ces points de 1^pied $11\frac{1}{8}$ pouc., & c'eſt à peu près à cela que revient l'expreſſion $\frac{15 g b}{4 G a} b$, car (par Cor. 1. Prop. 8. de ce Livre) la gravité à la ſurface du Soleil eſt à la gravité à la ſurface de la Terre comme 10000 à 435. Le Demi-Diamêtre du Soleil étant vû de la Terre ſous l'Angle de 16'. 4'' ce Diametre eſt à ſa diſtance du centre de la Terre comme 1 à 214, ainſi la gravité de la Terre ſur le Soleil (qui eſt g) eſt à la gravité à la ſurface de la Terre (qui eſt G) comme $\frac{10000}{214^2}$ à 435; D'où l'on trouve le Log. de $\frac{g}{G} = -4.7002107$. Le Diametre du Soleil étant à celui de la Terre comme 10000 à 109, on aura que le Rayon de la Terre $= b$ eſt à la diſtance du Soleil $= a$ comme 1 à $214 \times \frac{10000}{109}$, ainſi le Log. de $\frac{b}{a} = -5.7070265$, & L. $\frac{g b}{G a} = -8.4072372$. Enfin, reduiſant le Rayon de la Terre b en pouces à raiſon de $1145\frac{1}{2}$ lieuës de 2855 Toiſes chacune pour le Rayon, ſon Log. eſt 8.3718709. Ainſi le Log. de $\frac{g b}{G a} b = 0.7791081$ dont le nombre eſt 6,014 dont les $\frac{15}{4}$ ſont $22\frac{1}{2}$ pouces, à peu près comme M. Newton a trouvé.

d'en déduire les Phénomenes des Marées, tels que les obſervations les donnent. C'eſt ce que je ferai voir plus au long dans la ſuite. Je n'ai donc jamais pû comprendre, comment M. Newton, & tous ceux de ſa Nation, qui ont écrit ſur cette matiere, ont pû s'y attacher. On voit par là, combien il eſt eſſentiel d'étendre les hypotheſes des denſités des couches de la Terre. J'ai remarqué que la loi de ces denſités contribue beaucoup au hauſſement & baiſſement des eaux dans les Marées; qu'on en peut déduire tel effet, qu'on trouvera néceſſaire pour l'explication des Phénomenes indiqués par l'expérience; je ferai même voir que cet effet pourroit être infini dans de certaines hypotheſes. Mais ce que je ſouhaite ſur-tout que l'on remarque, c'eſt que les mêmes hypotheſes qui donnent plus d'effet aux Luminaires, pour hauſſer & baiſſer les eaux dans les Marées, ſont d'ailleurs extrêmement vrai-ſemblables par pluſieurs raiſons Phyſiques, toutes très-fortes. Mais venons à d'autres exemples.

I X.

Suppoſons la Terre creuſe en dedans, juſqu'à une diſtance donnée c depuis le centre, & que la croute (dont l'épaiſſeur ſera $= b - c$, ſoit encore par-tout d'une denſité égale à celle de l'eau de la Mer.

Nous avons en ce cas encore m égale à la conſtante μ, & ainſi le Calcul ſe fera comme dans le précedent Article, avec cette reſtriction, que les intégrales des quantités $mxxdx$, & $mxdx$ doivent être $= o$, lorſque $x = c$: de cette maniere on obtient $\int mxdx = \frac{1}{2}\mu xx - \frac{1}{2}\mu cc$, ou (en faiſant $x = b$) $= \frac{1}{2}\mu bb - \frac{1}{2}\mu cc$; ſubſtituant cette valeur dans l'équation finale du V §. il vient

$$\varepsilon = \frac{15gb(bb-cc)}{10Gab - 4n\mu a(bb-cc)};$$

& (*par le VII.* §.) G eſt $= \frac{\int 2nmxxdx}{bb} = \frac{2n\mu}{3bb} \times (x^3 - c^3) =$ (puiſqu'il faut poſer $x = b$) $\frac{2n\mu}{3bb} \times (b^3 - c^3)$: de cette derniere équation, on peut tirer celle-ci $\mu = \frac{3bbG}{2n \times (b^3 - c^3)}$, & enfin $4n\mu a(bb-cc) = \frac{6abbG(bb-cc)}{b^3 - c^3}$ & ſubſtituant cette valeur dans le ſecond terme du Dénominateur de notre équation, on a $\varepsilon = \frac{15g}{2G} \times \frac{b+x}{a} \times \frac{b^3 - c^3}{2bb + 2bc + 5cc}$.

Cette quantité eſt la même, que celle du précedent Article, lorſque $c = o$; mais elle devient plus petite, à meſure qu'on ſuppoſe la Terre plus creuſée, & elle deviendroit tout-à-fait nulle, ſi on ſuppoſoit la Terre preſque entierement creuſe en forme d'une voute ſphérique, dont l'épaiſſeur fût peu conſidérable, par rapport au rayon de la Terre. Cette remarque ſuffit ſeule, pour refuter le ſentiment de ceux qui croyent que la Terre pourroit bien n'être qu'une croute voutée; car il ne pour-

roit

roit y avoir en ce cas aucun Flux & Reflux de la Mer, au moins dans notre Syſtême.

X.

Si l'on ſuppoſoit la loi des denſités des couches de la Terre exprimée par cette équation $m = \frac{x}{b}\mu$, c'eſt-à-dire, que les denſités fuſſent proportionnelles aux diſtances des couches au centre, on trouveroit la hauteur

$$\varrho = \frac{15\,g\,b}{7\,G\,a} \times b,$$

& par conſéquent beaucoup plus petite, que ſi la Terre étoit par-tout d'une même denſité, ſçavoir en raiſon de 7. à 4. Auſſi cette hypotheſe n'eſt-elle aucunement vraiſemblable, y ayant apparence que les couches plus denſes ſont plus bas que les couches plus legeres.

X I.

Si la loi des denſités eſt exprimée par $m = \frac{b\mu}{x}$, c'eſt-à-dire, ſi l'on ſuppoſe les denſités, ſuivre la raiſon inverſe des diſtances des couches au centre, on trouveroit

$$\varrho = \frac{15\,g\,b}{G\,a} \times b,$$

ce qui fait la valeur de ϱ quatre fois plus grande, que dans la ſuppoſition de M. Newton, de la parfaite homogenéïté de la Terre.

X I I.

Suppoſons enfin la loi des denſités exprimée par $m = \left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{4}{3}}\mu$, il faudra mettre $\frac{3}{2}\mu\,b\,b$ pour $\int m\,x\,dx$, & l'équation du VI. §. diviſée par μ ſera

$$\varrho = \frac{45\,g\,b}{10\,G\,a - 12\,n\,\mu\,a\,b} \times b:$$

mais en vertu du VII. §. on a $G = \int \frac{2\,n\,m\,x\,x\,dx}{b\,b} = \int \frac{2n\mu x^{\frac{2}{3}}\,dx}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{6n\mu x^{\frac{5}{3}}}{5\,b^{\frac{2}{3}}}$ = (en faiſant $x = b$) $\frac{6}{5}\,n\,\mu\,b$. D'où l'on voit que le Dénominateur de notre équation fondamentale devient $= 0$, & par conſequent $\varrho = \infty$. Ainſi l'élevation des eaux ſeroit infinie.

X I I I.

J'ai mis cette derniere hypotheſe, non qu'elle ſoit poſſible, puiſque la denſité ne ſçauroit être infinie, comme elle devroit être au centre; mais pour faire voir l'avantage & la ſupériorité de notre Théorie, puiſqu'elle ne met point de bornes à l'élevation des eaux: ſi les Marées étoient cent ou mille fois plus grandes qu'on ne les obſerve, nous pour-

rions

rions lui aſſigner une cauſe ſuffiſante. Ayant au reſte bien examiné tous lès Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, je ſuis entierement convaincu, que la force aſſignée par M. Newton ne ſçauroit ſuffire pour les produire : il faut donc dire dans le ſyſtême même de ce Philoſophe, que les denſités de la Terre ne ſont pas uniformes, mais qu'elles croiſſent vers le centre. Cette hypotheſe n'eſt-elle pas fort probable d'ailleurs d'elle-même ? L'eau eſt-elle le ſeul Fluide que nous connoiſſions ? & ne faut-il pas que les Fluides plus péſants, ſoient plus proches du centre de la Terre? le Mercure eſt près de quatorze fois plus péſant que l'eau: la grande compreſſion que ſouffrent les parties proches du centre de la Terre, ne pourroit-elle pas contribuer à rendre la matiere plus compacte & plus denſe ?

Si nous conſidérons outre cela, combien les Planetes & la Terre, qui nagent ſans doute dans un milieu reſiſtant, quoique extrêmement ſubtil, conſervent leur mouvement, ſans en perdre la moindre partie conſidérable pendant une longue ſuite de ſiécles, nous pourrions facilement croire, que tous ces Corps ont beaucoup plus de matiere, que M. Newton ne marque. Enfin de quel côté que j'enviſage cette Queſtion, tout me fait croire, que les couches de la Terre augmentent de denſité vers le centre.

XIV.

Si, tout le Noyau ou tout le Globe de la Terre reſtant, l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, changeoit de denſité, la quantité β ſuivroit la raiſon reciproque des denſités des eaux de la Mer. Il ſuit de là que ſi la Terre étoit inondée de Mercure, les Marées ſeroient quatorze fois plus petites, qu'elles ne ſont actuellement. Et ſi au contraire l'air étoit un Fluide homogene peſant, mais ſans élaſticité, ſa hauteur ſeroit environ de $850\,\beta$ plus grande à ceux qui ont le Soleil au Zenith, qu'à ceux qui l'auroient à l'Horiſon. Cela feroit 1700 pieds de différence dans la hauteur de l'Atmoſphere, à ne donner que deux pieds de valeur à β; & cette différence en produiroit une ſur le Barometre de plus de 20 lignes. D'où vient donc, demandera-t-on, qu'on n'obſerve point à cet égard aucune variation dans le Barometre? C'eſt l'élaſticité de l'air qui en eſt la cauſe; cette élaſticité fait que la hauteur du Barometre doit être conſtamment la même dans toute la ſurface de la Mer, en faiſant abſtraction ſeulement des cauſes accidentelles & paſſageres, qui peuvent ſurvenir tout d'un coup, & qui n'agiſſent ſur l'air, que parce que celui-ci ne ſçauroit obéïr aſſez promptement, ni ſe mettre dans un inſtant dans ſon état naturel d'équilibre. On remarquera ici qu'il eſt faux, que la preſſion du Mercure ſoit égale à la preſſion, ou plûtôt au poids de la Colonne d'air verticale couchée deſſus, ce que l'on affirme ordinairement; mais

mais la pression du Mercure est égale au poids moyen de toutes les Colonnes d'air verticales, qui environnent la Terre, c'est-à-dire, égale au poids de tout l'Atmosphere (dont la hauteur est considérée comme infiniment petite, par rapport au rayon de la Terre) multiplié par la raison de la base de la Colonne du Mercure à toute la surface de la Terre. Cette Proposition fait voir que la hauteur moyenne du Barometre doit être la même sous l'Equateur & sous le Cercle Polaire, quoique le poids absolu de la Colonne d'air verticale sous l'Equateur pendant les plus grandes chaleurs ne soit pas la moitié si grand que celui d'une pareille Colonne d'air sous le Cercle Polaire en Hyver. On voit de tout ce que nous venons de dire, pourquoi, ni le Soleil, ni la Lune ne changent pas sensiblement la hauteur du Barometre, quoi qu'ils élevent les eaux considérablement. La véritable raison n'en est que l'élasticité de l'air, qui doit faire presser également tous les endroits de la surface de la Terre; & cette seule reflexion démontre entierement l'insuffisance des inégales compressions de la matiere des Tourbillons, pour expliquer les Marées, comme nous avons déja remarqué au III. §. Chap. I.

X V.

Tous les cas particuliers, que nous venons d'examiner, font voir, & il n'est pas difficile de le démontrer généralement par l'équation du V. §. que la quantité ζ (qui exprime la différence entre la plus grande hauteur de la Mer, & la plus petite, entant qu'elle est produite par la seule action du Soleil) est toujours $= \frac{ngb}{Ga} \times b$: le cofficient n dépend des différentes densités des couches de la Terre, le rapport $\frac{b}{a}$ est connu par les Observations astronomiques: il ne reste donc qu'à voir comment on pourra déterminer la quantité $\frac{g}{G}$: c'est en comparant les effets que les Forces g & G produisent; la premiere, en retenant la Terre dans son Orbite annuelle; la seconde, en retenant la Lune dans celle qu'elle fait autour de la Terre. Si la distance moyenne de la Lune au centre de la Terre est nommée α, la Force centrifuge de la Lune sera $= \frac{bb}{\alpha\alpha} G$, & la force centrifuge de la Terre est $= g$: or la Force centrifuge moyenne de la Terre dans son Orbite, est à la force centrifuge moyenne de la Lune autour de la Terre, ou plutôt autour du centre de Gravité du systême de la Terre & de la Lune, comme la distance du Soleil divisée par le Quarré du tems périodique de la Terre autour du Soleil, est à la distance de la Lune au centre de Gravité commun de la Terre & de la Lune, [M. Newton suppose cette distance $= \frac{39}{40}\alpha$, voyez ses *Princ. Math. Phil. nat. Edit.* 2. *pag.* 430.; il fonde cette supposition sur quelques Phénomenes des Ma-

rées, mais mal choisis à mon avis; elle est donc encore fort douteuse; mais comme elle n'est pas de conséquence pour notre sujet, je ne laisserai pas de l'adopter ici] divisée par le quarré du tems périodique de la Lune: on a donc, en nommant le tems périodique de la Terre T, & celui de la Lune t, cette Analogie $g : \frac{bb}{\alpha\alpha} G :: \frac{a}{TT} : \frac{39\,\alpha}{40\,tt}$;

ce qui donne $\frac{g}{G} = \frac{40\,abbtt}{39\,\alpha^3 TT}$, & par consequent

$$\beta = \frac{ngb}{Ga} \times b = \frac{40\,nb^3tt}{39\,\alpha^3TT} \times b.$$

REMARQUE.

Pour voir que cette Formule s'accorde avec celle de M. Newton pour la supposition de l'homogenéité de la Terre, nous remarquerons, qu'en ce cas on a $n = \frac{15}{4}$ (§. *VIII.*) & M. Newton suppose $\frac{b}{\alpha} = \frac{1}{60\frac{1}{4}}$ (*Princip. Mat. Phil. nat. Edit.* 2. *pag.* 430.) $\frac{tt}{TT} = \frac{1000}{178725}$ (*Princip. Math. pag.* 395.) & enfin $b = 19695539$ pieds après la mesure de M. Cassini. De tout cela il resulte

$$\beta = \frac{40.\ 15.\ 1.\ 1000.\ 19695539}{39.\ 4.\ (60\frac{1}{4})^3.\ 178725.} \text{ pieds},$$

cela fait $\beta = 1$ pied 11. pouces & un quart. M. Newton trouve 1 pied 11 pouces & un huitieme. (*Princ. Math. pag.* 429.) La différence me paroît trop petite, pour en rechercher l'origine.

XVI.

Tout ce que nous venons de dire par rapport à l'action du Soleil, doit être entendu aussi de la Lune, sans y rien changer; de sorte que les équations fondamentales des §. §. V. & VII. servent également pour la Lune, en entendant par a la distance entre les centres de la Terre & de la Lune, & par g la pésanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune. Et comme nous avons dit au XV. §. que quelque hypothese qu'on prenne pour exprimer les différentes densités dans les couches de la Terre, on trouvera toujours

$$\beta = \frac{ngb}{Ga} \times b,$$

nous dirons par rapport à la Lune, qu'on trouvera toujours

$$\delta = \frac{n\gamma b}{G\alpha} \times b,$$

prenant

prenant pour δ la différence des hauteurs des eaux à ceux qui ont la Lune au Zenith, & à l'Horison, pour α la diſtance entre les centres de la Lune & de la Terre, & pour γ la peſanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune.

X V I I.

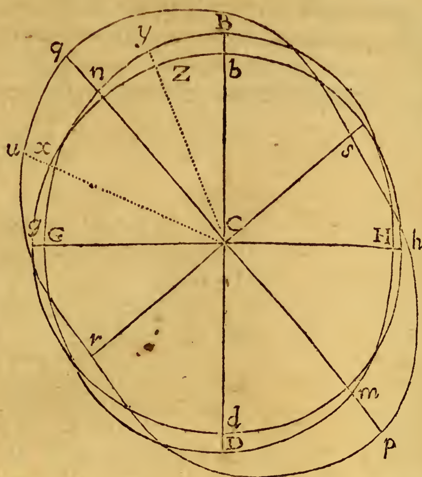
Ce qui m'a engagé à ne parler d'abord que de l'action du Soleil ſur la Mer, eſt qu'on connoît parfaitement bien la valeur de g pour le Soleil, comme nous avons vû au X V. §. au lieu que la Lune, qui n'a point de Satellites, ne ſçauroit donner immédiatement la Force accéleratrice qu'elle cauſe au centre de la Terre, & que nous avons nommé γ. Je trouve par ma nouvelle Théorie de la Lune, dont j'ai déja fait mention ci-deſſus, plus générale, plus exacte, & ſur-tout infiniment plus facile, que celle de M. Newton, qu'on peut déterminer lad. valeur γ avec toutes les autres qui en dépendent; ſçavoir la Maſſe de la Lune, comparée avec celle de la Terre, & leur commun centre de Gravité, moyennant quelques irrégularités dans les mouvemens de la Lune, pourvû qu'on puiſſe les obſerver aſſez exactement. M. Newton a tâché de déterminer la Force accéleratrice γ, en comparant les effets de la Lune ſur la Mer avec ceux du Soleil; cette Methode ſeroit fort bonne, ſi on ſçavoit bien ſéparer les effets des deux Luminaires. Il a prétendu le faire, en comparant les Marées bâtardes, qui ſuivent les Quadratures, avec les plus grandes Marées, qui ſuivent les Syzygies. Nous verrons ci-deſſous ce que l'on peut trouver à redire à cette Methode, & comment on pourra en ſubſtituer d'autres plus exactes.

X V I I I.

Au reſte, il eſt clair que la Lune & le Soleil produiront leurs effets independamment l'une de l'autre: tout ce que le Soleil pourroit contribuer au moins dans la pure Théorie, pour troubler l'action de la Lune, eſt qu'il allonge un peu la Terre: mais il eſt auſſi bien évident, que la Lune changera également la ſurface de la Mer ſur une Terre parfaitement ronde ou allongée d'un petit nombre de pieds: nous avons déja dit la même choſe dans la premiere hypotheſe du ſecond Article.

Voici donc comment il faudroit déterminer la ſurface de la Mer; ſi les deux Luminaires pouvoient produire dans un inſtant tout leur effet, c'eſt-à-dire, ſi l'eau n'avoit point d'inertie, & qu'elle pût prendre incontinent ſa juſte figure; car c'eſt de cette inertie, qu'il faudra tirer dans la ſuite pluſieurs inégalités, & autres Phénomenes, qu'on a obſervés dans les Marées.

Soit $bgdh$ le Globe de la Terre parfaitement ſpherique, & conſidérons d'abord le Soleil, que nous ſuppoſerons placé dans la Ligne prolongé bd paſſant par le centre de la Terre C: notre Globe ſe changera en Sphéroïde, tel que $BGDH$, les eaux baiſſant autour de gh, & montant autour de b & d. Soit enſuite la Lune dans la Ligne prolongée qp; il eſt clair qu'elle agira ſur le Sphéroïde de la même façon qu'elle feroit ſur le Globe parfait, duquel le Sphéroïde differe d'une quantité tout-à-fait inſenſible: ainſi donc la Lune fera monter



& baiſſer les eaux par deſſus la ſurface du Sphéroïde, tout autant qu'elle feroit à l'égard de la ſurface ſphérique, ſans l'action du Soleil. Il faut donc prendre nq, ou mp, à bB, ou dD en raiſon des Forces lunaire & ſolaire, c'eſt-à-dire, comme $\frac{y}{\alpha}$ à $\frac{g}{a}$, tracer enſuite les courbes $qrps$, telles qu'en prenant un Angle quelconque uCq, égal à un Angle yCB, la perpendiculaire ux interceptée entre les ſurfaces des Sphéroïdes, ait à la perpendiculaire yz, interceptée entre le premier Sphéroïde & le Globe, la raiſon de nq à Bb. Voilà donc une Conſtruction géometrique générale, qui montre à chaque moment, & à chaque endroit, la hauteur de la Mer, & les variations de cette hauteur. Mais elle demande des Calculs longs & pénibles. Nous verrons dans la ſuite, comment on pourra s'y prendre, pour les faire, en commençant par les circonſtances & les hypotheſes les plus ſimples, & en ajoûtant des corrections & équations à faire pour chaque circonſtance changée.

XIX.

Voici donc les cas & les hypotheſes, par leſquelles nous commencerons. Nous ſuppoſerons d'abord, que la Lune fait des Cercles parfaits autour de la Terre, & pareillement la Terre autour du Soleil: que ces Orbites ſont dans le plan de l'Equateur de la Terre: que tonte la Terre eſt inondée: que la ſurface de la Mer prend dans un inſtant ſa juſte Figure, tout comme ſi l'eau n'avoit point d'inertie, ni reſiſtances; & enfin qu'il ne faille déterminer les loix des Marées, que ſous l'Equateur. Mais avant de faire les

les Calculs, il ſera bon d'expoſer préliminairement quelques Lemmes géometriques.

CHAPITRE V.

Contenant quelques Propoſitions de Géometrie préliminaires pour l'Explication & le Calcul des Marées.

PROBLEME.

SOit, comme ci-devant, le Cercle *bgdh* & l'Ellipſe preſque circulaire *BGDH*, & ſuppoſons la Sphere & le Sphéroïde, décrits par la rotation du Cercle & de l'Ellipſe autour de l'Axe *B D*, égaux ; trouver le rapport entre les petites Lignes *B b* & *G g*.

SOLUTION.

Nous ſuppoſerons pour nous ſervir des mêmes expreſſions, que nous avons employées juſqu'ici, $Bb + Gg = \varepsilon$; $Gg = x$, & $Bb = \varepsilon - x$; Cb ou $Cg = b$; n la circonference du Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité. Ceci poſé, on ſçait que la Sphere ſera $= \frac{2}{3} n b^3$: on ſçait auſſi, qu'un Ellipſoïde (dont le grand Axe eſt $= 2A$, & le plus petit Diametre $= 2B$) eſt $= \frac{2}{3} n BBA$; cela donne notre Sphéroïde $= \frac{2}{3} n (b - x)^2 \times (b + \varepsilon - x) = \frac{2}{3} n (b^3 - 3bbx + bb\varepsilon)$ ſi l'on néglige les infiniment petits du ſecond ordre. Faiſant à préſent par la condition du Problême la Sphere égale au Sphéroïde, on a $\frac{2}{3} nb^3 = \frac{2}{3} n (b^3 - 3bbx + bb\varepsilon)$ c'eſt-à-dire, $x = \frac{1}{3}\varepsilon$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

I.

Si $Gg = \frac{1}{3}\varepsilon$, il faut que Bb ſoit $= \frac{2}{3}\varepsilon$, & par conſéquent double de l'autre.

l'autre. Ainsi donc l'eau monte deux fois plus autour de la Ligne, qui passe par le centre de l'un des Luminaires, & celui de la Terre, qu'elle ne descend à la distance de 90 dégrés.

PROBLEME.

III.

Si l'on tire du centre *C* une droite quelconque *Cy*, trouver la petite Ligne *yz*, qui marque la hauteur verticale du Point *y* pris dans l'Ellipse, par dessus le Pont *Z* pris dans le Cercle.

SOLUTION.

Qu'on tire par le Point z la droite $\beta\alpha$ perpendiculaire à l'Axe: on voit qu'en conséquence de nos hypotheses, l'Angle $\beta y z$ doit être pris pour un droit, & le petit Triangle $\beta y z$ censé semblable au Triangle $C\alpha z$, d'où l'on tire

$$yz = \frac{\alpha z}{Cz} \times \beta z.$$

Soit à present $C\alpha = s$; $z\alpha = \sqrt{bb - ss}$; on aura par la nature de l'Ellipse

$$\alpha\beta = \frac{CG}{CB} \times \sqrt{B\alpha \times \alpha D} = \frac{b - \frac{1}{3}\beta}{b + \frac{2}{3}\beta} \times \sqrt{(b + \frac{2}{3}\beta - s) \times (b + \frac{2}{3}\beta + s)}.$$

Si on change cette quantité en suites, & qu'on rejette toujours les infiniment petits du second ordre, on trouvera enfin

$$\alpha\beta = \sqrt{bb - ss} + \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times \beta.$$

De là on tire $\alpha\beta - \alpha z = \beta z = \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times \beta$, & par consequent

$$yz = \frac{3ss - bb}{3bb} \times \beta. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE I.

IV.

Pour trouver les Points *M*, où l'Ellipse coupe le Cercle, on n'a qu'à faire $yz = 0$, ce qui donne $s = b\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773b$, & l'Arc *bM* de 54°. 44'.

COROL-

COROLLAIRE II.

V.

Si la Terre tournoit autour d'un Axe perpendiculaire au plan de notre Figure, & que le Cercle *bgdh* repréſentât ainſi l'Equateur de la Terre, dans lequel l'un des Luminaires eſt ſuppoſé ſe trouver: ſi par cette rotation de la Terre, le Point *B* eſt parvenu en *y*, le Luminaire reſtant dans l'Axe *BD*, l'Angle *bCZ* ſera l'Angle horaire, dont le Coſinus eſt appellé *s*, le Sinus total *b*; & on voit que la différence des hauteurs de l'eau avant & après ladite rotation ſera repréſentée par $Bb - yz$, c'eſt-à-dire par $\frac{2}{3}\rho + \frac{bb-3ss}{3bb} \times \rho$, ou par $\frac{bb-ss}{bb} \times \rho$, ou enfin (en nommant le Sinus de l'Angle horaire σ) par $\frac{\sigma\sigma}{bb}\rho$. Nous concluerons de là, que les baiſſemens des eaux ſont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute-Mer.

COROLLAIRE III.

VI.

Les variations qui répondent à de petits intervalles de tems égaux, ſont pour chaque Point *Z*, proportionelles aux aires du Triangle $C\alpha z$. Car l'intervalle de tems doit être exprimé ſimplement par un petit Arc de Cercle, qui eſt $= \frac{-bds}{\sqrt{bb-ss}}$, en conſiderant *s* comme variable; & ſi nous faiſons cette quantité égale à un petit élement de tems dt, nous aurons $\frac{-bds}{\sqrt{bb-ss}} = dt$ & $ds = \frac{-dt\sqrt{bb-ss}}{b}$. Or par le V §. tout le baiſſement des eaux étant $= \frac{bb-ss}{bb} \times \rho$, ſa différentielle ſera $= \frac{2\rho s\, dt \sqrt{bb-ss}}{b^3}$; & comme les quantités ρ, b & dt ſont conſtantes, nous voyons, que les variations verticales des Marées, qui ſe font en de petits intervalles de tems égaux, ſont proportionnelles aux quantités répondantes $s\sqrt{bb-ss}$, ou aux Aires des Triangles $C\alpha z$.

SCHO-

SCHOLIE.

VII.

On voit que ces proprietés tendent à déterminer les hauſſemens & baiſſemens d'une même Marée pour chaque moment, & nous verrons dans la ſuite, combien elles répondent aux Obſervations. Ces Propoſitions ſuffiroient pour ce deſſein, ſi nous ne voulions conſidérer que ce qui arrive aux Conjonctions & Oppoſitions des deux Luminaires : mais comme cette reſtriction ne feroit qu'un cas très-particulier de toute la Théorie des Marées, nous paſſerons plus outre. Remarquons cependant encore une fois, que chaque Luminaire peut être conſideré, comme agiſſant ſur la Mer, indépendamment l'un de l'autre; puiſque les petites variations cauſées par l'un des deux, ne changent pas ſenſiblement toute la figure de la Terre : une quantité de quelques pieds ne ſçauroit être ſenſible par rapport à tout le Diametre de la Terre. Nous allons donc conſidérer les deux Luminaires à la fois, & dans une poſition en longitude quelconque, quoique toujours dans le plan de l'Equateur. Nous conſidérerons auſſi ſur la Terre un Point quelconque dans l'Equateur, pour voir combien la Mer doit être plus haute ou plus baſſe dans ce Point, qu'elle ne feroit ſans l'action des Luminaires. C'eſt ici une Queſtion des plus eſſentielles pour notre ſujet. Souvenons-nous cependant, que β ſignifie la hauteur de toute la variation des eaux d'une Marée, entant qu'elle eſt produite par la ſeule action du Soleil, & δ la même choſe pour la Lune.

PROBLEME.

VIII.

Soit $b\beta d\delta$, l'Equateur de la Terre parfaitement circulaire, tel qu'il feroit ſans l'action des deux Luminaires: ſuppoſons le Soleil dans la Ligne prolongée db, & la Lune dans la Ligne prolongée $\delta\beta$; & ſoit un point Z donné de poſition: trouver la hauteur yz, qui marque l'élevation de la Mer pour ledit point Z produit par les deux Luminaires.

SOLUTION.

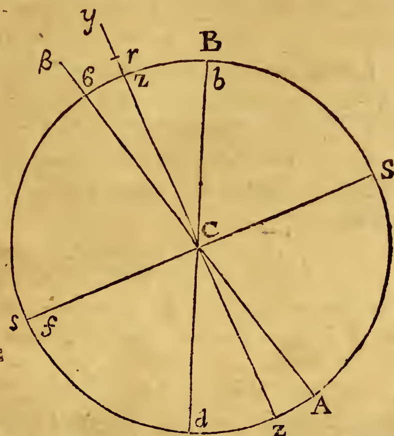
Suppoſons que le Soleil éleve les eaux en b de la hauteur Bb, & la Lune de la hauteur $B\beta$ au Point β. On aura par les précedentes Propoſitions $Bb = \frac{2}{3}\beta$, & $B\beta = \frac{2}{3}\delta$: qu'on partage la hauteur cherchée yz en deux parties yr, & rz, dont la premiere convienne à l'action de la Lune, & l'autre à l'action du Soleil: ſoit le Sinus total $= 1$, le Sinus de l'An-

l'Angle donné $bCz = \frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle βCz pareillement donné $= \frac{\varrho}{b}$: de cette maniere, nous aurons en vertu du III. §. $rz = \frac{3ss - bb}{3bb} \times \beta = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta$, & pareillement $yr = \frac{2bb - 3\varrho\varrho}{3bb} \times \delta$, & par conséquent

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{2bb - 3\varrho\varrho}{3bb} \times \delta. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE.

IX.



On voit par cette Solution la loi qu'il faudroit obſerver pour conſtruire une Table, qui marquât pour chaque âge de la Lune, & pour chaque moment, les hauteurs des Marées, en ſuppoſant le Point z changer continuellement de poſition, juſqu'à-ce qu'il ait fait le tour: voyons à préſent quel eſt le Point Z, qui marque la plus grande hauteur yz, les Poles b & β étant donnés de poſition.

LEMME.

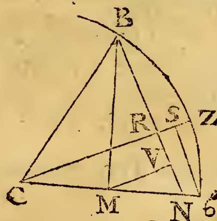
X.

Si le Sinus de l'Angle bCz eſt appellé, comme ci-deſſus, $\frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle βCz, $\frac{\varrho}{b}$; le Sinus de la ſomme de ces deux Angles, c'eſt-à-dire, le Sinus de l'Angle $bC\beta$, $\frac{m}{b}$; je dis qu'on aura

$$\varrho = \frac{m\sqrt{(bb - \sigma\sigma)} - n\sigma}{b}, * \ \&$$

$$\varrho^2 = \frac{mmbb + nn\sigma\sigma - mm\sigma\sigma - 2mn\sigma\sqrt{(bb - \sigma\sigma)}}{bb}.$$

 Je



* La lettre n exprime ici $\sqrt{bb - mm}$. La demonſtration de ce Lemme eſt fort ſimple, le Rayon BC étant b, le Sinus de tout l'Angle $BC\beta$ étant $\frac{m}{b}$, on aura $BM = m$, $CM = \sqrt{bb - mm}$; $\beta S = \sigma$, $CS = \sqrt{bb - \sigma\sigma}$, $BR = \varrho$. Prolongez BR en N, & menez MV parallele à CR, les Triangles $C\beta S$ & BMV ſeront ſemblables à cauſe des Angles droits S & V & des Angles égaux $C\beta Z$ & MBN; Donc on aura $C\beta\,(b) : CS\,(\sqrt{bb - \sigma\sigma}) = BM\,(m) : BV = \frac{m\sqrt{bb - \sigma\sigma}}{b}$; On trouvera de même que $C\beta\,(b) : \beta S\,(\sigma) = CN : NR = CM\,(n) : RV = \frac{n\sigma}{b}$; Donc $BR\,(\varrho) = BV - RV = \frac{m\sqrt{bb - \sigma\sigma}}{b} - \frac{n\sigma}{b}$: C.Q.F.T.

Je n'ajoûterai pas la démonſtration de ce Lemme: mais il eſt pourtant bon d'avertir ici, qu'en cherchant la valeur de ρ, qui marque le Sinus de la différence de deux Angles donnés par leurs Sinus; on tombe facilement dans une autre expreſſion beaucoup plus prolixe, & qui rend le Calcul du Problême, que nous allons expoſer, preſque impraticable.

PROBLEME.

Trouver les Points *Z*, où les hauteurs *y z* ſoient les plus grandes.

SOLUTION.

La nature de notre Problême demande, que la différentielle de *y z*, ſçavoir $\frac{-2\epsilon\sigma d\sigma - 2\delta\rho d\rho}{3bb}$ (§. *VIII.*) ſoit $= o$, ou bien $\rho d\rho = \frac{-\epsilon}{\delta}\sigma d\sigma$.

Et ſi l'on différentie l'équation ſeconde du précedent Lemme, on trouve, prenant les quantités *m*, *n* & *b* pour conſtantes, & σ pour variable,

$$\rho d\rho = \frac{nn\sigma d\sigma - nm\sigma d\sigma}{bb} + \frac{2mn\sigma\sigma - nmbb}{bb\sqrt{(bb-\sigma\sigma)}}d\sigma.$$

En comparant ces deux valeurs de $\rho d\rho$, on trouve une nouvelle équation, à laquelle on pourra donner une telle forme,

$\left(-\frac{\epsilon}{\delta}bb\sigma + mm\sigma - nn\sigma\right)\sqrt{bb-\sigma\sigma} = 2mn\sigma\sigma - mnbb$: ſi l'on ſuppoſe pour abréger la Formule $\frac{-\epsilon bb}{\delta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = A$, on trouve après une reduction entiere de l'équation, le Sinus de l'Angle *b C z*, ou

$$\frac{\sigma}{b} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{A}{2\sqrt{(4+AA)}}\right)}. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

SCHOLIE.

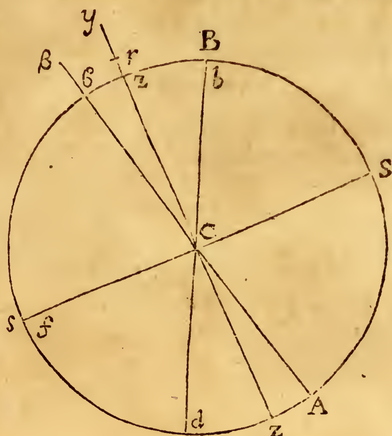
XII.

Il ne ſera pas difficile de reconnoître dans chaque cas, quel choix on doit faire des Signes ambigus. Mais pour faciliter la choſe, & pour en donner une idée d'autant plus diſtincte, on pourra faire les remarques qui ſuivent.

1°. Que notre Formule marque en même tems quatre Points *z*, *Z*, *s* & *S*; que les deux premiers diametralement oppoſés, marquent que la Mer *y* eſt la plus haute, & les deux autres diametralement oppoſés marquent que la Mer *x* eſt la plus baſſe, & que l'Arc *z s* eſt toujours de 90°, ce que l'on connoit de ce que $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}}$, exprimant le Sinus d'un Angle, ſon Coſinus eſt exprimé par $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}\right)}$.

2°. Que

2°. Que l'Angle $b C \beta$ étant aigu, le Point z tombe entre les Points b & β, que si cet Angle est droit, le Point z tombe précisément sur β (en supposant la Force lunaire plus grande que la Force solaire, comme elle l'est sans doute); & enfin, lorsque l'Angle $b c \beta$ est obtus, que le Point z tombe au-delà du Point β, l'Arc $b z$ devenant plus grand que l'Arc $b \beta$, avec cette loi que le Point z s'approche reciproquement du Point d, tout comme il s'étoit éloigné du Point b. Enfin, qu'il y a autant de racines inutiles, qu'il faut rejetter, mais qu'il faudroit adopter, si la Force solaire surpassoit la Force lunaire.



COROLLAIRE I.

XIII.

On trouve le Sinus de l'Angle $\beta C z$ exprimé par $\frac{\beta}{b}$ de la même façon, que nous avons trouvé le Sinus de l'Angle $b\ Cz$. On voit même que sans faire le Calcul de nouveau, on n'a qu'à renverser les lettres β & δ dans la la valeur de A, indiquée au §. XI. & supposer $-\frac{\delta b b}{\beta m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = B$, &. on aura $\frac{\beta}{b} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{(4+BB)}}\right)}$.

COROLLAIRE II.

XIV.

Considérant l'Angle $b\ C\ \beta$ comme variable, on voit que l'Angle $\beta C z$, qui marque l'Angle horaire entre le moment de la plus haute Marée, & celui du passage de la Lune par le Méridien, peut faire un *maximum*, ou plus grand, puisqu'il est $= o$, tant lorsque l'Angle $b\ C \beta$ est nul, que lorsqu'il est égal à un droit: nous allons déterminer cet Angle dans la Proposition suivante.

PROBLEME.

XV.

Déterminer l'Angle $b\ C \beta$ tel que son Angle $\beta\ C\ z$ devienne le plus grand, qu'il est possible.

SOLUTION.

Pour déterminer l'Angle en question, il faut faire $d\varrho = 0$; or ϱ étant exprimé par des constantes, & par la variable B (§. *XIII.*) il faut supposer $dB = 0$, c'est-à-dire, que la différentielle de la quantité $\frac{-\delta bb}{\beta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$, doit être supposée égale à zero, en considérant les lettres m & n comme variables: substituons pour n sa valeur $\sqrt{bb - mm}$ (§. *X.*) nous aurons

$$B = \frac{-\delta bb + 2\beta mm - \beta bb}{\beta m \sqrt{bb - mm}},$$

dont la différentielle devient nulle, en faisant

$$\frac{m}{b} = \sqrt{\frac{\beta + \delta}{2\delta}}.$$

COROLLAIRE.

XVI.

Si β étoit $= \delta$, c'est-à-dire, si les deux Luminaires avoient une force égale, pour mettre la Mer en mouvement, on auroit $m = b$. Mais la Force lunaire étant plus grande que la Force solaire, m devient plus petit que b; cependant l'Angle $bC\beta$ ne deviendra jamais moindre que de 45°.

On remarquera aussi, qu'il y a quatre Points, tels que β, dont deux sont autant éloignés du Point b, que les deux autres le sont du Point d; & que dans ces quatre Points, la haute Marée vient alternativement après & avant le passage de la Lune par le Méridien.

Nous allons voir à présent comme on doit appliquer tout ce que nous venons de dire pour trouver l'heure des Marées, & pour faire voir, combien notre Théorie bien ménagée s'accorde là-dessus avec les Observations.

CHAPITRE VI.

Sur l'heure moyenne des Marées pour toutes les Lunaisons.

I.

On a été de tout tems soigneux à bien remarquer l'heure des hautes & basses Marées, pour établir là-dessus, autant qu'il est possible,

ble, des regles pour l'utilité de la Navigation; & quoi qu'il ſoit impoſſible de donner des regles générales & exactes, on n'a pas laiſſé de continuer ces recherches. Mais je ne ſçache pas qu'on ſe ſoit encore aviſé de raiſonner là-deſſus autrement, que par *induction* ſur un grand nombre d'Obſervations, pendant que c'eſt ici une matiere, qui dépend beaucoup de la Géometrie pour l'eſſentiel, & que ce n'eſt que par rapport à quelques circonſtances, qu'on eſt obligé de recourir aux Obſervations, pour établir des regles: & cela eſt ſi vrai, que la ſeule Théorie m'a fait voir pluſieurs Points, dont je n'étois pas encore inſtruit par la lecture. Voyons donc avant toutes choſes, jusqu'où la Théorie peut aller, pour éclaircir notre ſujet: nous nous attacherons encore aux hypotheſes marquées au XIX. §. du Chap. IV. que je prie le Lecteur de relire. Nous irons enſuite plus loin, & nous examinerons, quelle correction il faudra employer à l'égard de chaque hypotheſe; lorſqu'elle eſt en quelque façon changée.

I I.

Il eſt bon d'avertir ici le Lecteur, lorſque je parlerai des deux Marées qui ſe ſuivent, que j'entends deux Marées pareilles, qui ſe ſuivent au bout de 24. heures, en ſautant la Marée intermediaire; nous éviterons par-là de certaines petites inégalités, qu'on a obſervées, lorſqu'on a comparé enſemble les deux Marées, qui ſe font dans un même jour. Si l'on veut comparer enſemble des Marées, qui ont pluſieurs jours d'intervalle, nous choiſirons celles qui ſe font pendant que la Lune eſt au-deſſus de l'Horiſon.

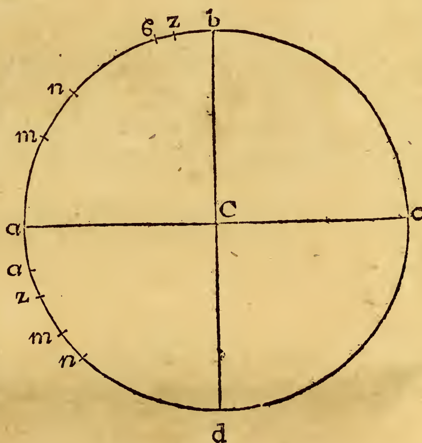
I I I.

Il eſt clair, que ſi la Lune avoit infiniment plus de force que le Soleil, la haute Marée répondroit précisément au paſſage de la Lune par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſeroit d'un jour lunaire précis; & ſi au contraire la Force du Soleil ſurpaſſoit infiniment la Force lunaire, la Marée ſe feroit au moment du paſſage du Soleil par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſeroit préciſément d'un jour ſolaire. Mais comme les deux dites Forces ſont, ſuivant toutes les Obſervations, comparables entre elles, on voit que le vrai tems de la haute Marée doit dépendre du paſſage par le Méridien de l'un & de l'autre Luminaire: mais il aura toujours plus de rapport avec la Lune, qu'avec le Soleil, parce que la Force lunaire eſt, ſans contredit, plus grande que la Force ſolaire. Nous verrons dans la ſuite, qu'il y a quatre ſituations de la Lune, dans leſquelles l'intervalle de deux Marées, qui ſe ſuivent, eſt préciſément d'un jour lunaire; & qu'en

deçà, ou en delà de ces quatre Points, les Marées doivent néceſſairement avancer ou retarder ſur le tems du jour lunaire: nous déterminerons ces accélerations & retardemens, qui ſont fort inégaux, & nous ajoûterons pluſieurs autres Remarques ſur cette matiere, qui l'éclairciront plus que toutes les Obſervations, qu'on a faites juſqu'ici. Il eſt vrai que ces déterminations dépendent du rapport qu'il y a entre les Forces des deux Luminaires, que ce rapport eſt encore incertain, & qu'il eſt même variable : mais j'indiquerai quels ſont les moyens les plus ſûrs, pour le déterminer d'abord dans de certaines circonſtances, & enſuite généralement. Avant que de traiter cette Queſtion, qui eſt une des plus utiles, & des plus eſſentielles, nous déterminerons généralement le vrai tems des hautes & baſſes Marées, en ſuppoſant le rapport entre les forces des deux Luminaires connu.

I V.

Soit *badc* l'Equateur, dans le plan duquel les deux Luminaires ſont encore ſuppoſés ſe mouvoir de *b* vers *a*, pendant que l'Equateur de la Terre ſe tourne dans le même ſens autour de ſon Centre *C*. Prenons dans l'Equateur un Point *b*, & conſidérons les Luminaires ſe trouver dans leur Conjonction au Point *b*, c'eſt-à-dire, étant l'un & l'autre dans la Ligne prolongée *db*; on voit qu'en ce cas la haute Marée doit être dans ce moment-là en *b*, & préciſément à midi.



V.

Voyons à préſent ce qui doit arriver un, deux, trois, &c. jours après: ſuppoſons pour cet effet, que le Soleil ſe trouvant encore à midi au Point *b*, la Lune réponde au Point *ϐ*: la haute Marée répondra dans ce moment au Point *z*, & les Arcs *bz*, *ϐz* ſe déterminent par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. il faut donc que le Point *b* parcoure dans l'Equateur l'Arc *bz*, pour ſe trouver dans l'endroit de la plus haute Marée; car on peut négliger les petits Arcs, que les Luminaires parcourent, dans le tems que le Point *b* de l'Equateur parcourt l'Arc *bz*. On voit donc, que ſi l'on veut regler le tems des hautes Marées

Marées après le tems vrai, on doit prendre l'Arc bz pour l'Arc horaire, qui marque l'heure de la haute Marée de ce jour-là.

Cette regle suppose le Point β en repos, pendant le tems qui convient audit Arc horaire bz; mais il est facile de corriger cette supposition: car nous verrons dans la suite, que l'Arc bz est presque égal à l'Arc $b\beta$; & cela étant, il est clair, qu'on n'a qu'à substituer des heures lunaires aux heures solaires, qui répondent à l'Arc bz, pour corriger la dite supposition.

V I.

Nous venons de montrer, comment on peut déterminer le vrai tems des hautes Marées, en le rapportant au midi, c'est-à-dire, au passage du Soleil par le Méridien: voici à présent, comment on peut déterminer l'heure des hautes Marées, en la rapportant au passage de la Lune par le Méridien, qu'on connoît par les Ephémerides: on peut le faire immédiatement par le moyen de l'Arc βz: nous verrons que le Point z ne sçauroit s'éloigner du Point β au-delà d'environ dix dégrés, qui répond à 40 minutes de tems, pendant lequel cet Arc ne sçauroit varier sensiblement; d'où il suit que ce petit Arc βz marquera toujours l'Arc horaire entre le moment du passage de la Lune par le Méridien & le moment de la haute Marée.

V I I.

L'Arc βz étant tantôt négatif, tantôt affirmatif, comme il paroît par le XIII. Art. du Chap. V. on voit que la haute Marée suivra le passage de la Lune par le Méridien, depuis les Syzygies jusqu'aux Quadratures, & qu'elle le précedera depuis les Quadratures jusqu'aux Syzygies: on voit encore par l'Art. XV. du Chap. V. que l'Arc βz fait un *maximum*, lorsque le Sinus de l'Arc $b\beta$ est $= \sqrt{\frac{\beta+\delta}{2\delta}}$: c'est alors que la haute Marée retarde ou avance le plus sur le passage de la Lune par le Méridien: & comme vers ce tems-là les Points β & z peuvent être censés avoir un mouvement égal, l'intervalle d'une Marée à l'autre, sera alors précisément d'un jour lunaire: & cet intervalle peut être appellé intervalle moyen entre deux Marées qui se suivent: il est de 24. heures $50\frac{1}{2}$ minutes, en prenant 29 jours 12 heures 44 minutes, pour le tems moyen d'une Conjonction à l'autre.

On remarquera encore que l'intervalle d'une Marée à l'autre, est le plus petit dans les Syzygies, & le plus grand dans les Quadratures.

VIII.

Pour déterminer analytiquement les propriétés, que nous venons d'indiquer en gros, nous supposerons, que la Lune répondant au Point m, & la haute Marée étant dans ce moment là au Point n, l'Arc mn soit alors le plus grand qu'il est possible. Soit outre cela encore le Sinus total $= 1$, le Sinus de l'Arc $mb = m$, son Cosinus $= n$. Cela étant, nous avons déja dit, & nous le remarquerons encore ici:



1°. Qu'on aura $m = \sqrt{\frac{\epsilon + \delta}{\delta}}$.

2°. Qu'on peut déterminer la grandeur de l'Arc mn par le moyen du XIII. §. Chap. V. où nous avons démontré, que généralement le Sinus de cet Arc est

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}$$

en supposant $B = \frac{-\delta hb}{\epsilon mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Pour appliquer cette regle générale à notre cas particulier, il faut supposer $b = 1$; $m = \sqrt{\frac{\epsilon + \delta}{2\delta}}$, & $n = \sqrt{\frac{\delta - \epsilon}{2\delta}}$: après ces substitutions, on trouve le Sinus de l'Arc mn $= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\delta\delta - \epsilon\epsilon}}{2\delta}\right)}$; & commme δ est beaucoup plus grand que ϵ, on peut censer le Sinus de l'Arc mn être simplement $= \frac{\epsilon}{2\delta}$.

3°. Qu'on déterminera la grandeur de l'Arc nb, par le moyen du XI. §. du Chap. V. Il est remarquable que cet Arc ne dépend point du rapport, qui est entre la Force lunaire δ, & la Force solaire ϵ; car il est toujours de 45 dégrés.

4°. Que si la Lune est supposée dans un Point quelconque ϵ, les Arcs bz & ϵz peuvent se déterminer par le moyen des XI. & XIII. §. §. du Chap. V. comme nous avons déja dit: mais si l'on suppose le Point ϵ bien près du Point b, nos Formules font voir, qu'on peut censer alors le Sinus de l'Arc $\epsilon z = \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \times m$, & le Sinus du petit Arc $bz = \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \times m$.

Cet-

Cette Formule nous fervira à determiner combien les Marées priment vers les Syzygies.

5°. Que fi la Lune fe trouve en α bien près de a, la haute Marée repondra dans ce moment au Point z au-delà du Point α, & on trouvera par le XIII. Art. du Chap. V. fi l'on traite bien l'équation qui y eft marquée, le Sinus du petit Arc $\alpha z = \frac{\epsilon}{\delta - \epsilon} \times n$, en prenant pour n le Cofinus de l'Arc $b\,\alpha$, ou ce qui revient au même, le Sinus du petit Arc $a\,\alpha$. Cette valeur du petit Arc αz nous fervira à déterminer, combien les Marées retardent vers les Quadratures.

Ces deux dernieres Remarques font fondées fur ce que m ou n, étant comme infiniment petits, les quantités A & B deviennent comme infiniment grandes, & alors on peut fubftituer fimplement $\frac{1}{A}$ & $\frac{1}{B}$ à la place des Quantités

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4 + AA}}\right)} \;\&\; \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}:$$

& après ces fubftitutions, on trouve les Sinus des petits Arcs, comme nous les avons déterminés.

IX.

Toutes ces propriétés, que nous venons d'établir, font tout-à-fait conformes aux Obfervations. Mais pour en fentir toute la force, il faudroit toujours fçavoir le rapport qu'il y a entre les Forces δ & ϵ, & c'eft ce que j'ai déja dit, qu'on ne fçauroit déterminer immédiatement par les principes d'Aftronomie, faute d'Obfervations affez juftes fur la Lune; il faut donc s'en tenir aux effets Phyfiques, que la Lune produit fur la Terre, pour en déduire fa force; & je n'en connois point d'autres, que les Marées mêmes: mais il s'en faut fervir avec beaucoup de circonfpection. Comme c'eft ici un point très-effentiel, je n'ai pas voulu manquer de le confidérer avec toute l'attention qu'il mérite. Voici mes reflexions là-deffus.

X.

On pourroit déduire le rapport moyen entre les Forces δ & ϵ du rapport des plus hautes Marées, qui fe font près des Syzygies, & des plus petites Marées aux Quadratures. Car on voit par le VIII. §. Chap. V. que la hauteur de la plus grande Marée doit être à celle de la plus petite Marée, comme $\delta + \epsilon$ eft à $\delta - \epsilon$. Mais les hauteurs des Marées dans les Ports, où l'on fait les Obfervations, dépendent de tant de circonftances, qu'elles ne peuvent être tout-à-fait proportionelles aux hauteurs des Marées dans la Mer libre; & c'eft ce qui fait, qu'on

 trou-

trouve le rapport moyen entre les plus grandes & les plus petites Marées, affez différent dans différents Ports.

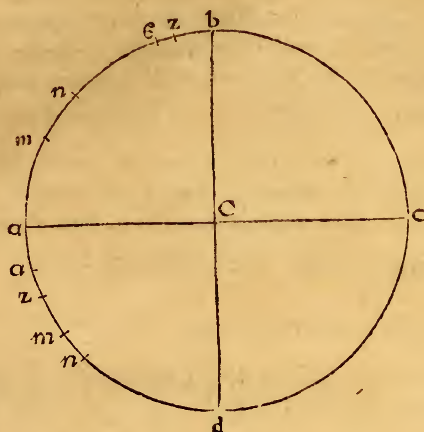
M. Newton, qui a fuivi cette Méthode, rapporte une Obfervation faite par Sturm au-deffous de Briftol, où cet Auteur a trouvé que les hauteurs de la plus grande & de la plus petite Marée, ont été, comme 9 à 5, d'où il faudroit conclure, que $\delta = 3\frac{1}{2} \times \beta$. Cette Obfervation eft bien éloignée de celle que j'ai reçûe dernierement faite à Saint Malo par M. Thouroud. La voici: «Dans les grandiffimes Marées, la Mer «s'éleve de 50 pieds en plomb au-deffus du bas de l'eau: dans les Ma«rées bâtardes, elle ne différe que de quinze pieds.» Si j'ai bien compris cette Obfervation, la plus grande Marée étoit à la plus petite, comme 50 à 15, ou comme 10 à 3; ce qui donneroit $\delta = \frac{13}{7} \times \beta$. Ces deux refultans font bien différens: il eft vrai, que le rapport de δ à β eft variable; mais cette variation ne fçauroit aller fi loin; fi la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\beta}$ eft $= m$, la plus grande valeur de $\frac{\delta}{\beta}$ fera environ $= \frac{3}{2} m$.

Il y a une autre refléxion à faire fur cette Méthode de trouver le rapport entre les Forces des deux Luminaires: c'eft que les Marées font une efpece d'Ofcillations, qui fe reffentent toujours des Ofcillations précedentes: cette raifon fait que les variations des Marées, ne fçauroient être auffi grandes qu'elles devroient être, fuivant les Loix hydroftatiques. Concevons un pendule attaché à une Horloge animée fucceffivement par des poids différens: On fçait, que plus ces poids font grands, plus les Ofcillations du pendule deviennent grandes: mais en changeant les poids, les premieres Ofcillations ne prendront pas d'abord leur grandeur naturelle; elles ne s'en approchent que peu à peu. Il n'en eft pas de même des durées des Ofcillations, lorfque le pendule eft fucceffivement animé par différentes péfanteurs. Confidérons d'abord un pendule fimple animé par la péfanteur ordinaire, & qui faffe fes Ofcillations dans deux fecondes de tems, & fuppofons enfuite la péfanteur devenir tout d'un coup quatre fois plus grande; je dis que la premiere Ofcillation, qui fuivra ce changement, fe fera de même que toutes les autres fuivantes dans une feconde de tems.

Cette confidération me porte à croire, que les Obfervations fur les durées & fur les intervalles des Marées font plus fûres pour notre deffein, que les hauteurs des Marées: fi cette refléxion eft bien fondée, on pourroit faire attention aux Méthodes fuivantes, pour trouver le rapport moyen entre δ & β.

1°. Il faudroit pendant plufieurs mois obferver, quel eft le plus petit intervalle de deux Marées. Nous avons dit au VI. §. que l'intervalle moyen eft d'un jour moyen lunaire, que je fuppofe de 24 heures 50 minutes: mais il fera moindre dans les Syzygies; quoique plus grand qu'un

qu'un jour solaire, ou de 24 heures : supposons ce plus petit intervalle de 24 heures, & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités dans N; &



il faudra prendre dans la Figure ci-dessus un Arc horaire $b\epsilon$ de 50 minutes de tems : De cet Arc $b\epsilon$, il faut prendre une partie ϵz, qui réponde à $(50-N)$ minutes. Or par la IV. Remarque du VII. §. l'Arc ϵz est à l'Arc $b\epsilon$, comme $\frac{\epsilon+\delta}{\epsilon}\times m$ est à m: d'où nous tirons cette analogie,

$$50-N : 50 :: \epsilon : \epsilon+\delta;$$

& cette analogie donne

$$\delta = \frac{N}{50-N}\times\epsilon.$$

Soit N égal à 35 (c'est ainsi qu'on l'observe à peu près dans les Marées regulieres) & on aura $\delta = \frac{35}{15}\epsilon$.

2°. On pourroit aussi faire attention aux plus grands intervalles ; si ce plus grand intervalle (qui se fait ordinairement après les Quadratures) étoit de 24 heures & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités en M. On trouve par la même Méthode, que nous venons d'indiquer, & par la V. Remarque du VII. §. $\delta = \frac{M}{M-50}\times\epsilon.$

Soit $M = 85$ minutes (c'est à peu près la valeur que l'on observe) & on trouvera

$$\delta = \frac{85}{35}\times\epsilon.$$

Voilà les deux Méthodes, que je crois les plus exactes ; & la premiere doit l'emporter sur la seconde, parce que les Marées sont plus irrégulieres après les Quadratures, qu'après les Syzygies. Il y a encore plu-

pluſieurs autres Méthodes pareilles à celles que je viens d'expoſer, & dont j'ai fait en partie le Calcul; mais comme je ne ſuis pas aſſez content des Obſervations, ſur leſquelles ces Méthodes ſont fondées, je ne les mettrai pas ici. Je me contenterai de dire, qu'après tous les examens que j'ai faits, j'ai trouvé, que pour accorder, autant qu'il eſt poſſible, toutes les Obſervations qui déterminent le rapport entre δ & ϵ, il faut ſuppoſer la valeur moyenne de $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$; la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\epsilon} = 2$, & ſa plus grande valeur $= 3$. C'eſt donc ſur ces ſuppoſitions que nous raiſonnerons & calculerons dans la ſuite; & comme nous ne conſidérons encore toutes les circonſtances variables, que dans leur état moyen, nous ferons dans tout le reſte de ce Chapitre $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$.

M. Newton ſuppoſe $\frac{\delta}{\epsilon}$ environ $= 4$: mais j'ai déja dit, pourquoi ſa Méthode doit indiquer la valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}$ plus grande qu'elle n'eſt: la raiſon en eſt, que ſi les Marées, n'avoient point d'influence les unes ſur les autres, comme elles ont, les plus grandes Marées différeroient davantage des plus petites, & par là on trouveroit la valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}$ plus petite.

Avant que de finir cette digreſſion ſur le rapport entre la ſorce de la Lune, & celle du Soleil, & d'en faire l'application à notre ſujet, je ferai ici une refléxion ſur les Forces abſolues de la Lune & du Soleil. Nous avons fait voir aux §. §. VIII. & XV. du Ch. IV. que dans l'hypotheſe de l'homogenéïté de la Terre adoptée par M. Newton, le Soleil ne ſçauroit faire varier les eaux au-delà de deux pieds, ni par conſéquent la Lune au-delà de cinq pieds. Ces deux Forces combinées enſemble pour les Quadratures feroient une Force abſolue à faire varier les eaux en pleine Mer de trois pieds de hauteur verticale pendant une Marée. Mais peut-on comprendre, que d'une variation de trois pieds en pleine Mer, il puiſſe provenir tous les effets des Marés aux Quadratures? Encore eſt-il très-vraiſemblable, que la variation actuelle des eaux differe beaucoup de la variation entiere, que la Théorie *indique* comme poſſible: peut-être même, que la variation actuelle eſt à peine ſenſible par rapport à l'autre, & cela non-ſeulement à cauſe des empêchemens accidentels, tel que le frottement, l'imparfaite fluidité, &c.; mais encore à cauſe de l'inertie des eaux & du mouvement journalier de la Terre; car on voit bien, que ſi ce mouvement journalier de la Terre étoit d'une viteſſe infinie, les Luminaires ne pourroient avoir aucun effet pour faire varier la Mer, quelque Force qu'ils euſſent. Je ſuis donc entierement perſuadé, que les Forces abſolues des deux Luminaires ſont beaucoup plus grandes, que M. Newton ne les ſuppoſe, & tous

ſes Commentateurs après lui, prenant l'homogenéité de la Terre, pour une hypotheſe, ſur laquelle ils bâtiſſent tout leur Syſtême. Ces refléxions doivent donner beaucoup de poids à tout ce que nous avons dit au Chap. IV. où nous avons démontré, qu'en ſuppoſant, que les Denſités des Couches de la Terre augmentent depuis la circonférence vers le centre (ſuppoſition d'ailleurs extrêmement probable par pluſieurs raiſons Phyſiques, dont j'ai expoſé une partie au XIII. §. du Chap. IV.) on peut augmenter, tant qu'on veut, les effets de la Lune & du Soleil ſur la Terre. Après cet examen ſur les Forces, tant relatives, qu'abſolues des deux Luminaires, nous allons en faire uſage, pour conſidérer de plus près tout ce qui regarde la durée des Marées, leurs intervalles, & pour faire voir le merveilleux accord entre la Théorie & les Obſervations.

X I.

Les intervalles de deux Marées qui ſe ſuivent, ſont les plus petits dans le tems des Syzygies: leur intervalle moyen eſt alors de 24 heures 35 minutes, & les Marées priment chaque jour de 15 minutes ſur le mouvement de la Lune.

X I I.

Les intervalles de deux Marées qui ſe ſuivent, ſont les plus grands dans le tems des Qnadratures: ils ſont alors de 24 heures 85 minutes, c'eſt-à-dire, de 25 heures 25 minutes: les Marées retardent de 35 minutes par jour ſur le mouvement de la Lune. Cette grande inégalité doit rendre l'heure des Marées plus incertaine & plus irréguliere que dans les Syzygies; & c'eſt auſſi ce que l'on obſerve: mais ce n'eſt pas la ſeule raiſon.

X I I I.

Les Marées répondront préciſément au paſſage de la Lune par le Méridien, tant dans les Quadratures, que dans les Syzygies, ſi celles-ci ſe font auſſi au moment du paſſage de la Lune par le Méridien. Mais ſi les Quadratures & les Syzygies ne ſe font pas dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien, il faut des corrections. Dans les Syzygies, il faut une correction de 15 minutes pour un jour entier en vertu du XI. §. & par conſéquent $\frac{5}{8}$ de minutes par heure, que la haute Marée avancera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Syzygies ſe font avant ce même paſſage; & que la haute Marée retardera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Syzygies ſe font après ce paſſage. Dans les Quadratures il faut une correction de 35 minutes par jour, en vertu du §. XII. c'eſt-à-dire, environ une minute

& demie par heure, que la haute Marée retardera sur le passage de la Lune par le Méridien, si les Quadratures se font avant ledit passage; & qu'elle avancera, si les Quadratures se font après le passage de la Lune par le Méridien. Car près des points *b* & *a*, les Arcs βz & αz^1 peuvent être censés proportionnels aux Arcs $b\beta$ & $a\alpha$.

X I V.

Si au lieu de rapporter les hautes Marées aux jours lunaires, on vouloit considérer les jours solaires, on voit bien qu'il faut dire, que les hautes Marées, au lieu de primer de 15 minutes dans les Syzygies, retardent de 35. minutes dans un jour, ou d'environ une minute & demie par heure; & qu'elles retardent de 85 minutes par jour dans les Quadratures, ce qui fait environ trois minutes & demie par heure: de là nous tirerons cette regle pour les Syzygies.

Il faut ajoûter à l'heure moyenne de la Marée dans les Syzygies une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies auront devancé ladite heure moyenne, & en retrancher une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies retarderont sur la même heure moyenne.

Et pour les Quadratures nous aurons la regle suivante:

Il faut ajoûter, ou retrancher, dans les Quadratures de l'heure moyenne de la Marée, trois minutes & demie par chaque heure, que les Quadratures avanceront ou retarderont sur la même heure moyenne.

X V.

M. Cassini, dont les remarques ingénieuses sur les Marées m'ont servi de guide dans mes recherches, a donné par induction des regles pareilles, avec cette différence que dans les Syzygies, il a mis deux minutes par heure, au lieu d'une minute & demie; & deux minutes & demie dans les Quadratures, au lieu de trois minutes & demie.

X V I.

Enfin nous remarquerons, que l'intervalle moyen de deux Marées qui se suivent, lequel intervalle est de 24 heures lunaires, ou 24 heures 50 minutes, n'est pas également éloigné des Syzygies & des Quadratures; mais qu'il est beaucoup plus près des Quadratures, que des Syzygies: aussi pouvoit-on le prévoir facilement; car comme toutes les accélerations depuis le Point *b* jusqu'au Point *m* (qui est celui, dont il est question ici) doivent compenser tous les retardemens depuis le Point *m* jusqu'au Point *a*, & que les accélerations sont beaucoup plus petites

que

que les retardemens, on voit d'abord, que le Point *m* doit être plus près du Point *a*, que du Point *b*. Mais nous déterminerons exactement ce point *m* par le moyen de la premiere Remarque du VIII. §. où nous avons démontré que le Sinus de l'Arc *mb* eſt $= \sqrt{\frac{\varsigma + \delta}{2\delta}} = \sqrt{\frac{7}{10}} = 0,8366$ lequel Sinus répond à un Arc de 56^{d}. 47^{m}. L'Arc *mb* étant donc de 56^{d}. 47^{m}., l'Arc *ma* ſera de 33^{d}. 13^{m}., & les deux Arcs *mb* & *ma* ſont comme 3407 à 1993.

L'Arc *nb* étant toujours de 45 dégrés (*par la III. Remarque du VIII. §.*) nous avons l'Arc *mn* = 11^{d}. 47^{m}.; & cet Arc *mn* marque le plus grand intervalle poſſible entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée. Cet intervalle eſt donc de 47 minutes de tems: le paſſage de la Lune par le Méridien ſuivra la haute Marée depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & la précédera depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies. Mais le plus grand intervalle de l'un à l'autre (qui ſe fait environ 2 $\frac{3}{4}$ jours avant & après les Quadratures) ne ſurpaſſe jamais 47 minutes de tems.

XVII.

Toutes ces Propoſitions depuis le XI. §. juſqu'ici, nous donnent une idée claire des heures des hautes Marées, & de toutes leurs variations pour chaque âge de la Lune. Car, quoi-que nos démonſtrations ſoyent fort hypothetiques, elles n'en méritent pas moins d'attention; je ferai voir dans le Chapitre ſuivant, comment on peut donner des corrections aſſez juſtes à l'égard de toutes les hypotheſes que j'ai expoſées au XIX. §. du Chap. IV. Mais pour donner toute la perfection qui eſt poſſible, à cette matiere, je montrerai plus préciſément, comment on peut trouver l'intervalle entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée, pour tout Arc donné entre les deux Luminaires; après quoi je donnerai une Table, que j'ai pris la peine de calculer de dix en dix dégrés. Il ſera facile après cela moyennant les Ephémerides & des Interpolations, de déterminer l'heure des Marées généralement.

XVIII.

Soit donc encore le Soleil en *b*; la Lune dans un Point quelconque *m*: la haute Marée en *n*. Soit le Sinus de l'Arc *mb* = *m*: le Sinus total = 1, le Coſinus de l'Arc *mb* = *n*: qu'on faſſe (§. *XIII. Chap. V.*).

$$B = \frac{-\delta bb}{\varsigma mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{4mm-7}{2mn};$$

on

on aura le Sinus de l'Arc *m n* (qui eſt l'Arc horaire entre le paſſage de la Lune par le Méridien & la haute Marée)

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}.$$

Si l'on change cette Quantité radicale en ſuites, en faiſant attention que *B* eſt toujours un nombre négatif beaucoup plus grand que l'unité, on verra qu'on peut, ſans aucune erreur ſenſible, ſuppoſer le Sinus de l'Arc horaire $mn = \frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$, & même ſimplement $= \frac{1}{B}$ près des Syzygies & des Quadratures. Voici à préſent la Table dont je viens de parler.

La *premiere* Colonne marque de dix en dix Dégrés l'Angle compris entre les deux Luminaires vûs du centre de la Terre environ l'heure de la Marée : la *ſeconde* marque le nombre de minutes, qu'il faut retrancher depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & ajoûter depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies à l'heure du paſſage de la Lune par le Méridien, pour trouver l'heure de la Marée; & la *troiſiéme* marque la vraie heure de la haute Marée.



TABLE FONDAMENTALE

pour trouver l'heure moyenne des hautes Marées.

Distances entre les deux Luminaires en Dégrés.	*Tems de la haute Mer avant & après le passage de la Lune par le Méridien.*	*Heure de la haute Mer.*	
o Dégrés.	o Minutes.	o Heur.	o Min.
10	11½ avant.	0	28½
20	22 avant.	0	58
30	31½ avant.	1	28½
40	40 avant.	2	0
50	45 avant.	2	35
60	46½ avant.	3	13½
70	40½ avant.	3	59½
80	25 avant.	4	55
90	0	6	0
100	25 après.	7	5
110	40½ après.	8	0½
120	46½ après.	8	46½
130	45 après.	9	25
140	40 après.	10	0
150	31½ après.	10	31½
160	22 après.	11	2
170	11½ après.	11	31½
180	0	12	0

XIX.

La Table que nous venons de donner, détermine généralement l'heure des hautes Mers pour les hypotheſes expoſées au XIX. §. Chap. IV. s'il eſt vrai que la raiſon moyenne entre les Forces de la Lune & du Soleil, ſoit comme 5 à 2. Je la crois à-peu-près telle, après avoir bien examiné toutes les Obſervations qui peuvent la déterminer: cependant, comme ces Obſervations ne ſont ni aſſez juſtes, ni en aſſez grand nombre, pour s'y fier entierement, je ne la donne pas encore pour tout-à-fait exacte : il eſt pourtant certain, que cette Table ne ſçauroit manquer d'avoir toute l'exactitude néceſſaire, les Marées étant ſujettes à pluſieurs irrégularités, dont on ne ſçauroit donner aucune meſure, & qui ſont de beaucoup plus grande conſéquence, que tout ce qu'il y a encore d'incertain dans la Table. Nous allons examiner avec quelles précautions & corrections on doit s'en ſervir.

CHAPITRE VII.

Qui contient à l'égard de pluſieurs Circonſtances variables, les Corrections néceſſaires pour les Théoremes & pour la Table du Chapitre précedent, & une Explication de pluſieurs Obſervations faites ſur les Marées.

I.

LEs Vents & les Courants irréguliers contribuent le plus à rendre les Marées incertaines & irrégulieres. Ils accéléreront & augmenteront le Flux, ou le retarderont & le diminueront, ſelon qu'ils ont une direction commune ou contraire avec le Flux naturel des eaux. Mais on voit bien qu'il faut ſe contenter de ces effets, & qu'il eſt difficile & même impoſſible d'en marquer le détail, ou des meſures préciſes.

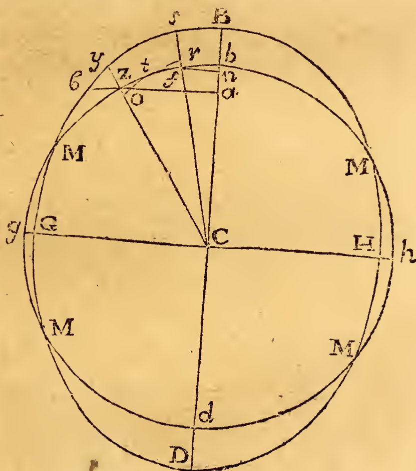
II.

La ſeconde circonſtance qui fait varier les Marées, eſt la ſituation du Port, ſa profondeur, ſa communication avec la Mer libre, la pente de ſon fonds & des environs, &c. Tout cela fait qu'il eſt impoſſible de marquer l'heure abſoluë des Marées dans les Ports, ou Bayes, ou Côtes differemment ſituées. Mais comme toutes circonſtances demeurent toujours les mêmes, on peut ſuppoſer qu'elles font le même effet ſur toutes les Marées; ſçachant donc combien la Marée eſt retardée dans les Syzygies, on la ſçaura auſſi à-peu-près dans toutes les autres ſituations

tuations de la Lune. Cette ſuppoſition eſt la ſeule reſſource qui nous reſte: j'avoue même qu'elle doit être fort peu exacte pour les différentes déclinaiſons des deux Luminaires à l'égard de l'Equateur: il n'eſt pas vraiſemblable non plus, qu'elle ſoit également juſte pour les grandes Marées dans les Syzygies, & pour les Marées bâtardes dans les Quadratures. Mais avec tout cela, on ne doit pas la rejetter, pluſieurs Obſervations m'ayant fait voir, que moyennant cette correction, le cours des Marées répond aſſez bien à la Théorie. Il faut donc ſçavoir par un grand nombre d'Obſervations pour chaque endroit l'heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, & ajoûter cette heure au tems marqué dans la ſeconde & troiſiéme Colonne de notre Table: c'eſt cette heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, que les Mariniers appellent *heure du Port*: elle varient extrêmement dans les différens Ports, comprenant tout le tems & durée d'une Marée.

I I I.

Ce retard de l'heure moyenne des pleines Mers dans les Syzygies, à l'égard du midi, s'obſerve auſſi dans la Mer libre, ou plutôt dans les Iſles qui ſont en pleine Mer: mais il n'eſt pas ſi grand, & vient d'une autre cauſe, ſçavoir de l'inertie des eaux, qui les empêche d'obéir aſſez promptement, à cauſe de la viteſſe du mouvement journalier de la Terre. On peut appliquer ici tout le raiſonnement que nous avons fait au VI. §. du Chap. III. pour expliquer la nutation de la Lune en longitude: On pourroit douter, ſi cette raiſon doit faire avancer ou retarder les Marées: Suppoſons donc, pour nous en éclaircir, que, tant les Luminaires, que la haute Marée, répondent à un même Point dans cette Figure: comme le mouvement des Luminaires n'eſt pas ſenſible, par rapport au mouvement journalier de la Terre, nous les conſidérerons comme demeurant dans la ligne db: l'Equateur de la Terre changera ſa figure naturelle $bgdh$ en $BGDH$; & cette figure $BGDH$ tournant autour du Centre C de B vers G, le ſommet B viendra quelque tems après en y: cela étant, ſi les eaux pouvoient ſe compoſer dans un inſtant dans un état d'équilibre, l'élevation Bb devroit ſe changer en yz, & la force qui devroit produire ce changement, ſeroit exprimée par $Bb-yz$: mais cette force étant infiniment petite, ſi l'Angle BCy

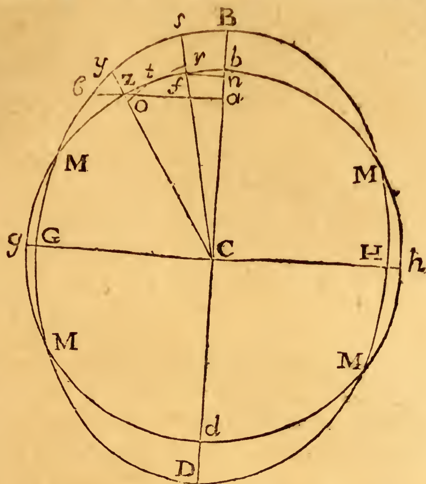


eſt infiniment petit, elle ne ſçauroit produire tout ſon effet. On voit par-là, qu'il faut ſuppoſer l'Angle *B Cy* d'une grandeur conſidérable, & conſidérer enſuite le ſommet *B* comme tranſporté en *y*, afin que la différence des preſſions ſoit aſſez grande, pour conſerver le ſommet des eaux au Point *y*, malgré la rotation du Globe. Le vrai ſommet étant donc en *y*, l'Angle *B Cy* ſera l'Angle horaire, qui marquera les retardemens réels des hautes Marées ſur le paſſage de la Lune par le Méridien. Là-deſſus nous pourrons faire les Remarques qui ſuivent.

1°. Si les Luminaires ne ſont pas en conjonction, & que le Soleil ſoit en *b*, & la Lune en *ϐ* on pourra conſidérer la choſe, comme ſi les Luminaires étoient en conjonction, mais dans la Ligne *Cz*, déterminée de poſition au VIII. §. du Chap. V. & augmenter toujours l'Angle *b C z* de l'Angle *B Cy*, dont nous venons de parler : d'où il paroit que l'Angle horaire *Bcy* doit toujours être ajoûté au tems marqué dans la troiſiéme Colonne de notre précedente Table : car la hauteur des Marées ne paroît pas devoir changer la choſe, puiſque les changemens de preſſion pour un petit tems donné, ſont proportionnels aux baiſſemens des eaux, qui doivent ſe faire pour conſerver le ſommet des eaux dans un même Point *y*.

2°. Si le mouvement journalier de la Terre étoit infiniment lent; l'Angle *B Cy* ſeroit nul : mais il doit être plus grand, d'autant qu'on ſuppoſe le mouvement journalier plus grand & plus prompt ; & la différence des hauteurs entre les hautes & baſſes Marées, doit diminuer à proportion.

3°. Si la viteſſe du mouvement journalier étoit comme infinie, la pleine Mer répondroit preſque au Point *G*; mais auſſi la différence des hautes & baſſes Mers ſeroit comme nulle. Il me ſemble après avoir bien conſidéré la choſe, que les hauteurs des Marées dans les Syzygies doivent être cenſées proportionnelles aux Sinus des Angles *G Cy* dans la Mer libre, & que ſi la hauteur *B b* ſans le mouvement journalier de la Terre eſt $= \beta$, elle ſera avec le mouvement journalier de la Terre $= \frac{C\alpha}{C b} \times \beta$. Or, comme on a obſervé, que dans la Mer libre la haute Marée ſuit environ de deux heures le midi dans les Syzygies ; il faut ſuppoſer l'Angle



gle BCy de 30 dégrés, & les forces absolues des Luminaires doivent être supposées plus grandes en raison de $\sqrt{3}$ à 2 pour élever les eaux, autant qu'elles le seroient sans le mouvement journalier de la Terre.

I V.

Nous avons encore fait voir, que sans le concours des causes secondes, les plus grandes Marées devroient se faire dans les Syzygies, & les plus petites dans les Quadratures. Cependant on a observé, que les unes & les autres se font un ou deux jours plus tard. Ce retardement est encore produit, sinon pour le tout, au moins en partie, par l'inertie des eaux, qui doivent être mises en mouvement, & qui ne sçauroient obéïr assez promptement aux forces qui les sollicitent, pour leur faire suivre les loix que ces forces demanderoient. Il y a peut-être encore une autre cause, & M. Cassini me paroit le soupçonner de même, quoi qu'il ne se serve pas de nos principes, la voici: c'est qu'il se pourroit bien que cette cause, qui nous est encore si cachée, & qui donne une tendance mutuelle aux Corps flottans & composans le systême du monde, que cette cause, dis-je, ne se communiquât pas dans un instant d'un Corps à l'autre, non plus que la lumiere. S'il y avoit, par exemple, un Torrent central de matiere subtile, & d'une étendue infinie, vers le centre de la Terre, & un semblable vers le centre de la Lune, ces deux Torrens pourroient produire la Gravitation mutuelle de ces deux Corps; & la vitesse du premier pourroit être telle, qu'il fallût un ou deux jours à la matiere, pour parvenir depuis la Lune jusqu'à la Terre: en ce cas on voit bien que l'effet de la force lunaire sur nôtre Océan, seroit le même, qu'il auroit été un ou deux jours auparavant dans la supposition que la Gravitation se communique dans un instant. Quoi qu'il en soit, comme ce retardement a été observé le même à-peu-près après les Syzygies & après les Quadratures, nous pouvons encore supposer, qu'il est le même, pendant toute la revolution de la Lune, c'est-à-dire, que les Marées sont toujours telles, qu'elles devroient être, sans lesdites causes, un ou deux jours auparavant.

Au reste je n'ai mis ici ce que je viens de dire sur la cause qui pourroit produire la Gravitation mutuelle des Corps du Systême du Monde (Gravitation, qu'il n'est plus permis de revoquer en doute) que comme

un exemple: je ne prétens pas expliquer ce Phénomene, j'avoue même, qu'il m'eſt encore tout-à-fait incompréhenſible : je ne crois pas non plus que l'ACADEMIE en ait voulu demander une explication; je ſouhaiterois donc qu'on remarquât que ceux qui voudroient ſe ſervir d'autres principes, pour expliquer le Flux & Reflux de la Mer, ne le feroient qu'en apparence, & que tout ce qu'ils pourroient alleguer ne feroient que des efforts d'expliquer mécaniquement la Gravitation ou l'Attraction mutuelle du Soleil, de la Lune & de la Terre, ſans diſconvenir pour cela de nos principes au fond, leſquels ſont ſûrs, & doivent être conſidérés comme des faits averés par l'expérience.

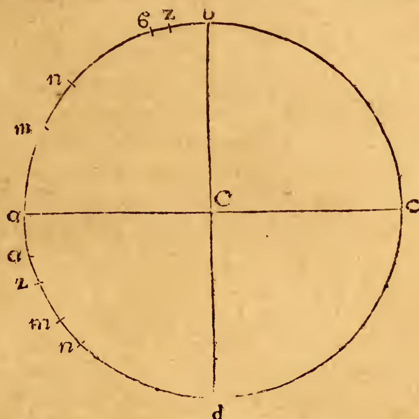
V.

Je profiterai de cette occaſion, pour parler d'un des principaux Phénomenes, & pour répondre à une objection, qu'on pourroit nous faire là-deſſus, & dont l'éclairciſſement me paroît très-propre pour faire voir l'avantage de notre Méthode & de nos Calculs.

On a déterminé après un nombre infini d'Obſervations, que dans les Syzygies l'heure moyenne de la haute Mer eſt à Breſt à 3 heures 28 minutes, & dans les Quadratures à 8 heures 40 minutes; & que la différence n'eſt que de 5. heures 12. minutes depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures. Cette différence a été obſervée tout-à-fait la même à Dunkerque, & dans d'autres Ports; quoique les heures des Marées ſoient différentes aux divers Ports. C'eſt donc ici une Obſervation qui mérite beaucoup d'attention, comme génerale & bien averée: cependant il eſt certain, que ſans les cauſes ſecondes, que nous avons déja indiquées, la différence entre les heures du Port pour les Syzygies; & pour les Quadratures, devroit être à-peu-près de 6 heures lunaires, c'eſt-à-dire d'environ 6 heures 12 minutes. Voici comment je détermine exactement cet intervalle.

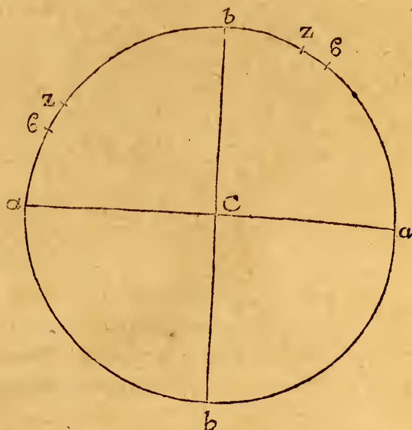
L'heure moyenne de la haute Mer dans les Syzygies, eſt dans la Théorie pure préciſément à midi, puiſqu'il faut conſiderer les Syzygies, comme tombant préciſément ſur l'heure du midi. Si les Syzygies ſe faiſoient plus tard, la haute Mer arriveroit plus tôt & reciproquement; & les accélerations compenſent parfaitement les retardemens après un grand nombre d'obſervations. L'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, doit être de même cenſée celle qui ſe fait, lorſque la Quadrature ſe fait préciſément à midi; car, lorſqu'il eſt queſtion d'un certain jour, il en faut prendre le milieu, c'eſt-à-dire l'heure du midi, afin que les différences ſe détruiſent ou ſe compenſent les unes les autres. Soit donc le Soleil au Zenith *b*, & la Lune en *a* à 90 dégrés du Zenith, ou à l'Horiſon: cela étant, on voit que ſi la haute Mer eſt ſuppoſé ſe faire préciſément au moment du paſſage de la Lune par le Méridien,

ridien, elle doit se faire 6 heures lunaires après midi ; car le Point *b* doit faire, par le mouvement journalier de la Terre, l'Arc horaire *b a α* (supposant que le passage de la Lune par le Méridien, qui a été à l'heure du midi en *b*, réponde au Point *α*) ; mais pour parler plus précisément, la Lune & le Méridien se trouvant en *α*, la haute Marée répondra au Point z', & l'Arc *α z* sera égal aux deux tiers du petit Arc *a α* (§. *XIII. Chap. VI.*) c'est donc l'Arc *b a z'* qui marque l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures : l'Arc *b a* est



de 90 dégrés ; le petit Arc *a α* est d'environ 3. dégrés, & l'Arc *α z'* de 2 dégrés, & par conséquent l'Arc *b a z'* de 95 dégrés, qui donne un tems de 6 heures 20 minutes, qui devroit être *in abstracto* l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, pendant que celle des Syzygies est à midi. D'où vient donc, me demandera-t-on, que, suivant les Observations, on ne trouve que 5. heures 12 minutes à la place de 6 heures 20. minutes. Je répons que c'est cette même anticipation des Syzygies & des Quadratures à l'égard des plus grandes & des plus petites Marées, dont nous avons parlé dans le précedent Article, qui en est la cause. Il est si vrai, que c'est ici la véritable raison, que la quantité de cette anticipation répond parfaitement bien à l'intervalle des heures moyennes des hautes Mers pour les Syzygies & les Quadratures. Nous en pourrons même déterminer plus exactement ladite anticipation, sur laquelle on est encore bien divisé, les uns la faisant d'un jour, d'autres de deux, pendant qu'on a déterminé assez exactement, & d'un commun accord l'autre Point.

Prenons d'abord le terme de deux jours, comme le plus généralement adopté, en considérant que les Marées se reglent après les Luminaires, tels qu'ils ont été deux jours auparavant : imaginons-nous les Syzy-



Syzygies se faire en *b* & les Quadratures en *b* & *a* : l'effet des Luminaires sera, en vertu de notre supposition, dans le tems des Syzygies, comme si le Soleil étoit en *b*, & la Lune en ϐ, en prenant l'Arc *b*ϐ d'environ $25\frac{1}{4}$ dégrés; & le même effet dans les Quadratures sera comme si le Soleil étant en *b*, la Lune se trouvoit en ϐ¹ environ $64\frac{3}{4}$ dégrés; dans les Syzygies, la haute Mer répond au Point z, & dans les Quadratures au Point z¹. C'est donc l'Arc z*b*z¹ qui exprime l'Arc horaire entre l'heure moyenne de la haute Mer des Syzygies & celle des Quadratures (substituant toutefois des heures lunaires à la place des heures ordinaires, à cause du mouvement de la Lune.) Or la Table mise à la fin du précedent Chapitre, fait voir par le moyen des interpolations, que la Lune étant avant les Syzygies à $25\frac{1}{4}$ dégrés du Soleil, l'heure de la haute Mer est à 10 heures 46. minutes du matin; & que la Lune étant après les Syzygies à $64\frac{3}{4}$ dégrés du Soleil, la haute Mer se fait à 3 heures 35 minutes du soir: l'intervalle est donc de 4 heures 49 min. tems lunaire, ou d'environ 5 heures, tems ordinaire. Ce resultat répond déja assez bien à l'Observation, qui le donne de 5. heures 12. minutes.

Mais si au lieu de deux jours on prend $\frac{8}{5}$ jours, ou environ 59 heures, qui répond à-peu-près à 20 dégrés de distance de la Lune depuis les Syzygies & les Quadratures, l'heure moyenne de la haute Mer le jour des Syzygies, sera en vertu de la Table, à 11 heures 2 minutes du matin, & le jour des Quadratures, à 3 heures $59\frac{1}{2}$ minutes du soir; & l'intervalle de l'une à l'autre sera de 4. heures $57\frac{1}{2}$ minutes tems lunaire, qui fait à-peu-près 5 heures 8 minutes. Et enfin on trouve une conformité exacte entre les deux points en question, en donnant un jour & demi au retardement des Marées, c'est-à-dire, en supposant que l'état des Marées est tel qu'il devroit être naturellement, un jour & demi plutôt: c'est alors que l'intervalle de l'heure moyenne de la pleine Mer aux Syzygies à heures pareilles aux Quadratures, devient de 5 heures 12 minutes, tel qu'un grand nombre d'Observations l'a donné: aussi ce terme d'un jour & demi, est-ce celui qui est le plus conforme aux Observations, & en consultant les Tables qui sont dans les Me-

Memoires de l'Académie de l'année 1710. pag. 330. & 332. & prenant la différence moyenne, on trouve fort à-peu-près la même valeur. Toutes ces circonstances, l'explication naturelle de ce Phénomene, sa conformité avec toutes les Observations faites jusqu'ici, & son usage pour déterminer au juste un des points des plus essentiels, qu'on n'a connu encore que par tatonnement, font bien voir la justesse & la supériorité de nos Méthodes. *

V I.

Les autres corrections que l'on doit apporter aux Formules & à la Table du précedent Chapitre, regardent l'hypothese que nous avons faite, pour rendre d'abord la Question & les Calculs plus faciles; sçavoir *que les deux Luminaires font des Cercles parfaits autour de la Terre, & cela dans le plan de l'Equateur.* Cette supposition entraîne celle d'une égalité parfaite dans les distances des Luminaires à la Terre, aussi-bien que dans leur mouvement, & elle fait outre cela leur déclinaison, à l'égard de l'Equateur, nulle. Voyons donc à présent ce que les différentes distances, l'inégalité des vitesses & l'obliquité des orbites peuvent faire sur l'heure des Marées.

V I I.

Les différentes distances des deux Luminaires à l'egard de la Terre changent le rapport de leurs forces sur la Mer; & c'est cependant de ce rapport que dépendent presque toutes les Propositions du précedent Chapitre. Nous avons supposé ce rapport pour les distances moyennes de la Lune & du Soleil, comme 5 à 2, fondés sur un grand nombre d'Observations, qui doivent nous confirmer dans cette supposition, à l'égard des variations des distances, après avoir remarqué & démontré la Proposition qui suit:

Les Forces de chaque Luminaire sur la Mer sont en raison reciproque triplée de leurs distances à la Terre.

En voici la Démonstration. Nous avons dit & démontré au Chapitre quatriéme, que la Force de chaque Luminaire est généralement $= \frac{ngb}{Ga} \times b$ en entendant par n un nombre constant par $\frac{G}{g}$ le rapport de la pésanteur dans la region de la Terre vers le Luminaire à la pésanteur qui se fait vers le centre de la Terre, & par $\frac{b}{a}$ le rapport du rayon de la Ter-

* Je vois après avoir fini cette Piece, que M. Cassini a deja indiqué ce que nôtre Remarque contient de Physique. Voy. les Mem. de l'Ac. des Sc. de 1714. p. 252.

Terre *b* à la distance du Luminaire *a*: or comme les différentes distances ne changent que les quantités *G* & *a*, nous voyons que la Force de chaque Luminaire est constamment proportionelle à $\frac{g}{a}$, & la quantité *g*, qui exprime la pésanteur vers le centre du Luminaire, étant reciproquement proportionnelle aux quarrés des Distances *a*, il s'ensuit que les Forces de chaque Luminaire sur la Mer, sont en raison reciproque triplée de leurs Distances à la Terre.

M. Newton a déja démontré cette Proposition, qui se confirme aussi par toutes les Observations faites sur les Marées, quand on en fait une juste estime, & une application bien ménagée. La Proposition que nous venons de démontrer, nous enseigne qu'à la place de notre Equation fondamentale $\delta = \frac{5}{2}\beta$, employée dans le Chapitre précedent, il faut se servir de celle-ci plus générale

$$\delta = \frac{5}{2} \times \frac{l^3}{L^3} \times \frac{S^3}{s^3} \times \beta.$$

en dénotant par *l* & *s* les distances moyennes de la Lune & du Soleil à la Terre, & par *L* & *S* leurs Distances données quelconques; & là-dessus on pourra calculer toutes les Questions traitées ci-dessus pour des Distances quelconques entre les Luminaires & la Terre: mais nous ne considérerons que deux cas, 1°. Lorsque la Lune étant dans son Périgée, & la Terre dans son Aphelie, le rapport de δ à β devient le plus grand; & 2°. Lorsque la Lune étant au contraire dans son Apogée, & la Terre dans son Perihelie, le rapport de δ à β devient le plus petit. Nous donnerons 1000 parties à la distance moyenne de la Lune, 1055 à sa plus grande distance, & 945 à sa plus petite distance; & pour le Soleil, nous poserons les pareilles distances être en raison de 1000, 1027 & 983: & nous aurons pour le *premier* cas $\delta = 3{,}115\ \beta$; & dans le *second* cas $\delta = 2{,}022\ \beta$.

Comme il ne s'agit ici que des petites corrections, nous supposerons simplement pour le premier cas $\delta = 3\beta$, & pour le second $\delta = 2\beta$; & afin que nos regles soient d'autant plus faciles dans l'application, nous n'aurons point d'égard aux variations du Soleil, comme n'étant presque d'aucune importance par rapport à celles de la Lune. Disons donc simplement, que dans le Perigée de la Lune, il faut mettre $\delta = 3\beta$, & dans l'Apogée $\delta = 2\beta$. Celà étant, voici les conséquences que nous en tirons.

1°. Un jour & demi après les Syzygies, l'intervalle de deux Marées qui se suivent, est dans le Périgée de 24 heures $27\frac{1}{2}$ minutes; & dans l'Apogée de 24 heures 33 minutes.

2°. Un jour & demi après les Quadratures, le même intervalle est dans le Perigée de 25 heures 15 minutes; & dans l'Apogée de 25 heures

heures 40 minutes. Voyez à l'égard de ces deux Propositions le §. VII. du Chap. VI.

3°. Le plus grand intervalle entre le passage de la Lune par le Méridien & la haute Mer (que nous avons vû au XVI. §. du Chap. VI. devoir se faire environ $2\frac{1}{4}$ jours avant & après les Quadratures, sans nos corrections, mais qui sera réellement environ $1\frac{1}{4}$ jours avant, & $4\frac{1}{4}$ après les Quadratures) est de 39 minutes environ le Perigée de la Lune, & d'une heure environ son Apogée. Ce plus grand intervalle se fait aussi plutôt dans le Perigée, & plus tard dans l'Apogée; la différence est d'environ un demi jour.

4°. Pour calculer la Table pareille à celle de ci-dessus, mais qui serve pour le Perigée & pour l'Apogée de la Lune, nous remarquerons que les Sinus des petits Arcs horaires, qui marquent les intervalles entre le passage de la Lune & la haute Mer sont toujours

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}$$

& qu'à la place de cette quantité, on peut substituer la valeur fort approchante $\frac{1}{B}-\frac{3}{2B^3}$ (§. *XVIII. Chap. VI.*) & même qu'on peut négliger ici, sans le moindre scrupule, le second terme, puisqu'il ne s'agit que de petites corrections. Nous considérerons donc ces petits Arcs horaires, comme reciproquement proportionnels aux quantités B, c'est-à-dire, aux quantités $\frac{-\delta bb}{\epsilon mn}+\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$. Et dans cette derniere quantité, nous pourrons encore rejetter sans peine les deux derniers termes pour notre present dessein, & dire par conséquent, que pour les différentes valeurs de $\frac{\delta}{\epsilon}$, tout le reste étant égal, les intervalles entre le passage de la Lune, & la haute Marée sont reciproquement proportionnels aux valeurs de $\frac{\delta}{\epsilon}$, ou directement proportionnels aux valeurs de $\frac{\epsilon}{\delta}$. D'où il paroît que les nombres de la seconde Colonne de notre précedente Table, doivent être multipliés par la Fraction $\frac{5}{6}$ dans le Perigée, & par $\frac{5}{4}$ dans l'Apogée de la Lune, après quoi les nombres de la troisiéme Colonne se déterminent comme dans la précedente Table. Mais quant aux nombres de la premiere Colonne, il faut les augmenter chacun d'environ 20 dégrés, à cause du retard d'un jour & demi expliqué au long dans ce Chapitre, pendant lequel la Lune change de place à l'égard du Soleil d'environ 19 dégrés, à la place desquels je mettrai un nombre rond de 20 dégrés.

Voici donc à present une Table corrigée à l'égard de toutes les cir-

 cons-

constances exposées jusqu'ici. La premiere Colonne marque la distance qui est entre le Soleil & la Lune, environ le tems de la haute Mer, ou plutôt ici, environ le passage de la Lune par le Méridien. Les trois Colonnes suivantes marquent le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le Méridien, & la haute Mer pour le Perigée, pour les Distances moyennes & pour l'Apogée de la Lune. Et les trois dernieres marquent les heures absolues des hautes Mers pour les Perigées, les Distances moyennes & les Apogées de la Lune. Et pour se servir de cette Table, il ne faudra plus qu'ajoûter aux nombres des six dernieres Colonnes l'heure moyenne du Port en vertu du III. §. La Table n'a été calculée que de dix en dix dégrés: les interpolations suppléeront avec assez de justesse à telle autre Distance entre les deux Luminaires, que les Ephémérides indiqueront. La même méthode des interpolations peut aussi être employée, lorsque la Lune se trouve à une Distance donnée de son Apogée ou Perigée.



TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGE'E pour trouver l'heure des hautes Marées.

Distances entre les Luminaires au moment du passage de la Lune par le Meridien.	*Tems de la haute Mer avant & après le passage de la Lune par le Meridien en minutes de tems.*			*Table approchante des heures de la haute Mer, dont on peut se servir au défaut des Ephémérides, qui marquent le passage de la Lune par le Méridien.*		
	Perigée de la Lune.	*Distance moyenne de la Lune.*	*Apogée de la Lune.*	*Perigée de la Lune.* H. M.	*Distance moyenne de la Lune.* H. M.	*Apogée de la Lune.* H. M.
0	18 après.	22 après.	$27\frac{1}{2}$ après.	0 18	0 22	0 $27\frac{1}{2}$
10	$9\frac{1}{2}$ après.	$11\frac{1}{2}$ après.	14 après.	0 $49\frac{1}{2}$	0 $51\frac{1}{2}$	0 54
20	0	0	0	1 20	1 20	1 20
30	$9\frac{1}{2}$ avant.	$11\frac{1}{2}$ avant.	14 avant.	1 $50\frac{1}{2}$	1 $48\frac{1}{2}$	1 46
40	18 avant.	22 avant.	$27\frac{1}{2}$ avant.	2 22	2 18	2 $12\frac{1}{2}$
50	26 avant.	$31\frac{1}{2}$ avant.	$39\frac{1}{2}$ avant.	2 54	2 $48\frac{1}{2}$	2 $40\frac{1}{2}$
60	33 avant.	40 avant.	50 avant.	3 27	3 20	3 10
70	$37\frac{1}{2}$ avant.	45 avant.	56 avant.	4 $2\frac{1}{2}$	3 55	3 44
80	$38\frac{1}{2}$ avant.	$46\frac{1}{2}$ avant.	58 avant.	4 $41\frac{1}{2}$	4 $33\frac{1}{2}$	4 22
90	$33\frac{1}{2}$ avant.	$40\frac{1}{2}$ avant.	$50\frac{1}{2}$ avant.	5 $26\frac{1}{2}$	5 $19\frac{1}{2}$	5 $9\frac{1}{2}$
100	21 avant.	25 avant.	31 avant.	6 39	6 15	6 9
110	0	0	0	7 20	7 20	7 20
120	21 apres.	25. après.	31 après.	8 21	8 25	8 31
130	$33\frac{1}{2}$ après.	$40\frac{1}{2}$ après.	$50\frac{1}{2}$ après.	9 $13\frac{1}{2}$	9 $20\frac{1}{2}$	9 $30\frac{1}{2}$
140	$38\frac{1}{2}$ après.	$46\frac{1}{2}$ après.	58 après.	9 $58\frac{1}{2}$	10 $6\frac{1}{2}$	10 18
150	$37\frac{1}{2}$ après.	45 après.	56 après.	10 $37\frac{1}{2}$	10 45	10 56
160	33 après.	40 après.	50 après.	11 13	11 20	11 30
170	26 après.	$31\frac{1}{2}$ après.	$39\frac{1}{2}$ après.	11 46	11 $51\frac{1}{2}$	11 $59\frac{1}{2}$
180	18 après.	22 après.	$27\frac{1}{2}$ après.	0 18	0 22	0 $27\frac{1}{2}$

Cette Table suppose encore le plan des Orbites de la Lune & du Soleil être le même que celui de l'Equateur de la Terre, ce qu'il faut sur-tout remarquer à l'égard des trois dernieres Colonnes. Mais cette supposition n'a pas beaucoup d'influence sur les autres Colonnes; & les Ephémerides, qui marquent le passage de la Lune par le Méridien, suppléeront aux trois dernieres.

VIII.

Après avoir exposé au long tout ce que les différentes distances des Luminaires, & sur-tout de la Lune à la Terre, peuvent contribuer pour faire varier l'heure des Marées, nous dirons aussi un mot sur l'inégalité du mouvement des Luminaires.

Cette inégalité seroit d'une très-grande importance, s'il falloit construire une Table pour les heures des Marées, sans se rapporter aux Tables & aux Ephémerides : mais elle ne nous est d'aucune conséquence, puisque nous supposons l'heure du passage de la Lune par le Méridien, aussi-bien que l'Arc compris entre les deux Luminaires, connus par les Ephémerides. C'est la raison qui m'a engagé à rapporter l'heure des Marées au passage de la Lune par le Méridien, en donnant une Table, qui marque, combien la premiere avance ou retarde sur l'autre.

IX.

Il nous reste à considérer les inclinaisons des Orbites à l'égard de l'Equateur: pour cet effet il faut concevoir un Cercle qui passe par les centres du Soleil, de la Lune & de la Terre; & c'est proprement ce Cercle que doivent représenter toutes nos Figures, que nous avons considérées jusqu'ici, comme représentant l'Equateur de la Terre. On voit bien après cela, que tous les Points resteront dans ce Cercle aux mêmes endroits; & que les Arcs se conserveront tels, que nous les avons déterminés: mais les Angles horaires formés sur l'Equateur par ses Arcs, en sont changés. On ne sçauroit sans une Théorie parfaite de la Lune déterminer au juste ces Angles horaires, à cause de la variabilité de *l'inclinaison* de l'Orbite lunaire à l'égard de l'Equateur; mais aussi ce changement n'est-il pas fort considérable, par rapport à l'Arc horaire compris entre le passage de la Lune par le Méridien, & le moment de la haute Mer; nous supposerons, & nous pouvons le faire ici sans aucune erreur sensible, que les Orbites de la Lune & du Soleil sont dans un même plan, ayant chacune une inclinaison avec l'Equateur de $23^{d}.\ 30^{m}.$ & nous considérerons là-dessus la Lune dans trois sortes de situation: 1°. Lorsque sa déclinaison, à l'égard de l'Equateur, est nulle; & alors il

il faut multiplier les nombres de la seconde, troisiéme & quatriéme Colonnes de notre Table par $\frac{92}{100}$, & ce qui proviendra marquera le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le Méridien, & l'heure de la haute Mer. 2°. Lorsque la Lune se trouve dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'Equateur ; & alors il faut multiplier lesdits nombres de notre Table par $\frac{100}{92}$. Et enfin 3°. lorsque la Lune se trouve au milieu de ces deux situations ; auquel cas il faut se servir de notre Table, sans y apporter aucun changement. Quant aux autres situations de la Lune en longitude, on peut se servir du principe de la proportionalité de la différence des termes. Ces regles sont fondées sur la proportion qu'il y a entre les petits Arcs de l'Ecliptique & de l'Equateur, compris entre deux mêmes Méridiens fort proches l'un de l'autre.

X.

Il suit de tout ce que nous venons de dire, que le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le Méridien & la haute Marée, est environ un jour avant les Quadratures, & quatre jours après les Quadratures, la Lune dans son Apogée & dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'Equateur de la Terre ; & que dans le concours de toutes ces circonstances, ledit plus grand intervalle peut aller jusqu'à 63 minutes de tems, que la haute Marée avancera sur le passage de la Lune par le Méridien un jour avant les Quadratures, & qu'elle retardera quatre jours après les Quadratures.

X I.

Voilà mes refléxions sur le tems des Marées ; je me flatte qu'elles ont toute la précision qu'on peut esperer sur cette matiere, du moins quant à la Méthode. Toute l'incertitude qui y reste encore, est fondée sur le rapport moyen entre les forces de la Lune & du Soleil, que je crois pourtant avoir fort bien déterminé, puisque tous nos Théoremes conviennent si bien avec les Observations. Un plus grand nombre d'Observations nous donnera peut-être un jour plus de précision là-dessus. Il est vrai que nous n'avons déterminé l'heure & les intervalles des Marées, que sous la Ligne Equinoctiale ; mais je ne crois pas que la latitude des lieux puisse changer sensiblement les intervalles des Marées : ainsi je n'ai pas jugé nécessaire d'en parler. La latitude des lieux a cependant beaucoup de liaison avec la hauteur des Marées : c'est à quoi nous ferons attention dans la suite.

CHA-

CHAPITRE VIII.

Sur les différentes hauteurs des Marées pour chaque jour de la Lune.

I.

JE me propoſe à préſent d'examiner les diverſités des hauteurs des Marées, non d'un endroit à l'autre, mais d'un même endroit, que nous ſuppoſerons d'abord pris ſous l'Equateur, pour toutes les diverſes circonſtances qui peuvent ſe rencontrer, Nous ſuivrons, pour cet effet; la même Methode que nous avons obſervée pour déterminer généralement l'heure des Marées, c'eſt-à-dire, que nous commencerons nos recherches par les cas les plus ſimples, pour ne pas être arrêtés tout court en voulant ſurmonter trop de difficultés à la fois : nous nous ſervirons donc d'abord des mêmes hypotheſes que nous avons employées dans le Chap. VI. & que nous avons expoſées à la fin du Chap. IV. après quoi nous pouſſerons nos recherches dans le Chapitre ſuivant à tous les cas poſſibles, tout comme nous avons fait dans le Chapitre précedent pour déterminer généralement l'heure des Marées.

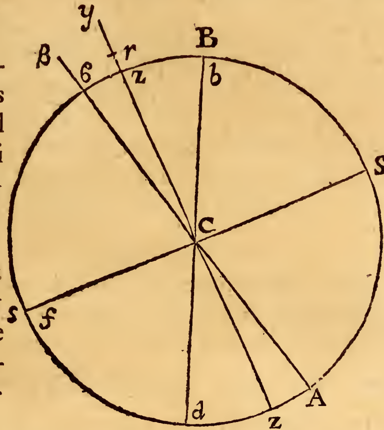
II.

J'entens par hauteur d'une Marée toute la variation de la hauteur verticale des eaux, depuis la haute Mer juſqu'à la baſſe Mer ſuivante. Pour trouver cette hauteur, il faut d'abord faire attention aux §. §. XI. XII. & XIII. du Chap. V. qui déterminent l'Equateur, les lieux de la Lune & du Soleil étant donnés, la poſition des deux points auſquels la Mer eſt la plus haute & la plus baſſe; après quoi le VIII. Art. du même Chapitre donnera la hauteur cherchée, en cherchant premierement la hauteur de la haute Mer, & enſuite la hauteur de la baſſe Mer.

III.

Remarquons d'abord, que les deux points de la Circonférence, qui marquent la haute & la baſſe Mer, ſont éloignés entre eux de 90 dégrés. On le voit par les expreſſions des §. §. XI. & XIII. & nous l'avons démontré dans la premiere Remarque du §. XII. Chap. V. Suppoſant donc le Soleil répondre au Point b, la Lune au Point β, & que la haute Mer réponde au Point z, il faut prendre l'Arc zs de 90 dégrés,

grés, & le Point s sera celui qui répond à la basse Mer. Cherchez donc par le VIII. §. du Chap. V. la valeur de yz, qui marque l'élevation des eaux pour le Point z; & ensuite prenez de la même maniere la valeur de sx, qui étant négative, marque la dépression des eaux; cela étant fait, on voit que la somme de yz & de sx marquera la hauteur de la Marée; mais dans l'expression analytique de sx, il faut changer les Signes. Il est vrai que cette Methode suppose, que pendant l'intervalle, depuis la haute Mer jusqu'à la basse Mer, la Lune ne change pas de place; & c'est à quoi on pourroit avoir égard, en augmentant d'environ trois dégrés l'Arc $b\beta$ dans le Calcul de sx: mais ce seroit une exactitude hors de place, & qui augmenteroit beaucoup les peines du Calcul, qui n'est déja que trop embarassé. On pourra même remedier à ce petit défaut, déja insensible par sa nature, en prenant l'Arc $b\beta$, tel qu'il est, non au moment de la haute Marée, ni à celui de la basse Mer, mais au milieu de leur intervalle; & c'est ce que nous supposerons dans la suite.



Soit donc comme dans le V. Chap. le Sinus de l'Arc $b\beta = m$; son Cosinus $= n$; le Sinus de l'Angle $bCz = \sigma$; le Sinus de l'Angle $\beta Cz = \varrho$; le Sinus total $= b$; & nous aurons en vertu du §. VIII. Chap. V.

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{2bb - 3\varrho\varrho}{3bb} \times \delta.$$

De là on trouvera sx en vertu du §. XII. Chap. V. en mettant $bb - \sigma\sigma$, & $bb - \varrho\varrho$ à la place de $\sigma\sigma$ & de $\varrho\varrho$: & de cette façon on aura

$$sx = \frac{3\sigma\sigma - bb}{3bb} \times \beta + \frac{3\varrho\varrho - bb}{3bb} \times \delta.$$

Changez à present les Signes dans la valeur de sx, & supposez la hauteur de la Marée $= M$, & vous aurez

$$M = \frac{bb - 2\sigma\sigma}{bb} \times \beta + \frac{bb - 2\varrho\varrho}{bb} \times \delta.$$

Cette derniere expression marque généralement la hauteur des Marées, puisqu'on peut toujours déterminer les valeurs de $\sigma\sigma$ & $\varrho\varrho$ par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. Mais les Calculs ne laissent pas d'être assez pénibles, quoi-que les Formules ne soient pas prolixes. Nous tâcherons donc

donc de rendre ces Calculs plus faciles, ſans déroger beaucoup à l'exactitude des Formules.

I V.

Voyons donc d'abord ce qui arriveroit, ſi la Force lunaire étoit infiniment plus grande que la Force ſolaire. On auroit en ce cas $\varrho = 0$ & $\sigma = m$,

$$M = \rho + \delta - \frac{2mm}{bb} \times \rho,$$

laquelle Formule ne ſçauroit manquer d'être aſſez approchante ; elle donne même la juſte valeur pour les Syzygies & pour les Quadratures.

V.

Pour déterminer les hauteurs des Marées plus exactement encore, nous conſidérerons la valeur de ϱ comme fort petite, au lieu de la ſuppoſer tout-à-fait nulle, comme nous l'avons fait dans l'Article précedent : mais nous pourrons ſuppoſer hardiment $\varrho = \frac{\rho m n}{\delta}$, & on verra que cette ſuppoſition ne ſçauroit s'éloigner beaucoup de la vérité, ſi l'on conſulte l'Article VII. du précedent Chapitre vers la fin, & le peu d'erreur qui pourroit s'y trouver, n'eſt preſque d'aucune conſéquence pour notre préſent ſujet. On voit outre cela, que ϱ étant fort petit, on peut ſuppoſer cette Analogie

$$\varrho : m - \sigma :: b : n ;$$

puiſque cette Analogie ſeroit exactement vraie, ſi les quantités ϱ & $m - \sigma$ étoient réellement & infiniment petites : de cette Analogie on tire

$$\sigma = m - \frac{n\varrho}{b} = m - \frac{mnn\rho}{b\delta};$$

ſubſtituant ces valeurs expoſées pour les quantités ϱ & σ, & faiſant le Sinus total $b = 1$, on obtient cette Equation,

$$M = \rho + \delta - 2mm\rho + \frac{2m^2n^2\rho\rho}{\delta} - \frac{2m^2n^4\rho^3}{\delta\delta}.$$

De cette maniere il paroit que les Marées décroiſſent depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & qu'elles croiſſent avec la même *loi* depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies. Ceux qui voudront eſſayer la juſte Equation du §. III. & cette Equation approchante, ſur un même exemple, verront qu'elles ne different gueres.

V I.

Il nous ſera facile à préſent de calculer & de donner une Table pour les hauteurs des Marées, telle que nous en avons donné une à la fin du Chap. VI. pour les heures des Marées, & pour laquelle nous tâcherons

rons dans le Chapitre ſuivant de trouver les corrections néceſſaites aux différentes circonſtances, tout comme nous avons fait à l'égard de ladite Table du VI. Chap. Nous ſuppoſerons encore le rapport moyen de δ à ϵ être comme 5 à 2, tant que nous n'avons pas des Obſervations qui puiſſent déterminer ce rapport au juſte. Nous donnerons mille parties à la hauteur de la plus grande Marée.

La *premiere* Colonne marquera dans cette Table de dix en dix dégrés les Arcs compris entre les deux Luminaires, environ le milieu des Juſans (§. III.) c'eſt-à-dire, environ trois heures après le paſſage de la Lune par le Méridien; la *ſeconde* Colonne donnera les hauteurs cherchées des Marées, pour les ſuſdites hypotheſes; & la *troiſiéme* en marquera les différences.



TABLE FONDAMENTALE

pour trouver les Hauteurs des Marées, ou les Descentes verticales des eaux pendant les Jusans.

Distance entre les Luminaires en Dégrés.	*HAUTEUR DES MARÉES.*	*DIFFERENCE DES HAUTEURS.*
0 Dégrés.	1000 Parties.	
10	987	− 13
20	949	− 38
30	887	− 62
40	806	− 81
50	715	− 91
60	610	− 105
70	518	− 92
80	453	− 65
90	429	− 24
100	453	+ 24
110	518	+ 65
120	610	+ 92
130	715	+ 105
140	806	+ 91
150	887	+ 81
160	949	+ 62
170	987	+ 38
180	1000.	+ 13

VII.

Si on avoit voulu conſtruire cette Table conformément à l'Equation finale du §. III. qui eſt la vraie Equation, on auroit pu profiter de la Table du VI. Chap. dans laquelle les nombres de la ſeconde Colonne diviſés par 4, donnent les dégrés de l'Arc, dont le Sinus eſt appellé ρ; après quoi on connoît auſſi l'Arc dont le Sinus eſt appellé σ. Connoiſnoiſſant ainſi par les Tables les quantités ρ & σ, on trouve ſans beaucoup de peine la valeur de *M* du §. III.

VIII.

On voit auſſi, que ſi la diſtance entre les deux Luminaires eſt entre deux nombres de la premiere Colonne, on peut ſans aucune erreur ſenſible employer le principe général des Interpolations, de ſorte que cette Table peut ſuffire pour tous les cas.

IX.

On remarquera au reſte, qu'il eſt ici de grande importance d'avoir ſubſtitué la vraie valeur pour $\frac{\delta}{\delta}$, & qu'un aſſez petit changement dans cette valeur, a une grande influence ſur le rapport des Marées. On ne doit donc encore conſidérer cette Table, que comme un exemple de nos Formules générales : le Chapitre ſuivant fera voir les précautions que l'on doit prendre là-deſſus.

X.

Nous voyons tant par les Formules que nous avons données pour les hauteurs des Marées, que par la précedente Table, qu'elle eſt *in abſtracto* la nature des variations des Marées. On peut faire là-deſſus les Remarques qui ſuivent.

1°. Que les changemens des Marées ſont fort petits, tant aux Syzygies qu'aux Quadratures, & ils ſeroient infiniment plus petits que les autres, ſi l'intervalle d'une Marée à l'autre étoit auſſi infiniment petit.

2°. Que les plus grands changemens ne ſe font pas préciſément au milieu, mais plus près des Quadratures que des Syzygies : c'eſt-à-dire, que la plus grande diminution de Marée ſe fait dans nos ſuppoſitions, lorſque la Lune eſt environ à 60 dégrés (80 avec la correction de 20 dégrés expliquée au Chap. VII.) depuis les Syzygies; le plus grand décroiſſement ſe fait donc de la neuviéme à la dixiéme Marée (de

la douziéme à la treiziéme avec la correction) : de même le plus grand accroissement se fait à environ 30 dégrés depuis les Quadratures (50 dégrés avec la correction) qui répond au changement de la quatriéme à la cinquiéme Marée (de la septiéme à la huitiéme avec la correction) depuis les Quadratures. Je parle dans cette Remarque de toutes les Marées qui se font, tant celles du matin, que celles du soir, pour rendre leurs intervalles plus petits : on se souviendra cependant de ce que j'ai dit expressément, que je fais abstraction par-tout ailleurs des Marées, qui répondent au passage inférieur de la Lune par le Méridien, lorsqu'il s'agit de comparer les Marées entre elles : car ces deux sortes de Marées ont quelques inégalités entre elles, que je n'ai pas encore considérées.

3°. Que les petits changemens dans les Syzygies, & ceux des Quadratures, comparés entre eux, sont inégaux ; puisque ceux-ci sont environ doubles de ceux-là. Dans l'application de cette Remarque il faudra ajoûter, de part & d'autre, trois Marées, ou environ un jour & demi de tems.

4°. Que le plus grand changement de deux Marées qui se suivent, entre celles qui répondent à la Lune de dessus (dont l'intervalle répond à environ 13 degrés de variation dans la distance de la Lune au Soleil) fait près du quart de la variation totale de la plus grande à la plus petite Marée.

XI.

Je ne doute pas que les Observations ne confirment en gros les Remarques que je viens de faire, & toutes les Regles précedentes. On ne sçauroit plus douter de la Théorie que nous avons adoptée & établie; & la Théorie posée, les Calculs en sont sûrs. Mais comme nous ne sommes pas encore sûrs des hypotheses secondes, qu'on ne sçauroit éviter, telles que sont le juste rapport entre la force lunaire & solaire, que nous avons supposé comme 5 à 2; le retardement des effets de la Lune sur sa position, que nous avons supposé d'un jour & demi, ou de trois Marées, ou de 20 dégrés, que la Lune peut parcourir en longitude pendant ce retardement, &c. nous nous croyons en droit de demander quelque indulgence pour le resultat desdites Remarques & Regles. Cependant comme je n'ai fait aucune supposition sans un mur examen fondé sur les plus justes Observations choisies entre toutes celles qui peuvent les déterminer, j'oserois me flatter d'un assez bon succès, si Messieurs les ACADEMICIENS vouloient se donner la peine de confronter nos Tables, nos Regles & nos Théoremes nouveaux avec les Observations, dont ils ont un grand Trésor : mais ce succès, dont je me flatte par avance, se manifestera davantage, si ils veulent encore faire attention aux correc-

corrections que je vais donner dans le Chapitre ſuivant, à l'égard de diverſes circonſtances variables, & que nous avons ſuppoſées dans ce Chapitre comme conſtamment les mêmes.

CHAPITRE IX.

Sur les Hauteurs des Marées corrigées, ſuivant differentes circonſtances variables.

I.

NOus ſuivrons dans cet examen la même route que nous avons tenuë dans le VII. Chap. à l'égard du tems des Marées. Pour commencer donc par l'effet des Vents & des Courants, on voit bien qu'ils peuvent augmenter & diminuer les Marées, & que ces variations ne ſont pas d'une nature à pouvoir être aucunement déterminées. On pourra pourtant remarquer que lorſque ces cauſes conſervent pendant un tems un peu conſidérable leur force & leur direction, leur effet conſiſtera plûtôt à hauſſer ou baiſſer la Mer elle-même, qu'à augmenter ou diminuer les Marées.

II.

Les circonſtances attachées à chaque Port ou autre endroit en particulier, telles que ſont ſa ſituation, la profondeur des eaux, la pente des fonds, la communication avec l'Océan, &c., font extrêmement varier les Marées. Ce ſont ces cauſes qui font que les grandes Marées ne ſont que d'un petit nombre de pieds dans de certains endroits de 8 ou 10 pieds dans d'autres, & de 50 à 60 pieds, & au-delà encore dans d'autres endroits. Ce qu'il y a de ſingulier, eſt que dans la Mer libre les grandes Marées ne ſont que d'environ 8 pieds, pendant qu'elle vont au-delà de 50 pieds dans pluſieurs Ports & autres endroits, dont la communication avec la Mer ouverte, eſt entrecoupée & empêchée de tous côtés; & qui par conſéquent devroient, ſelon les premieres apparences, avoir les Marées moins grandes. Nous donnerons dans un autre Chapitre la raiſon hydroſtatique de ce Phénomene, pour ne point nous écarter de notre ſujet préſent. Cela fait d'abord voir, qu'on ne ſçauroit rien déterminer ſur les grandeurs abſoluës des Marées, & que tout ce que la Théorie pourroit encore faire, ſeroit d'en marquer le rapport: mais l'expérienee nous enſeigne encore, que ce rapport même n'eſt pas conſtant dans les différens endroits, quoi qu'il ſoit renfermé dans des bornes plus étroites.

La

La grande Marée sera double de la petite Marée dans un endroit; & elle pourra être triple dans un autre: c'est que les causes qui font varier les hauteurs absoluës des Marées à l'égard de différens endroits, ne gardent pas une proportion tout-à-fait constante. Mais les Marées moyennes entre la plus grande & la plus petite pendant une même revolution de la Lune, peuvent être censées observer les regles que nous leur avons prescrites dans le Chapitre précedent. Il y a même apparence, que les changemens qui dépendent de la différente situation des Luminaires observeront à-peu-près les Loix que nous avons démontrées *in abstracto.* Ces refléxions m'ont déterminé à considérer la plus grande & la plus petite Marée, non telles qu'elles devroient être dans la Théorie pure, mais telles qu'on les observe, lorsque les Luminaires se trouvent à peu près dans l'Equateur, & dans leurs distances moyennes à la Terre, sans qu'aucune cause accidentelle les trouble. Nous avons démontré au III. §. du Chap. VIII. que la hauteur de la grande Marée doit être exprimée par $\delta + \epsilon$, & la hauteur de la petite Marée par $\delta - \epsilon$: mais si l'on suppose la hauteur moyenne réelle de la grande Marée A & de la petite Marée B, il faudra suivant cette correction faire

$$\delta + \epsilon = A, \; \& \; \delta - \epsilon = B:$$

c'est-à dire,
$$\delta = \frac{A+B}{2}, \; \& \; \epsilon = \frac{A-B}{2};$$

& ces valeurs doivent être substituées dans les Equations & Formules du Chapitre précedent. En supposant $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$ comme nous avons fait, on obtient $\frac{A}{B} = \frac{7}{3}$, & si cette raison étoit confirmée par les Observations, il n'y auroit aucun changement à faire. On pourroit se servir de la Table, telle qu'elle est, en donnant toujours 1000 parties à la hauteur de la grande Marée. Mais si $\frac{A}{B}$ avoit réellement une autre valeur considérablement différente de celle que nous venons de lui assigner, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons d'indiquer.

L'on voit aussi après ces considérations, qu'on ne doit pas *s'attendre* à pouvoir déterminer avec la derniere précision les hauteurs des Marées. Nous pourrons donc sans scrupule, pour rendre nos Propositions plus nettes & plus sensibles, nous servir de l'équation du §. IV. Chap VIII. qui aussi-bien approche beaucoup de la vraie équation de l'Article qui précéde l'autre. Nous supposerons donc la hauteur des Marées toujours exprimée par $\delta + \epsilon - 2mm\epsilon$, & employant la correction indiquée, nous aurons à présent

$$M = A - mmA + mmB, \text{ ou plus simplement,}$$
$$M = nnA + mmB:$$

C'est

C'eſt donc de cette derniere équation, que nous nous ſervirons dans la ſuite de cette Diſſertation.

III.

Cette correction pourra en même tems remédier à un autre inconvenient, qui provient de l'inertie & de la Maſſe des eaux. Nous avons déja dit ailleurs que les Marées ſont une eſpéce d'oſcillations qui tâchent naturellement à ſe conſerver telles qu'elles ſont : on ſent bien que cette raiſon doit empêcher les grandes Marées d'atteindre toute leur hauteur, & les petites de diminuer autant qu'elles devroient faire naturellement : qu'elle ne doit pas changer ſenſiblement la Marée moyenne entre la plus grande & la plus petite, & qu'elle change les autres d'autant plus qu'elles ſont plus éloignées de cette Marée moyenne. Et on voit que notre correction ſatisfait à toutes ces trois conditions.

IV.

Après ladite correction qui regarde immédiatement les hauteurs des Marées, il faut encore employer celle qui regarde les tems, que nous déterminons par les Phaſes de la Lune, ou par les diſtances, qui ſont entre les Luminaires. Nous avons expliqué au long aux §. §. IV. & V. du Chap. VII. que les Phaſes de la Lune qui répondent aux Marées en queſtion, ne doivent pas être priſes telles qu'elles ſont, mais telles qu'elles ſeroient environ un jour & demi après, c'eſt-à-dire, que les diſtances entre les Luminaires doivent être augmentées d'environ 20 dégrés, & moyennant cette correction, la Théorie ne ſçauroit manquer de ſatisfaire au juſte aux Obſervations.

V.

Nous n'avons conſidéré juſqu'ici les Luminaires, que dans leurs diſtances moyennes à la Terre, & c'eſt pour ce cas que nous avons appellé la hauteur de la plus grande Marée A, & celle de la plus petite Marée B. Pour déterminer donc ce que les différentes diſtances peuvent faire ſur les hauteurs des Marées, il faudra ſe rappeller tout l'Art. VII. du Chap. VII. Nous y avons démontré, que la force lunaire doit être ſuppoſée généralement $= \frac{l^3}{L^3} \times \delta$, & la Force ſolaire $= \frac{s^3}{S^3} \times \varepsilon$. Or comme la ſomme de ces Forces exprime toujours la hauteur de la grande Marée, & que la différence des mêmes Forces exprime la hauteur de la petite Marée, il faudra faire ces deux Analogies :

$$\delta+\varepsilon : \frac{l^3}{L^3}\times\delta+\frac{s^3}{S^3}\times\varepsilon :: A : \frac{l^3S^3\delta+L^3s^3\varepsilon}{L^3S^3(\delta+\varepsilon)}\times A$$

$$\delta-\varepsilon : \frac{l^3}{L^3}\times\delta-\frac{s^3}{S^3}\times\varepsilon :: B : \frac{l^3S^3\delta-L^3s^3\varepsilon}{L^3S^3(\delta-\varepsilon)}\times B.$$

La premiere de ces quatriémes proportionnelles marquera donc la hauteur corrigée de la grande Marée, & la ſeconde, la hauteur corrigée de la petite Marée. Par conſéquent l'équation finale du II. §. ſera celle-ci après ſa correction:

$$M=\frac{l^3S^3\delta+L^3s^3\varepsilon}{L^3S^3(\delta+\varepsilon)}\times nnA+\frac{l^3S^3\delta-L^3s^3\varepsilon}{L^3S^3(\delta-\varepsilon)}\times mmB.$$

Je m'aſſure que cette équation donnera toujours les hauteurs des Marées avec toute la juſteſſe qu'on peut attendre ſur cette matiere, pour les ſuppoſitions auſquelles notre Théorie eſt encore aſſujettie. Mais comme il eſt preſque impoſſible qu'il n'y ait abſolument aucune cauſe étrangére, qui trouble les Marées, nous ne devons pas être trop ſcrupuleux ſur ces corrections, qui ſont elles-mêmes médiocres. Ainſi pour rendre nos regles plus ſenſibles & plus faciles, nous ne ferons point d'attention aux changemens dans les diſtances du Soleil à la Terre; ces changemens ſont beaucoup plus petits que dans la Lune, & ils ſont en même tems de beaucoup moindre conſéquence: Nous ſuppoſons donc S conſtamment $=s$. Quant à la Lune, nous la conſidérerons, tout comme nous avons fait au VII. §. du Chap. VII. dans ſon Perigée, dans ſa diſtance moyenne & dans ſon Apogée, & nous retiendrons les ſuppoſitions que nous avons faites audit Article, pour les diſtances de la Lune, & pour les conſéquences que nous en avons tirées. Nous ferons donc pour le premier cas $\delta=3\varepsilon$, & $\frac{L^3}{l^3}=0,8439$: pour le ſecond cas $\delta=\frac{5}{2}\varepsilon$, & $\frac{L^3}{l^3}$ $=1,000$, & enfin pour le troiſiéme $\delta=2\varepsilon$, & $\frac{L^3}{l^3}=1,174$. De cette façon nous aurons les trois équations qui ſuivent, exprimées en nombres décimaux.

1°. Pour le Périgée de la Lune,

$$M=1,138\ nnA+1,277\ mmB.$$

2°. Pour les diſtances moyennes de la Lune,

$$M=nnA+mmB.$$

3°. Pour l'Apogée de la Lune

$$M=0,901\ nnA+0,703\ mmB.$$

On remarquera dans ces équations, que A marque la hauteur de la grande Marée, & B la hauteur de la petite Marée dans les diſtances moyennes des Luminaires à la Terre, ces Luminaires étant ſuppoſés l'un

l'un & l'autre se trouver dans l'Equateur : que *m* marque le Sinus de l'Arc compris entre les Luminaires diminué de 20 dégrés, & *n* le Cosinus de cet Arc.

On remarquera après cela, que les grandes Marées sont comprises en vertu de la premiere & de la troisiéme équation dans les termes de 1138 à 901, & les Marées bâtardes dans les termes de 1277 à 703 ; d'où l'on voit que la différence entre les grandes Marées n'est pas à beaucoup près si grande, qu'elle l'est entre les Marées bâtardes, si on compare cette différence à la hauteur de la Marée qui lui répond. Cela se confirme par l'expérience, & c'est une nouvelle source des irrégularités des petites Marées comparées entre elles, dont nous avons déja parlé ailleurs, & que M. Cassini n'a pas manqué d'observer.

V I.

J'ajoûterai ci-dessous une Table fondée & calculée sur les trois dites équations, mais qui se rapporte aux Quantités *A* & *B*, qu'il faut donc connoître par expérience pour le Port ou autre endroit, dont il est question. On pourra déterminer ces Quantités *A* & *B*, sur un grand nombre d'Observations, tant des hautes que des petites Marées, en prenant des unes & des autres le milieu Arithmétique.

V I I.

On remarquera, quant à la construction de la Table que nous allons donner, que les Arcs compris entre les Luminaires, ont été augmentés de 20 dégrés à l'égard de la Table précédente, dans laquelle on n'a pas eu égard aux causes secondes & aux corrections à faire. Ces 20 dégrés sont déterminés par le retard d'un jour & demi des Marées, par rapport aux Phases de la Lune, expliqué ci-dessus : il est vrai que cet intervalle d'un jour & demi ne demande pas tout-à-fait 20 dégrés de correction : mais comme il faudroit estimer les distances entre les Luminaires, telles qu'elles sont, non au moment de la haute-Mer (qui doit être supposée se faire au moment du passage de la Lune par le Méridién) mais au milieu du Jusan, en vertu du III. §. du Chap. VIII. & que l'intervalle depuis la haute Mer jusqu'au milieu du Jusan, demande encore une correction d'environ un dégré & demi, la somme de ces corrections peut être supposée de 20 dégrés, en estimant les distances des Luminaires au moment du passage de la Lune par le Méridien, que les Ephémérides indiquent.

VIII.

Voici donc à présent la Table. La *premiere* Colonne y marque les distances entre la Lune & le Soleil dans le moment du passage de la Lune par le Méridien: les *trois* autres Colonnes marquent les hauteurs des Marées pour le Périgée de la Lune, pour les distances moyennes de la Lune à la Terre, & pour l'Apogée de la Lune.



TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGE'E pour trouver les Hauteurs des Marées.

Distances entre les Luminaires.	*HAUTEURS des Marées au Périgée de la Lune.*	*Hauteurs des Marées aux Distanees moyennes de la Lune à la Terre.*	*HAUTEURS des Marées à l'Apogée de la Lune.*
0 Deg.	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
10	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
20	1,138A+0,000B	1,000A+0,000B	0,901A+0,000B
30	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
40	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
50	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
60	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
70	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
80	0,284A+0,958B	0,250A+0,750B	0,225A+0,527B
90	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
100	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
110	0,000A+1,277B	0,000A+1,000B	0,000A+0,703B
120	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
130	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
140	0,284A+0,958B	9,250A+0,750B	0,225A+0,527B
150	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
160	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
170	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
180	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B

I X.

Il nous reſte à conſidérer les déclinaiſons des Luminaires & les latitudes des lieux ſur la Terre, pour leſquels on cherche la nature des Marées. Nous avons ſuppoſé les unes & les autres nulles dans ce Chapitre. Mais cette matiere eſt ſi riche & ſi remarquable par pluſieurs propriétés très ſingulieres, & elle demande d'ailleurs tant d'attention, que j'ai cru devoir la traiter à part. Ce ſera donc le ſujet du Chapitre ſuivant.

CHAPITRE X.

Dans lequel on examine toutes les propriétés des Marées, qui dépendent des différentes Déclinaiſons des Luminaires & des différentes latitudes des Lieux.

I.

LES déclinaiſons des Luminaires à l'égard de l'Equateur, & les diſtances des lieux ſur la Terre du même Equateur, ont tant de rapport entre elles, qu'on ne ſçauroit bien traiter cette matiere, qui eſt une des plus importantes de notre ſujet, ſans les conſidérer les unes & les autres en même tems. Mais pour ne pas rendre la queſtion trop embarraſſante dès le commencement, nous ne ferons d'abord attention qu'à la Lune, tout comme ſi les Marées étoient uniquement produites par l'action lunaire. Nous conſidérerons auſſi la choſe d'abord ſuivant la pure Théorie, & nous verrons enſuite quelles corrections on y pourra employer.

I I.

Reſſouvenons-nous de tout ce que nous avons dit dans quelques-uns des premiers Chapitres, & ſur-tout dans le cinquiéme, ſur le changement de la figure de la Terre produit par l'action de l'un des Luminaires. Nous avons conſidéré la Terre d'abord comme parfaitement ſphérique : nous avons démontré enſuite que cette figure eſt changée par l'action de l'un des Luminaires en ellipſoïde, dont l'Axe prolongé paſſe par le centre du Luminaire agiſſant ; & enfin que la rotation diurne de la Terre fait que chaque Point dans la ſurface de la Terre, doit tantôt ſe baiſſer, tantôt s'élever, afin que ſa figure ellipſoïde ſoit conſervée ; mais nous n'avons calculé ces baiſſemens & hauſſemens, que pour les

Points

Points pris dans l'Equateur même, dans le plan duquel nous avons ſuppoſé en même tems ſe trouver l'Axe de l'Ellipſoïde. C'eſt pour ces cas, que nous avons démontré (§. *V. Chap. V.*) *que les baiſſemens des eaux ſont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute Mer*; & l'on remarquera que ces Angles horaires ſont proportionnels alors aux Arcs compris entre le Pole de l'Ellipſoïde & le Point en queſtion.

III.

Voici à préſent comment il faut s'y prendre, pour trouver les mêmes baiſſemens & hauſſemens, qui ſe font pendant le mouvement diurne de la Terre dans un point quelconque, & la Lune ayant auſſi une déclinaiſon quelconque. On voit qu'on aura toujours le même Ellipſoïde, quelle que ſoit la déclinaiſon de la Lune; mais qu'il ſera obliquement poſé à l'égard de l'Equateur: on voit auſſi qu'il faut s'imaginer dans ce Sphéroïde allongé une Section parellele à l'Equateur, qui paſſe par le point en queſtion: cette Section ne ſera pas un cercle parfait, & ſa circonférence n'aura pas tous ſes points également éloignés du centre de l'Ellipſoïde: c'eſt les différences de ſes diſtances, qui forment la nature des Marées. Il s'agit donc de déterminer ces différences.

IV.

Pour cet effet il faudra commencer par chercher les diſtances de chaque point du Parallele au *Pole de l'Ellipſoïde* (j'appelle ainſi l'extrémité de l'Ellipſoïde, qui prolongé, paſſe par le centre de la Lune) & ces diſtances étant connues, il eſt facile de trouver la diſtance du même point au centre de l'Ellipſoïde, & les différences de ces diſtances. Car ſi le Coſinus de la diſtance d'un point pris dans le Parallele au Pole de l'Ellipſoïde étoit ϱ, le Sinus total $= 1$, & ſi le demi Axe de l'Ellipſoïde eſt nommé $b + \delta$, & le plus petit demi-diametre b, la diſtance du point pris par le Parallele juſqu'au centre de l'Ellipſoïde ſera généralement $= b + \varrho\varrho\delta$; nous avons démontré cette Propoſition au §. V. Chap. V.

V.

Nous montrerons donc d'abord, comment il faudra déterminer la diſtance d'un Point quelconque, pris dans un Parallele donné au Pole de l'Ellipſoïde. La voye de la Trigonometrie ſphérique ordinaire nous ſeroit aſſez inutile ici, puiſqu'il nous faut des expreſſions analytiques, applicables à tous les cas, & traitables aux Calculs. Si l'on vouloit tirer de telles expreſſions des regles de ladite Trigonometrie, les formules qui

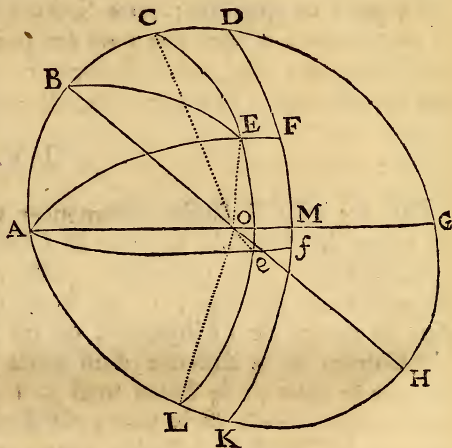
en

en proviendroient feroient beaucoup trop prolixes. M. Mayers nous a donné là-deffus un beau Mémoire inféré dans les Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de Petersbourg Tom. 2. p. 12. Il y a dans ce Mémoire au XVIII. §. un Théoreme général, par le moyen duquel on pourra toujours de trois chofes données dans un Triangle fphérique, trouver le refte par des expreffions analytiques extrêmement fimples. Voici le cas que notre fujet demande.

Soit dans un Triangle fpherique, le Sinus total = 1; le Sinus d'un des côtés = S; le Cofinus du même côté = C; le Sinus d'un autre côté = s; le Cofinus de cet autre côté = c; le Cofinus de l'Angle compris entre les deux côtés donnés = y; le Cofinus du troifiéme côté oppofé à l'Angle donné, que j'appellerai q, fera exprimé par cette équation

$$q = Ssy + Cc.$$

VI.



Soit à prefent $ADGK$ le Méridien de la Terre, qui paffe par le centre de la Lune, & que la Lune réponde au point B, qui deviendra ainfi le Pole de l'Ellipfoïde, & la droite BH, qui paffe par le centre O, fon Axe. Soit l'Axe de rotation de la Terre AG, les Poles A & G; DFK l'Equateur; CEL un Parallele, dans lequel nous prendrons un point quelconque E, & qu'on tire enfin par ce point E, & par le Pole A l'Arc AEF.

De cette maniere, l'Arc AB fera le complément de la déclinaifon de la Lune; l'Arc AE fera le complément de la *latitude* du point E, & l'Arc DF fera l'Arc horaire depuis le paffage du point E par le Méridien, qui paffe par la Lune; de forte qu'on connoît dans le Triangle BAE, les Côtés BA & EA; avec l'Angle compris BAE, & de là on tirera par le moyen du Théoreme expofé au précedent Article, l'Arc BE, qui eft la diftance du Point E au Pole de l'Ellipfoïde.

Nous nommerons donc encore le Sinus total 1, le Sinus du côté $AB = S$; fon Cofinus = C; le Sinus du côté $AE = s$, fon Cofinus = c;

le Cosinus de l'Arc DF, qui est la mesure de l'Angle BAE, $=y$; le Cosinus de l'Arc $BE=q$: nous aurons

$$q=Ssy+Cc.$$

VII.

Ayant ainsi trouvé l'Arc BE, il est facile d'exprimer la droite EO, qui est la distance du point E jusqu'au centre de l'Ellipsoïde, par le moyen du 4ᵉ. Art. qui nous marque que cette distance est toujours égale au plus petit demi-diametre, augmenté par le produit du Quarré du Cosinus de cet Arc trouvé, & de l'excès du demi-Axe BO sur le plus petit demi-diametre: c'est-à-dire, si nous retenons les dénominations, dont nous nous sommes servis depuis le IV. §. jusqu'ici, que nous aurons $$EO=b+(Ssy+Cc)^2\delta.$$
C'est cette équation de laquelle nous devons tirer toutes les variations des Marées, que la déclinaison de la Lune & la latitude du lieu peuvent produire.

VIII.

Nous voyons d'abord, que n'y ayant que la lettre y de variable, la quantité EO est toujours d'autant plus grande, que l'on prend y plus grande. Pour avoir donc la plus grande EO, il faut faire $y=1$. La haute Mer répond donc encore au passage de la Lune par le Méridien; & on aura alors la droite $CO=b+(Ss+Cc)^2\delta$.

IX.

Mais pour trouver la plus petite EO ou eO, il ne faut pas faire $y=0$; mais $y=-\frac{Cc}{Ss}$ & alors la hauteur eO est simplement $=b$. Nous ferons là-dessus les remarques suivantes:

I. La différence entre la plus grande CO & la plus petite eO, faisant la hauteur de la Marée, entant quelle est produite par la seule action de la Lune, il s'ensuit que cette hauteur est $=(Ss+Cc)^2\delta$. Cette formule nous apprend bien de nouvelles proprietés sur les Marées, & nous sert en même tems à décider plusieurs questions, sur lesquelles les Auteurs ne sont pas encore convenus.

(α) Nous voyons d'abord, que la plus grande Marée se fait, lorsque la déclinaison de la Lune est égale à la latitude du lieu. Cette regle suppose toute la Terre inondée; & c'est à quoi il faut avoir égard, lorsqu'il est question de la hauteur d'un lieu. Ce n'est pas par exemple immédiatement aux Ports de Picardie, de Flandre, &c. que les eaux sont

élevées par la Lune: la cause principale des Marées dans tous ces endroits doit être attribuée plûtôt à l'élevation & descente des eaux, qui se font dans la Mer du Nord, à environ 35 degrés de Latitude Septentrionale, autant que j'en ai pû juger par l'inspection des Cartes Marines. J'avouë pourtant que ce n'est ici qu'une estime fort incertaine; il est impossible de rien dire de positif là-dessus.

On remarquera aussi que je parle ici de la hauteur de la Marée, qui répond au passage supérieur de la Lune par le Méridien: j'appellerai cette Classe de Marées, *Marées de dessus*, & la Classe de celles qui répondent au passage inférieur de la Lune par le Méridien, *Marées de dessous*.

(β) Si la déclinaison de la Lune est nulle, nous aurons $S=1$ & $C=0$, & la hauteur de la Marée de dessus sera $= ss\delta$. Nous voyons de-là, que si la Terre étoit toute inondée, & que les Luminaires restassent dans le plan de l'Equateur, les hauteurs des Marées pour les endroits de différentes latitudes seroient en raison quarrée des Sinus des distances au Pole.

(γ) Si pour nos Païs Septentrionaux, la déclinaison de la Lune devient Méridionale, les Marées de dessus deviennent encore plus petites à cet égard, & cette diminution seroit très-considérable, s'il n'y avoit pas une cause hydrostatique que je marquerai ci-dessous, qui lui est un obstacle; sans la considération de cette cause, on pourroit croire facilement que notre Théorie ne répond pas assez aux Observations.

(δ) Nous éclaircirons cette matiere par un exemple, en supposant la Latitude du lieu de 35 degrés. En ce cas la hauteur des Marées de dessus, tout le reste étant égal, devoit être,

Dans la plus grande Déclinaison Septentrionale de la Lune, ...	$=0,963\,\delta$.
Lorsque la Déclinaison de la Lune est nulle .	$=0,671\,\delta$.
Dans la plus grande Déclinaison Méridionale de la Lune	$=0,265\,\delta$.

La différence de ces Marées est énorme, & surpasse de beaucoup toutes les inégalités qu'on peut soupçonner avoir quelque rapport à la Déclinaison de la Lune. Nous en dirons bientôt la raison.

(ε) Si on supposoit la Latitude telle que Ss fût $= Cc$, ou $Ss = \sqrt{1-SS} \times \sqrt{1-ss}$, ou enfin $s = \sqrt{1-SS} = C$, le point E qui répondroit à la plus petite EO, seroit précisément au point L. En ce cas, il n'y auroit qu'une Marée de dessus dans l'espace d'un jour lunaire, & la Marée de dessous s'évanouiroit entiérement. Cela arriveroit donc, par exemple, si la Lune ayant 20 degrés de Déclinaison Septentrionale, l'élevation du Pole étoit de 70 degrés: mais en même tems la Marée seroit

roit bien petite, puiſqu'elle ne monteroit qu'à environ la cinquiéme partie, qu'elle feroit ſous l'Equateur.

(*f*) Si s eſt plus petit que C, la quantité du §. VII. $(Ss + Cc)^2 \delta$, ne ſçauroit plus devenir égale o; c'eſt pourquoi la Mer décroitra alors continuellement depuis le paſſage ſupérieur de la Lune par le Méridien, juſqu'à ſon paſſage inférieur. Il n'y aura donc plus qu'une Marée par jour depuis le parallele, qui fait $s = C$, juſqu'au Pole; & pour ſçavoir la hauteur de ces Marées, il faut dans cette Formule, premierement ſuppoſer $y = 1$; & enſuite $y = -1$, & prendre la différence des Formules: la hauteur des Marées ſera donc dans ces cas $= (Ss + Cc)^2 \delta - (-Ss + Cc)^2 \delta$, ou bien $= 4\, Ss\, Cc\, \delta$. Elle ne ſçauroit donc être qu'extrêmement petite.

Nous aurions un grand nombre de refléxions à faire encore ſur cette matiere, s'il ne falloit pas ſe contenir dans de certaines bornes; & quoique tous ces Théoremes ne ſoient vrais que dans la Théorie, où l'on ſuppoſe les eaux être conſtamment dans leur état d'équilibre, & toute la Terre inondée (car avec ces ſuppoſitions, ces Théorêmes ſeroient exactement vrais) & que diverſes circonſtances peuvent leur donner quelquefois une toute autre face, ils ne laiſſent pas d'être très-utiles, pour expliquer en gros un grand nombre de Phénomenes obſervés ſur les Marées, & pour pénétrer à fond cette matiere.

II. Nous avons démontré qu'il n'y a des Marées de deſſous, que que tant que s eſt plus grand que C, lorſque la Déclinaiſon de la Lune eſt Septentrionale (ſi cette Déclinaiſon eſt Méridionale, il n'y aura point alors de Marées de deſſus dans les Païs Septentrionaux.) Nous diſpoſerons donc s plus grand que C, & nous chercherons là-deſſus la hauteur de la Marée de deſſous, de la même façon que nous l'avons trouvée pour celles de deſſus.

Nous avons vû que la hauteur EO eſt la plus petite poſſible, lorſqu'on prend $y = -\frac{Cc}{Ss}$, & qu'alors elle devient $= b$; après cela les hauteurs EO croîtront juſqu'au point L, qui fait $y = -1$. La différence de ces hauteurs ſera donc la hauteur de la Marée de deſſous, qui ſera par conſéquent $= (-Ss + Cc)^2 \delta$, pendant que celle de la Marée de deſſus étoit $= (Ss + Cc)^2 \delta$. On pourra faire là-deſſus les remarques ſuivantes.

(*a*) Les Marées de deſſus ſont égales à celles de deſſous, lorſque la déclinaiſon de la Lune eſt nulle.

(*b*) Dans les Païs Septentrionaux, les Marées de deſſus ſont plus grandes que celles de deſſous, lorſque la déclinaiſon de la Lune eſt Septentrionale, & plus petites lorſque cette déclinaiſon eſt Méridionale, & généra-

généralement les déclinaisons de la Lune étant égales, mais de différens côtés les Marées de dessus deviennent les mêmes qu'étoient celles de dessous, & reciproquement.

(c) La différence des deux Marées d'un même jour lunaire est $=4\ Cc\ Ss\ \delta$; si l'on applique ces Formules à des cas particuliers, on verra que les Marées de dessus devroient différer considérablement de celles de dessous, s'il n'y avoit pas une autre raison qui doit les rendre à peu près égales. Nous exposerons cette raison ci-dessous, après que nous aurons examiné tout ce que la Théorie dit sur cette matiere *in abstracto*.

III°. Nous voyons aussi que les durées des deux Marées d'un même jour doivent être selon la pure Théorie fort différentes. Voici comme on peut déterminer ces durées. Si dans le Parallele CL on suppose e être le point, la distance duquel au centre de l'Ellipsoïde soit la plus petite & égale à b, & qu'on tire ensuite par ce point un Arc de Méridien Aef, l'Arc Df sera la mesure du tems depuis la haute Mer de dessus jusqu'à la basse Mer suivante, & l'Arc fK la mesure du tems, depuis cette basse Mer jusqu'à la haute Mer de dessous. Or nous avons vû au IX. §. que le Cosinus de l'Arc $Df\ (y)$ est $=-\frac{Cc}{Ss}$, ou bien si DM est de 90 degrés, le Sinus de l'Arc Mf vers le point $K=\frac{Cc}{Ss}$. Là-dessus nous pourrons faire ces remarques.

(1) Dans les Païs Septentrionaux la déclinaison Septentrionale de la Lune rend les Jusans des Marées de dessus plus longs, & les Flots des Marées de dessous plus courts; & la déclinaison Méridionale fait le contraire avec les mêmes mesures; & lorsque la déclinaison est nulle, la durée du Jusan est égale à celle du Flot suivant.

(2) Si la déclinaison de la Lune est égale au Cosinus de la latitude du lieu, le Jusan durera 12 heures lunaires, & il n'y a point de Flot pour l'autre Marée, parce qu'il n'y a point du tout de Marée de dessous.

(3) En général, la différence du tems, entre le Jusan de la Marée de dessus, & le Flot de la Marée de dessous, se détermine par le double

ble de l'Arc horaire Mf, & la différence des durées des deux Marées entieres, est exprimée par le quadruple de l'Arc Mf, dont le Sinus est $= \frac{Cc}{Ss}$. D'où l'on voit que plus la déclinaison de la Lune est grande, plus cette différence est grande aussi.

Soit, par exemple, la latitude du lieu de 35. degrés, la déclinaison de la Lune de 25 degrés, l'Arc Mf sera de 15 degrés, qui répond à une heure lunaire; le Jusan durera donc 7 heures lunaires, & le Flot suivant 5 heures lunaires, & la différence sera de deux heures, & toute la Marée de dessus durera 4 heures plus que celle de dessous.

X.

Voilà donc comme la chose seroit, si la Terre étoit toute inondée, & si les eaux étoient constamment dans une situation d'équilibre parfait. Nous avons exposé toutes les variations des Marées qui sont dues à l'action de la Lune, par rapport aux différentes déclinaisons & latitudes, & par le moyen de nos Remarques on connoit les différences entre les Marées d'un même jour, entre celles qui se font dans différentes Saisons, &c. tant à l'égard des hauteurs des Marées, que de leurs durées. Il est vrai que les deux hypotheses indiquées sont bien éloignées de la vérité, & que cela change extrêmement les mesures des variations; mais je suis pourtant sûr qu'il doit y avoir des variations, & qu'elles seront de la nature que nous avons trouvée.

Quant aux irrégularités de la surface de la Terre, il n'est pas possible d'en deviner les effets, que fort superficiellement, & comme chaque endroit demanderoit à cet égard des refléxions différentes, nous n'entreprendrons point cet examen. Nous ne considérerons donc que ce qui regarde le défaut de l'équilibre des eaux, & les mouvemens reciproques ou oscillatoires qui en résultent.

XI.

La Lune change la surface de la Terre de Sphérique en Ellipsoïdique, & l'Axe de l'Ellipsoïde passe par la Lune. Cet Axe étant différent de l'Axe de Rotation, la figure de la Terre change continuellement, quoique toujours la même à l'égard de l'Axe de l'Ellipsoïde; & s'il n'y avoit pas quelques causes secondes, lesdits changemens consisteroient simplement en ce que chaque goute montât & descendît alternativement & directement vers le centre.

Il est remarquable encore, que si les eaux se mouvoient librement, sans souffrir aucune resistance, ces oscillations augmenteroient continuellement

à l'infini, parce qu'à chaque demi-tour de la Terre, les eaux doivent être censées avoir reçû quelque nouvelle impulsion : c'est une propriété qu'on peut démontrer par plusieurs exemples semblables, tirés de la Méchanique & de l'Hydrodynamique. Mais le grand nombre de resistences qui s'opposent aux mouvemens des eaux, font que celles-ci prennent bien vîte leur plus grand degré d'oscillations. Ces derniers degrés d'oscillations peuvent cependant être censés proportionnels aux forces que la Lune exerce sous différentes circonstances, pourvû que les changemens qui se font dans la Lune, se fassent assez lentement, pour donner aux eaux le tems qu'il leur faut pour changer leur mouvement. On peut donc dire à cet égard, que les changemens qui se font dans la Lune, par rapport à ses declinaisons doivent produire dans les Marées à peu-près les Phénomenes que nous avons indiqués, & à beaucoup plus forte raison les changemens de déclinaisons dans l'autre Luminaire. Mais les changemens qui sont dûs à la rotation de la Terre sont trop vîtes, pour que les Marées puissent s'y accommoder, car elles tâchent de conserver leur mouvement reciproque comme un Pendule simple. Cette seule raison fait que si les deux Marées d'un même jour doivent être suivant les différens effets de la Lune fort différentes, la plus grande augmente la plus petite, & celle-ci diminue l'autre, de sorte qu'elles sont beaucoup moins inégales qu'elles ne devroient être sans cette raison. Tout ce qu'on peut donc dire à cet égard, est que nos Théorêmes sont vrais, quant à leur nature, mais non pas suivant les mesures que nous en avons données. On peut pourtant, moyennant une autre refléxion, réparer en quelque façon cet inconvenient : c'est en supposant que la plus grande Marée donne à la plus petite, qui est sa compagne, autant qu'elle en perd, & les supposer l'une & l'autre à peu-près égales, ce que l'expérience confirme, & de là on tirera la hauteur absoluë de chacune, en prenant le milieu Arithmétique des deux Marées, qui conviennent à un même jour lunaire. En corrigeant de cette façon les précédentes Propositions, nous aurons les Théorêmes suivans, qui ne sçauroient plus manquer d'être assez conformes aux Observations.

XII.

La hauteur de la Marée de dessus est $= (Ss + Cc)^2 \delta$ (§. *Remarque I.*) & la hauteur de la Marée de dessous $= (-Ss + Cc)^2) \delta$ (§. *IX. Remarque II.*) en prenant donc la moitié de la somme de ces deux hauteurs, nous aurons la hauteur moyenne de la Marée, qui convient aux déclinaisons de la Lune, & latitudes du lieu données, $(SSss + CCcc)\delta$. De cette Formule, que je crois fort juste pour la supposition de l'entiere inondation de la Terre, on pourra tirer les Corollaires suivans.

(I.) Les

(I.) Les déclinaiſons Septentrionales & Méridionales de la Lune font le même effet ſur les Marées, à l'égard de leur hauteur moyenne.

Cette propriété eſt confirmée par les Obſervations. Mais il ſera toujours vrai, que dans les Païs Septentrionaux la déclinaiſon Septentrionale de la Lune augmente un peu les Marées de deſſus, & diminue celles de deſſous; & que la déclinaiſon Méridionale fait le contraire: & c'eſt ce que l'expérience confirme auſſi. On ſe ſouviendra donc que nous parlons de la hauteur moyenne des deux Marées d'un même jour lunaire.

(II.) A la hauteur de 45 degrés la hauteur moyenne de la Marée eſt $= (\frac{1}{2} SS + \frac{1}{2} CC) \delta = \frac{1}{2} \delta$, & par conſéquent conſtamment la même.

C'eſt ici une proprieté bien ſinguliere, que quelles que ſoient les déclinaiſons des Luminaires, les hauteurs moyennes des Marées n'en ſoient point changées, & cette propriété nous fait voir, pourquoi dans nos Païs on s'apperçoive de ſi peu de changement dans les Marées, à l'égard deſdites déclinaiſons.

(III.) Si la latitude du lieu eſt moins de 45°. la plus grande Marée moyenne ſe fait lorſque les déclinaiſons des Luminaires ſont nulles, & les Marées diminuent, ſi les déclinaiſons augmentent.

L'expérience confirme encore cette propriété, & tout le monde convient que dans nos Païs (dont les Marées dépendent de la Mer du Nord, à environ 35 degrés de latitude) les plus grandes Marées, tout le reſte étant égal, ſe font environ les Equinoxes.

Si la latitude du lieu eſt plus grande de 45 degrés, c'eſt le contraire.

(IV.) Sous l'Equateur, la hauteur de la Marée eſt $= SS\delta$, & les variations qui dépendent des différentes déclinaiſons de la Lune, y ſeront le plus ſenſibles: ſi la déclinaiſon eſt nulle, la hauteur de la Marée y eſt exprimée par δ; & ſi la déclinaiſon eſt ſuppoſée de 15 dégrés (elle peut aller juſqu'à près de 29 degrés) la hauteur de la Marée moyenne ſera de 0,82 δ. La différence des hauteurs eſt de $\frac{18}{100} \delta$.

(V.) Les variations ſont moins grandes à cet égard ſur les Côtes de la France, baignées par l'Océan, ſi les Marées y ſont cauſées par la Mer du Nord à la hauteur d'environ 35 degrés, la hauteur de la Marée, la déclinaiſon de la Lune étant nulle, y ſera exprimée par 0,671 δ, & ſi la Lune avoit 25 degrés de déclinaiſon, la hauteur moyenne y ſera exprimée alors par 0,610 δ. La plus grande Marée eſt donc à la plus petite à cet égard, comme 671 à 610, & la différence ſera comme 61; qui fait l'onziéme partie de la grande Marée.

Nous voyons par ces exemples, que les variations qui dépendent de la déclinaiſon de la Lune, ſont toujours beaucoup plus petites, que cel-

les

les qui dépendent des différentes distances de la Lune, & qui peuvent aller jusqu'au tiers de la grande Marée. C'est pourquoi on a eu beaucoup de peine à s'appercevoir des variations qui répondent aux différentes déclinaisons.

(VI.) Enfin nous remarquerons que cette Formule $(SSss + CCcc)\delta$ pour les hauteurs moyennes des Marées ne doit pas être poussée au-delà du terme des doubles Marées, qui est lorsque la latitude du lieu est égale à la déclinaison de la Lune: car, passé ce terme, nous avons démontré qu'il ne doit y avoir qu'une Marée par jour, dont la hauteur est exprimée par $4SsCc\delta$, en vertu de la Remarque (ζ) de l'Art. IX. Il faudra aussi donner à ce terme une certaine latitude; car il y apparence que ce n'est qu'à une certaine distance depuis ce terme vers l'Equateur, que les Marées commencent à être doubles, & à une autre distance vers le Pole, qu'elles commenceroient à être simples, si la Mer libre s'étendoit jusques-là; & que dans la Zone, qui est entre deux, les Marées seront mêlées de l'une & l'autre espéce avec beaucoup d'irrégularité.

XIII.

Nous venons d'exposer au long, & avec toute la précision possible, le rapport réel des hauteurs des Marées: nous n'avons qu'un mot à dire sur l'heure des hautes Marées. Comme c'est toujours au moment du passage supérieur de la Lune par le Méridien, que la Mer devroit être la plus haute, quelle que soit la déclinaison de la Lune, & la latitude du lieu: nous voyons que si les Marées dépendoient uniquement de la Lune, ces deux sortes de variations ne devroient point apporter de changement à l'heure de la haute Mer; & si l'on veut avoir égard aux forces du Soleil, nous avons déja montré au IX. Art. du Chap. VII. les variations qui peuvent provenir à cet égard.

Mais si la déclinaison de la Lune & la latitude du lieu n'ont pas d'influence directement sur l'heure de la haute Mer, & si elles n'en ont que très-peu, lorsque l'action de la Lune est combinée avec celle du Soleil, il est remarquable, que tant la déclinaison de la Lune, que la latitude du lieu, feroient extrêmement varier l'heure des basses *Mers*, sans cette cause seconde, que j'ai exposée au long dans le XI. Art. & qui fait que les deux Marées d'un même jour lunaire sont beaucoup moins inégales, qu'elles ne devroient être. Cependant cette raison ne sçauroit rendre les deux Marées tout-à-fait égales, & il sera toujours vrai, ce que j'ai dit dans la Remarque (1) de la III. Partie du §. IX. que c'est tantôt le Jusan d'une Marée, qui surpasse en durée le flot de la Marée suivante, tantôt celui-ci qui surpasse l'autre. C'est une propriété qui n'est point échappée aux Observateurs des Marées; mais on n'avoit pas remar-

remarqué les circonſtances de ces inégalités, ſçavoir que dans les Païs Septentrionaux, la déclinaiſon Septentrionale de la Lune rend les Marées de deſſus plus longues, & les Marées de deſſous plus courtes, & que la déclinaiſon Méridionale fait le contraire.

On voit donc qu'à cet égard le Juſan peut être différent du flot ſuivant, mais non pas du flot antécédent; & ſi l'on remarque quelque différence entre le flot & le Juſan d'une même Marée, ou cette différence ſera conſtante pendant tout le cours de l'année, & alors il faut l'attribuer à la configuration des Côtes; ou elle n'aura point de loix, & ne ſera que tout-à-fait accidentelle, & cauſée par des Vents ou Courants accidentels.

XIV.

Les différences que nous avons expoſées dans ce Chapitre entre les deux Marées d'un même jour, tant pour leur hauteur, que pour leur durée, nous donnent un moyen de reconnoitre ces deux Claſſes de Marées, & de diſtinguer l'une d'avec l'autre, ce qui ſeroit impoſſible ſans cela ſur les Côtes irrégulieres de l'Europe, où nous ſçavons que les diverſes heures du Port comprennent toute l'étendue d'une Marée, ou d'un demi-jour lunaire.

La Claſſe des Marées de deſſus comprendra celles qui ſont plus grandes & plus longues, la déclinaiſon de la Lune étant Septentrionale, ou qui ſont petites & plus courtes, cette déclinaiſon étant Méridionale, & l'autre Claſſe ſera reciproque.

XV.

Nous avons examiné avec toute l'attention requiſe les effets des différentes déclinaiſons de la Lune, qui ſont la ſource de tant de propriétés très-remarquables des Marées. Il ne nous reſte donc plus qu'à conſidérer encore les déclinaiſons du Soleil. Cet examen nous ſera très-facile, après celui que nous venons de faire ſur la Lune.

Nous nommerons la force du Soleil, ſa déclinaiſon étant nulle, ε, comme nous avons fait toujours dans le Corps de ce Traité, & nous retiendrons les dénominations du V. §. Si nous appliquons donc au Soleil tout le raiſonnement que nous avons fait ſur la Lune, nous voyons qu'on n'a qu'à ſubſtituer dans toutes les Formules de ce Chapitre ε à la place de δ, pour trouver les variations qui proviennent des différentes déclinaiſons du Soleil dans tous les lieux de la Terre, & de cette maniere tout ce que nous avons dit ſur la Lune, ſera auſſi vrai à l'égard du Soleil. Si donc la hauteur de la Marée, entant qu'elle eſt produite ſous l'Equateur par la ſeule action du Soleil au tems des Equinoxes, eſt appellée ε, la hauteur de la Marée ſera pour telle déclinaiſon du Soleil,

& telle latitude du lieu entre les deux Cercles Polaires qu'on voudra $= (TTss + EEcc)\beta$, entendant par T le Sinus de la distance du Soleil au Pole, & par E son Cosinus.

X V I.

Pour tirer tout l'avantage, qui est possible, de nos Méthodes, & leur donner la derniere perfection, nous tâcherons enfin de donner une Formule générale pour tous les cas possibles. Souvenons-nous pour cet effet, que nous avons nommé au I X. Chapitre A la hauteur des Marées qui se font sous la Ligne dans les Syzygies (ou plutôt un jour & demi après) les distances des Luminaires étant moyennes, & leurs déclinaisons nulles; & que pour les mêmes circonstances nous avons nommé B la hauteur des Marées bâtardes: voyons à présent, comment il faut changer ces Quantités A & B, lorsque les déclinaisons des Luminaires, & les latitudes des lieux sont d'une grandeur quelconque.

(I.) Quant à la quantité A, comme elle a été exprimée par la somme des forces entieres des deux Luminaires, c'est-à-dire, par $\delta + \beta$, on voit qu'il faut mettre ici à la place de δ sa quantité corrigée $(SSss + CCcc)\delta$, & à la place de β sa quantité corrigée $(TTss + EEcc)\beta$, & ensuite faire cette Analogie

$$\delta + \beta : A :: (SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\beta : \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\beta}{\delta + \beta} A.$$

Cette quatriéme proportionnelle marque la hauteur des Marées dans les Syzygies, lorsque les déclinaisons des Luminaires, & la latitude du lieu sont quelconques, & si la déclinaison de l'un & l'autre Luminaire est nulle, cette quantité devient simplement $= ssA$. Si l'on nomme donc F la hauteur de la Marée dans les Syzygies, les déclinaisons des Luminaires étant nulles pour un lieu quelconque, il faut supposer $ssA = F$, & de cette maniere ladite quatriéme proportionelle devient

$$= \frac{(SSss + CCCcc)\delta + (TTss + EEcc)\beta}{ss(\delta + \beta)} F.$$

C'est cette quantité qu'il faut substituer dans les équations du §. V. Chap. I X. pour A.

(II.) La quantité qu'il faudra substituer pour B dans ces equations, que nous venons de citer, se trouve à peu-près de la même façon; il n'y a qu'à prendre au lieu de la somme $\delta + \beta$ leur différence $\delta - \beta$, qui exprimoit la hauteur des Marées bâtardes. Si l'on appelle donc G la hauteur de la Marée dans les Quadratures, les déclinaisons des Luminaires étant nulles, on trouvera la quantité à substituer pour

$$B = \frac{(SSss + CCcc)\delta - (TTss + EEcc)\beta}{ss(\delta - \beta)} \times G.$$

Nous substituerons encore dans l'équation générale du §. V. Chap. IX. à la place des Lettres S & s (qui y marquent le rapport des distances du Soleil à la Terre sous diverses circonstances, & qui se trouvent employées dans ce Chapitre dans un autre sens) ces autres Lettres D & d.

Après ces réflexions préliminaires nous considérerons le Problême général des hauteurs des Marées sous telles circonstances, qui pourront concourir, & qui servira à déterminer ces hauteurs avec toute la précision possible. Je m'assûre que tous ceux qui jetteront les yeux sur cette Solution, verront sans peine, combien j'ai été attentif à examiner & éplucher toutes les circonstances qui peuvent faire varier les Marées.

PROBLEME GENERAL.

XVII.

Trouver généralement la hauteur des Marées, en supposant toutes les circonstances qui peuvent les faire varier, connuës.

SOLUTION.

Il faut connoître d'abord par Observations les quantités F & G, qui marquent les hauteurs moyennes des grandes Marées, & des Marées bâtardes, qui se font un jour & demi après les Syzygies & les Quadratures, les déclinaisons des Luminaires étant nulles, & leurs distances à la Terre étant moyennes. Dans la Théorie, deux Observations suffisent pour cet effet; mais il vaut mieux dans l'application de nos Méthodes observer un grand nombre de fois, comme on a déja fait presque dans tous les Ports de la France, la hauteur des grandes Marées, & celles des petites Marées, les Luminaires se trouvant à peu-près dans l'Equateur, & prendre des unes & des autres le milieu Arithmétique, que j'appelle F pour les grandes Marées, & G pour les petites Marées.

Il faut ensuite connoître le rapport moyen, qu'il y a entre les forces de la Lune & du Soleil. Nous avons donné plusieurs moyens pour cela dans le corps de cette Dissertation, & nous nous croyons bien fondés de le supposer comme 5 à 2. Quoi qu'il en soit, nous nommons ce rapport $\alpha : \beta$.

Il faut après cela faire attention aux Phases de la Lune, ou à l'Arc compris entre les deux Luminaires dans le moment du passage de la Lune par le Méridien : cet Arc doit être diminué de 20 dégrés (§. *VII. Chap. IX.*) Nous nommons le Sinus de l'Arc résultant m, & le Cosinus n, & le Sinus total 1.

Il faut auſſi connoître les diſtances des Luminaires à la Terre : j'appelle d la diſtance moyenne du Soleil; D ſa diſtance au tems de la Marée cherchée; l la diſtance moyenne de la Lune; L ſa diſtance au tems de la Marée cherchée.

Il faut ſçavoir encore les déclinaiſons des Luminaires à l'égard de l'Equateur : j'appelle S le Sinus de la diſtance de la Lune au Pole; C ſon Coſinus; T le Sinus de la diſtance du Soleil au Pole; E ſon Coſinus.

Enfin, il faut faire attention à la latitude du lieu, & à la Remarque (α) du IX. Art. que nous avons faite pour l'eſtimation des latitudes. Nous appellons le Sinus de la diſtance au Pole s & le Coſinus c. Toutes ces dénominations faites, je dis que la hauteur de la Marée ſera

$$\frac{l^3 D^3 \delta + L^3 d^3 \epsilon}{L^3 D^3 (\delta + \epsilon)} \times \frac{nn}{ss} \times \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\epsilon}{\delta + \epsilon} \times F.$$

$$+ \frac{l^3 D^3 \delta - L^3 d^3 \epsilon}{L^3 D^3 (\delta - \epsilon)} \times \frac{mm}{ss} \times \frac{(SSss + CCcc)\delta - (TTss + EEcc)\epsilon}{\delta - \epsilon} \times G.$$

XVIII.

Je n'ai mis ici cette grande Formule, que pour faire voir toute l'étendue & toute l'exactitude de notre Théorie & de nos Calculs, car les meſures & la Table que nous avons donnés au Chapitre IX. ont aſſez de préciſion dans une Queſtion auſſi ſujette que celle-ci aux variations accidentelles, qui n'admettent aucune détermination.

Je ne dis rien des Marées & de leurs changemens extraordinaires, qui ſe font dans la Zone glaciale, pour ne point groſſir trop ce Traité, & pour ne point l'embarraſſer de choſes fort abſtraites & aſſez difficiciles. J'ai d'ailleurs déja expoſé en gros & même aſſez au long ce qui en eſt.

Quant enfin à l'heure des hautes Mers, j'ai fait voir qu'elle n'eſt point changée par les déclinaiſons des Luminaires, ni par la latitude du lieu; nous avons donc déja donné toute la perfection poſſible dans les Chapitres précédens à cette autre grande Queſtion. Pour l'heure des baſſes Mers, qui dépendent beaucoup des déclinaiſons des Luminaires, & de la latitude du lieu, nous en avons fait voir toutes les variations & propriétés dans ce Chapitre.

CHAPITRE XI.

Qui contient l'Explication & Solution de quelques Phénomenes & Questions, dont on n'a pas eu occasion de parler dans le corps de ce Traité, sur-tout à l'égard des Mers détachées, soit en partie, soit pour le tout, de l'Océan.

I.

SUivant quelle progression les eaux montent & descendent dans une même Marée, par rapport au tems donnés.

Cette Question dépend de toutes les circonstances que nous avons considérées dans ce Traité; mais les variations à l'égard du changement de ces circonstances, ne font pas varier beaucoup la loi, suivant laquelle les eaux montent & descendent; je ne parlerai donc que du cas le plus simple, qui est lorsque la latitude du lieu, & les déclinaisons des Luminaires sont nulles, & lorsqu'en même tems les Luminaires sont dans leurs Syzygies, ou dans leurs Quadratures. Que l'on exprime donc tout le tems depuis la haute Mer jusqu'à la basse Mer par un quart de Cercle, dont le rayon est égal à l'unité: je dis *que les descentes verticales des eaux depuis la haute Mer doivent être exprimées par les Quarrés des Sinus des Arcs, qui représentent les tems donnés.* Si l'on considére les Marées depuis le commencement du Flot, il faudra dire *que les élévations verticales des eaux, sont en raison quarrée des Sinus, qui répondent aux tems donnés* §. III. Chap. V. Ceux qui voudront rendre cette Proposition plus générale, pourront consulter le §. VIII. Chap. V. & si on y ajoute enfin les §. §. VI. & VII. du Chap. X. on verra facilement, ce qu'il faudroit faire pour tous les cas possibles. Mais la loi générale ne différera pas beaucoup de celle que nous venons d'exposer; & cela d'autant moins que les deux Marées d'un même jour, qui devroient être souvent fort inégales, ne laissent pas de se composer à une égalité mutuelle par la raison exposée au long au §. XI. Chap. X. On peut donc se tenir sans peine à la Regle que nous venons d'établir.

Il s'ensuit de cette Regle, que les baissemens ou élevations des eaux, qui se font dans de petits tems égaux, sont proportionnels aux produits des Sinus par les Cosinus répondans des Arcs horaires; de sorte que si on partage tout le tems du Flux ou du Reflux également, les variations également éloignées en deçà & en delà de ce terme, sont égales: ces variations sont les plus sensibles au milieu du Flux ou du Reflux, & la va-

variation totale depuis le commencement du Flux ou du Reflux jusqu'au milieu, fait précisément la moitié de toute la variation d'une Marée. On voit enfin que les variations doivent être insensibles au commencement & à la fin de chaque Flux & Reflux.

Toutes ces Propositions sont confirmées entierement par les Observations qu'on a faites sur cette matiere, rapportées par M. Cassini dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1720. pag. 360. Il semble seulement qu'il y a une erreur de quelques minutes dans la détermination de l'heure de la basse Mer, erreur presque inévitable dans cette sorte d'Observations. Mais il faut remarquer, pour voir plus parfaitement l'accord de notre Regle avec les Observations, que tout le tems du Flux & Reflux est de six heures lunaires, pendant que les Observations ont été prises sur des heures solaires.

II.

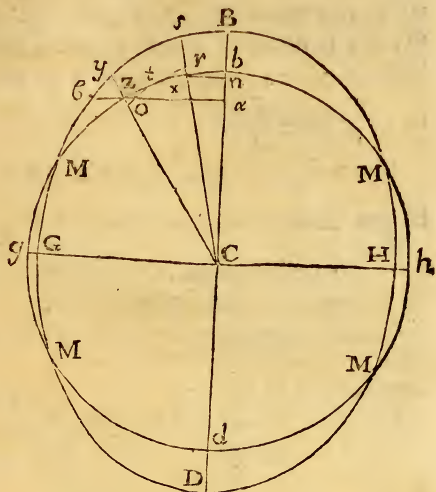
Pourquoi il n'y a point de Marées sensibles dans la Mer Caspienne, ni selon quelques-uns dans la Mer Noire, & pourquoi elles sont très-petites dans la Mer Méditerranée, & de quelle nature sont ces Marées.

On ne sçauroit bien répondre à ces questions, sans considérer auparavant le Problême principal, qui est de sçavoir les Marées, lorsque la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, & c'est un Problême pénible pour le Calcul, & assez délicat pour la Méthode. Pour le rendre d'abord plus simple, nous supposerons les Luminaires en conjonction & dans le plan de l'Equateur, & que c'est aussi sous l'Equateur, que l'on cherche les Marées.

Ressouvenons-nous que sans l'action des Luminaires, l'Equateur seroit parfaitement circulaire, comme $bgdh$, & que les Luminaires se trouvant dans l'Axe DB, cette Figure est changée en l'Ellipse $BGDH$, lorsque toute la Terre est inondée, & que les eaux peuvent couler de tous côtés. Nous avons démontré aussi au III. §. Chap. V. que dans cette supposition, la petite hauteur yz (dont les variations par rapport à ses différentes situations expriment les variations des Marées au point z) est $=\frac{3ss-bb}{3bb}\times\beta$, dans laquelle Formule on suppose $C\alpha=s$; $Cb=b$, & la différence entre la plus grande CB & la plus petite $CG=\beta$.

Supposons à présent que la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, sçavoir celle de zx, & qu'on tire par le centre C & l'extrémité x la droite Cs. Cela posé on voit bien que la surface de la Mer ne peut pas être en ys, comme elle seroit, si toute la terre étoit inondée; car l'espace yCs est plus grand que l'espace zCx, & il faut que cet

cet espace soit constamment le même; puisque la quantité d'eau dans une Mer doit être supposée la même pendant les revolutions de la Terre: mais la surface de l'eau prendra la courbure $o\ r$, & voici quelle sera la nature de cette courbure $o\ r$; il faut premierement, que l'espace $o\,C\,r$ soit constamment le même que l'espace $z\,C\,x$, & en second lieu, que la courbe $o\ r$ soit semblable à la courbe $y\ s$, ou plûtôt la même, puisque toutes les petites lignes, telles que $s\ x$, sont incomparablement plus petites que le rayon de la Terre; & ainsi la petite perpendiculaire $s\ r$ sera égale à la petite perpendiculaire $y\ o$, de même que toutes les perpendiculaires comprises entre les termes s & y.



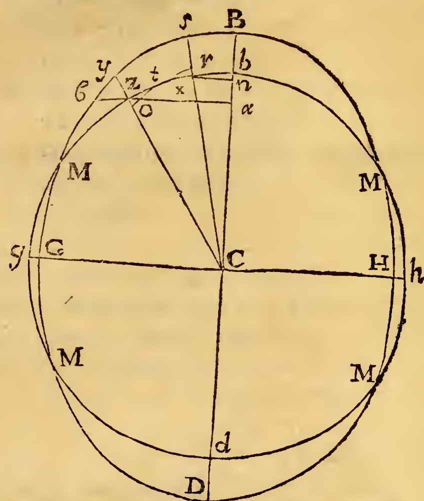
On voit donc déja que ce ne sont plus les $s\ x$ & $y\ z$, dont les variations marquent les variations des Marées pour les points x & z, & que ces variations sont exprimées ici par celles des petites lignes $r\ x$ & $o\ z$. De là on peut conclure par la seule inspection de la Figure, que les Marées doivent être d'autant plus petites, que la Mer est moins étendue en longitude; que ces Marées ne peuvent être que tout-à-fait insensibles dans la Mer Caspienne & dans la Mer Noire, & fort petites dans la Mer Méditerranée, dont la communication avec l'Océan est presque entiérement coupée au Détroit de Gibraltar. On en peut même tirer des propriétés très-singulieres de cette sorte de Marées. 1°. Que la plus haute Mer ne se fait pas ici au moment du passage des deux Luminaires par le Méridien, comme dans l'Océan, ni 6 heures lunaires après, mais au milieu, si la Mer a peu d'étendue en longitude. 2°. Que les Marées sont les plus grandes aux extrémités Orientales & Occidentales z & x, & qu'elles sont incomparablement plus petites au milieu t. 3°. Que la haute Mer dans l'une des extrémités se fait au même moment que la basse Mer dans l'autre extrémité. Voilà en gros les propriétés des Marées dans ces Mers: le Calcul en fera connoître le détail.

Pour ne point ennuyer le Lecteur par une trop longue suite de raisonnemens purement Géometriques, & dans plusieurs circonstances assez compliquées & chargées de Calcul, je ne mettrai ici que le plus précis.

Soit $B\,b + G\,g = 6$, qui marque la variation pour la Mer libre de tous côtés;

côtés : soit l'Arc $z x$, qui marque l'étendue de la Mer en longitude $= A$. Le rayon de la Terre que nous prenons pour le Sinus total $= 1$; qu'on tire $x n$ perpendiculaire à CB, & soit l'espace $z \alpha n x z = S$. Cela posé, on trouvera d'abord $y z x s = \frac{2}{3} A \beta$. Cet espace devant être égal à l'espace $y o r s$, qui est égal à la petite $s r$ multiplié par A, on en tire $s r = \frac{2}{3} \beta - \frac{S}{A} \beta$.

Si on suppose après cela $C n = n$ & $C \alpha = s$, on en aura $s x = n n \beta - \frac{1}{3} \beta$, & par conséquent $r x = n n \beta - \beta + \frac{S}{A} \beta$, & ce sont les différentes valeurs de $r x$, en considérant n & S comme variables, qui marquent les différentes hauteurs de la Mer au point x, qui est à l'extrémité occidentale de la Mer.



De cette valeur $r x$ on peut tirer géométriquement toutes les propriétés des Marées, quelque étendue qu'on suppose à la Mer, & tout ce que nous avons trouvé pour le point x, peut être déterminé de la même façon pour tel autre point dans l'Arc $z x$ qu'on voudra ; mais on remarquera surtout une propriété générale, qui est que l'Arc horaire compris entre la haute & la basse Mer, c'est-à-dire l'Arc compris entre la plus grande & la plus petite $r x$, est toûjours de 90 degrés. Pour le démontrer, il faut supposer la différentielle $r x = 0$, & faire $-dS = \frac{nn - ss}{\sqrt{1 - nn}} dn$, à cause de la valeur constante de A, d'où l'on tirera cette équation $2 A n \sqrt{1 - nn} + ss = 0$, qui marque déja la propriété générale que nous venons d'indiquer. Cette propriété donne ensuite la hauteur de la Marée, exprimée par la différence de la plus grande & de la plus petite valeur de $r x = \left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1-nn} - s\sqrt{1-ss}}{A}\right) \beta$, & on remarquera que dans toutes ces Formules, s est donnée en n & en constantes, à cause de l'Arc A donné.

Nous appliquerons ces équations générales à deux sortes de cas particuliers ;

ticuliers ; premierement, lorſque A eſt de 90 degrés ; & en ſecond lieu, lorſque cet Arc eſt fort petit.

I. Si A eſt de 90 degrés, on aura $s = \sqrt{1 - nn}$, & le lieu de la haute ou de la baſſe Mer, à l'égard du point fixe B ſera déterminé par cette Equation

$$-2An\sqrt{1-nn} + 2nn - 1 = 0,$$ qui donne

$$Cn, \text{ ou } n = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{AA+1}}\right)} = 0{,}9602,$$

qui marque que l'Arc xb eſt d'environ 16 degrés 13. minut. & que la hauteur de la Marée ſera de $0{,}844\,\varepsilon$. Nous voyons donc que ſi la Mer avoit 90 degrés d'étendue en longitude, la haute Mer ſe feroit dans les Syzygies 1 heure 5. minutes plus tard que ſi toute la Terre étoit inondée, & que la hauteur de la Marée ſeroit de 156 milliémes parties plus petite.

II. Suppoſons à préſent que l'étendue de la Mer en longitude ſoit très-petite, c'eſt-à-dire, que A exprime un Arc circulaire fort petit, & ſoit la corde de cet Arc $= B$: la Géométrie commune donne

$$s = n - \tfrac{1}{2}nBB + \tfrac{1}{2}\sqrt{4BB - 4nnBB + nnB^4 - B^4}.$$ Et B étant ſuppoſée fort petite, on changera la quantité radicale en ſuite, & l'on négligera les quantités affectées de B^3 (le Calcul fait voir à la fin, qu'il faut retenir les termes affectés de BB) & de cette maniere on trouvera

$$s = n - B\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nBB.$$

On remarquera après cela, que la différence entre l'Arc A & ſa corde B, convertie en ſuite commence par le terme $\frac{1}{4}B^3$, lequel pouvant être négligé pour notre deſſein, on mettra A à la place de B, & on aura

$$s = n - A\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nAA.$$

En ſubſtituant dans l'équation expoſée ci-deſſus

$$2An\sqrt{1-nn} - nn + ss = 0$$

la valeur trouvée pour s, & négligeant toujours les termes affectés de A^3 & de A^4, nous aurons ſimplement $n = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

L'Arc xb eſt donc pour ce dernier cas de 45 degrés, & la haute Mer, ſi elle étoit ſenſible, ne ſe feroit par conſéquent que trois heures lunaires après le paſſage de la Lune par le Méridien. La hauteur de la Marée étant généralement exprimée, comme nous avons vû ci-deſſus, par $\left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1-nn} - s\sqrt{1-ss}}{A}\right) \times \varepsilon$, il faudra ſubſtituer dans cette expreſſion les valeurs trouvées pour n & s ; ce que faiſant avec les mêmes

mes précautions, que nous avons employées en cherchant la valeur de s, on trouvera à la fin simplement la hauteur de la Marée $= A\,\beta$.

Cette expression fait voir que dans les petites Mers, les hauteurs des Marées sont proportionelles aux étendues que ces Mers ont en longitude, & les Marées se trouveront par cette Analogie. Comme le Sinus total est à l'Arc longitudinal, que la Mer renferme, ainsi la hauteur de Marée dans la Mer qui est supposée inonder toute la Terre, exprimée par β, sera à la hauteur de la Marée en question.

Appliquons maintenant tout ce que nous avons trouvé pour en tirer les propriétés des Marées dans la Mer Caspienne. Supposons pour cet effet, que dans les conjonctions & oppositions des Luminaires, la hauteur des Marées grandissimes dans la Mer du Sud (dans laquelle les Marées ne sçauroient manquer d'atteindre presque toute la hauteur, qu'elles auroient, si toute la Terre étoit inondée) est sous l'Equateur de 8 pieds: c'est la hauteur que les Relations de voyages m'ont fait adopter pour la Mer libre, & que je crois qu'on remarquera sur les Côtes escarpées des petites Isles situées près de l'Equateur dans ladite Mer du Sud: Cela étant, j'ai démontré dans la Proposition (II.) du XII. §. du Chapitre précédent, que les grandes Marées ne seront plus que de 4 pieds à la hauteur de 45 degrés, où je suppose le milieu de la Mer Caspienne. Si nous donnons après cela à cette Mer dix dégrés d'étendue en longitude, cet Arc fait environ la sixiéme partie du Rayon, & la hauteur des grandissimes Marées devroit être par conséquent aux extrémités Orientale & Occidentale de la Mer Caspienne d'environ huit pouces: mais elles seront nulles au milieu de la Mer. Je suppose cette agitation de la Mer trop petite pour avoir pû être remarquée par les gens qui ont été sur les lieux, & qui sans doute n'ont pas fait un examen fort scrupuleux là-dessus, & qui n'auroient pas manqué de l'attribuer à des causes accidentelles, s'ils avoient remarqué quelque petite élévation & baissement des eaux. J'espére que des Observations plus exactes confirmeront un jour ce que je viens d'indiquer sur les Marées de la Mer Caspienne.

On doit faire le même raisonnement sur la Mer Noire, qui peut être considérée comme détachée de la Mer Méditerranée, à cause du peu de largeur du Détroit qui est entre deux. Il est à remarquer qu'on a observé dans cette Mer des Marées, quoique très-petites.

On voit aussi que les Marées dans la Mer Méditerrannée doivent être beaucoup plus petites, que dans l'Océan, sur-tout si l'on fait attention que cette Mer n'est tout-à-fait ouverte que depuis l'Isle de Chypre jusqu'à celle de Sicile.

III.

Comment les Marées peuvent être beaucoup plus grandes sur les Côtes, dans les Bayes, dans les Golfes, &c. que dans la Mer libre de tous côtés.

Pour répondre à cette question, il faut encore faire réflexion à ce que j'ai déja dit, que si les Luminaires restoient à un même lieu, & que le mouvement journalier de la Terre se fit avec une lenteur infinie, les eaux qui inondent la Terre, ne pourroient point manquer d'être dans un parfait équilibre, & les Marées auroient par-tout les hauteurs qu'on leur a prescrites dans cet Ouvrage, sans que la configuration des Côtes ou autres causes semblables les pût déranger, pourvû que l'endroit en question communiquât avec l'Océan : d'ailleurs les eaux ne feroient que monter & descendre verticalement; excepté aux Côtes, qui alternativement sont baignées, & restent à sec, & ausquelles les eaux auroient quelque mouvement horisontal, quoi qu'infiniment lent, & la direction de ce mouvement des eaux dépendroit dans ce cas, aussi bien que dans les autres, de la direction de la pente des Côtes. Mais la vîtesse du mouvement journalier de la Terre, qui fait que dans le tems d'un jour tout l'Océan doit faire quatre mouvemens & agitations reciproques, rend ces mouvemens fort sensibles. Comme outre cela la Mer n'inonde pas toute la Terre, & qu'il y a de grands Golfes, Canaux, &c. qui par l'élévation & baissement des eaux, sont tantôt plus tantôt moins pleins, il faut que ceux-ci reçoivent les eaux & les renvoyent alternativement vers des endroits qui s'empliront, pendant que les autres se vuideront, & de là doivent provenir des mouvemens horisontaux, qu'on appelle communément Flux & Reflux. Ce sont ces mouvemens horisontaux, qui se faisant vers des endroits plus serrés, peuvent produire les grandes Marées, qui vont dans de certains endroits au-delà de 60 pieds; c'est aussi cette raison qui rend les Marées plus grandes dans le Golfe de Venise, qu'elles ne sont dans la Mer Méditerrannée. C'est ici qu'on peut faire un grand usage de ce que divers Auteurs ont donné sur le mouvement des eaux, & je m'assure que moyennant les connoissances qu'on a déja sur cette matiére, on pourroit rendre exactement raison de tous les différens Phénomenes, qui s'observent sur les Marées aux endroits différemment situés. Mais un tel examen demanderoit des volumes, & des années pour les faire.

IV.

Quelle est en gros la nature des Marées au Détroit de Gibraltar.

Les Marées doivent sans doute être beaucoup plus compliquées, & paroître plus irrégulieres au Détroit de Gibraltar, que dans d'autres endroits, parce qu'il s'y fait un concours de deux sortes de Marées, dont l'une vient de l'Océan, & l'autre de la Méditerranée ; & on voit facilement, que si les Marées consistoient simplement à élever & baisser les eaux, sans causer des Courans, il y auroit sur ces Côtes quatre Marées par jour, c'est-à-dire, que les eaux monteroient & descendroient quatre fois, parce que les Marées des deux Mers ne se font pas en même tems : mais comme il se forme des Courans reciproques, chaque Courant tâche à se conserver, & de là il se forme des lisieres, qui ont chacune des mouvemens différens : celles qui sont sur les Côtes de chaque côté, paroissent devoir être attribuées aux Marées de la Méditerranée, & deux autres qui les touchent, aux Marées de l'Océan: on remarque même au milieu une cinquiéme lisiere, dont le mouvement n'est pas si irrégulier que celui des quatre autres, & qui ne fait voir presque aucun rapport avec la Lune : il semble que ce Courant ne doit sa source, qu'à un défaut d'équilibre entre les deux Mers.

Je dirai à cette occasion, qu'il peut arriver de même, que les Marées sont formées dans un certain Port par le mouvement des eaux, qui viennent de deux différens côtés & à divers tems : il semble qu'il faut tirer de là qu'il peut y avoir des endroits où le Flot dure constamment plus long-tems que le Jusan, & qu'il y en a d'autres où il arrive le contraire. Cette même cause peut encore produire plusieurs sortes de Phénomenes particuliers à de certains endroits.

V.

Pourquoi les petites Marées sont beaucoup plus inégales, par rapport à leur grandeur, que les grandes Marées.

Nous avons déja vû que les petites Marées qui suivent les Quadratures, doivent être fort susceptibles de plusieurs irrégularités, tant par rapport au moment de la haute & basse Mer, que par rapport à la hauteur de la Marée.

Il me semble qu'on doit outre cela remarquer les grandes inégalités qui régnent parmi les petites Marées, quoique tout-à-fait régulieres, pouvant sous diverses circonstances croître jusqu'au double, pendant que les grandes Marées ne croissent que d'environ un quart. Pour rendre raison de cette Observation qu'on a faite, il faut se ressouvenir des circonstances essentielles & fondées dans la nature des Marées, qui peuvent les rendre, tantôt plus grandes, tantôt plus petites dans un même lieu, quoique l'âge de la Lune ne différe point.

Nous avons vû que ce sont les diverses distances des Luminaires à la Terre,

Terre, & leurs différentes déclinaiſons, qui peuvent encore changer les hauteurs des Marées, lorſque l'âge de la Lune, & la latitude du lieu ſont les mêmes. Le calcul nous a enſeigné auſſi, que l'effet de la diverſité des déclinaiſons des Luminaires eſt beaucoup plus petit que celui de la diverſité des diſtances : comme donc la diverſité des diſtances eſt beaucoup plus grande dans la Lune, que dans le Soleil, & que le Soleil a en même tems beaucoup moins de force que la Lune, on peut pour eſtimer en gros les variations des petites Marées, & les variations des grandes Marées, ſimplement faire attention aux diſtances de la Lune : nous avons trouvé que la diverſité des diſtances peut faire varier l'action de la Lune depuis 2 à 3, l'action du Soleil que nous conſidérons comme conſtante, étant exprimée par l'unité. Cela étant, & les hauteurs des petites Marées étant auſſi proportionnelles aux différences des actions des deux Luminaires, nous voyons que les hauteurs de ces petites Marées doivent être contenues dans les termes de $2-1$, & $3-1$, ou 1 & 2, pendant que les hauteurs des grandes Marées, qui ſont proportionnelles aux ſommes des actions des Luminaires, ſeront renfermées dans les termes de $2+1$ & $3+1$, c'eſt-à-dire, de 3 & 4.

Leſdits termes ſont confirmés par les Obſervations, comme par exemple, par celles qui ſont expoſées dans les Mémoires de l'Académie de 1713. pag. 287. & 288. Nous voyons de cette raiſon, que les variations abſoluës doivent être à peu-près les mêmes dans les petites Marées & dans les grandes Marées, & c'eſt ce que les Obſervations citées confirment auſſi; & comme ces variations ſont par conſéquent plus ſenſibles dans les petites Marées que dans les grandes Marées, il faudra peut-être ſe ſervir plûtôt des premieres, que des autres, pour examiner par des Obſervations ce que les diverſes circonſtances peuvent contribuer pour faire varier les hauteurs des Marées.

VI.

Pourquoi les Marées étant montées plus haut, & ayant inondé plus de terrain pendant le Flot, deſcendent en même tems davantage, & laiſſent plus de terrain à ſec pendant le Juſan, & quelle proportion il y a entre les montées & deſcentes.

Nous voyons la premiere Queſtion indiquée, comme fort remarquable dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1712. pag. 94. La raiſon en eſt que les Marées ſont une eſpece de mouvement oſcillatoire, ou de balancement; car il y a dans ces balancemens un point d'équilibre, qui doit paſſer pour fixe, & au-deſſus duquel l'eau doit être cenſée s'élever dans la haute Mer, & ſe baiſſer dans la baſſe Mer. On pourroit croire d'abord que les élévations & deſcentes de l'eau à l'é-

gard du point fixe, font conftamment proportionnelles, & en ce cas notre Problême feroit réfolu dans toute fon étendue avec beaucoup de facilité. Mais il y a une toute autre proportion bien plus variable & bien plus compliquée, que nous allons rechercher, d'autant que ce n'eft pas proprement la hauteur des Marées dans le fens que nous lui avons donné jufqu'ici, qu'il importe davantage de connoître dans la Navigation pour l'entrée & fortie des Vaiffeaux dans les Ports ou les Rades: il s'y agit plutôt de connoitre la hauteur abfolue des eaux, lorfqu'elles font arrivées à leur plus grande ou leur plus petite hauteur; & pour cet effet, il faut fçavoir dans chaque Marée, tant l'élévation des eaux à l'égard du point fixe, que leur baiffement: jufqu'ici nous n'avons déterminé que la fomme de ces variations fous le nom de hauteur de la Marée.

Voyons d'abord comment il faudra déterminer le point fixe: il eft vrai qu'il eft en quelque façon arbitraire, cependant il paroît le plus convenable de le placer là, où atteindroit la furface de la Mer, fi les Marées étoient nulles. Un tel point doit être confidéré comme demeurant conftamment à la même hauteur; car les caufes qui peuvent le hauffer ou le baiffer, telles que font les Vents, les Courans inégaux, &c. ne font que paffageres & purement accidentelles. Il s'agit donc à préfent de fçavoir, combien les eaux montent au-deffus de ce point fixe dans la haute Mer, & combien elles defcendent au-deffous du même point dans la baffe Mer. Cette Queftion dépend de toutes les circonftances qui concourent pour former la hauteur abfolue des Marées, & que nous avons examinées au long avec tout le foin poffible. Ce feroit donc fe jetter de nouveau dans les mêmes difficultés, fi nous voulions traiter la préfente Queftion avec la même rigueur, & auffi fcrupuleufement, que nous avons fait l'autre; c'eft pourquoi nous ne confidérerons que les circonftances fondamentales & principales, qui font que la Terre eft toute inondée, que les Luminaires font dans le plan de l'Equateur, & que la latitude du lieu eft nulle, faifant abftraction de toutes les caufes fecondes: ceux qui voudront enfuite une Solution plus exacte, n'auront qu'à confulter les Chapitres VIII. & IX. pour y arriver.

Soit donc encore (comme nous avons fuppofé au Chap. V., *bεsδb* l'Equateur, & que *b* marque le lieu du Soleil, *ε* celui de la Lune, & *z* le point de la plus grande élévation des eaux, exprimée par *yz*; fi l'on prend un Arc de 40 degrés *zs*, le point *s* marquera l'endroit du plus grand baiffement des eaux, exprimé par *sx*: nous avons démontré là-deffus au VIII. §. du Chap. V. qu'on a généralement

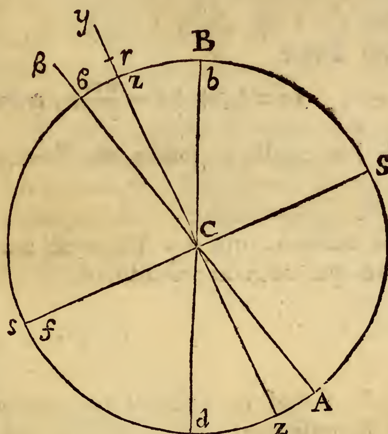
$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \varepsilon + \frac{2bb - 3\varrho\varrho}{3bb} \times \delta.$$

dans laquelle équation *b* marque le Sinus total, *σ* le Sinus de l'Angle

bCz,

bCz, déterminé au §. XI. Chap. V. ϱ le Sinus de l'Angle ϱCz, exprimé au §. XIII. Chap. V. ϵ la hauteur des Marées entant qu'elles seroient produites par la seule action de la Lune. Nous avons démontré pareillement au III. §. Chap. VIII. qu'en regardant sx comme positive, de négative qu'elle est par rapport à yz, on a généralement

$$sx = \frac{bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \epsilon + \frac{bb - 3\varrho\varrho}{3bb} \times \delta.$$



Or comme les points z & s, qui sont de niveau, marquent le point fixe dans le sens que nous venons de lui donner, on voit que ces quantités yz & sx marquent précisément l'élévation des eaux au dessus du point fixe, & leur baissement au-dessous du même point, tels que nous sommes proposés de les déterminer. Des valeurs que nous venons de trouver, on pourra tirer les Corollaires suivans.

(a) La différence entre chaque élévation au-dessus du point fixe, & la descente au-dessous du même point, est toujours $= \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\delta$: d'où nous voyons déja que l'une croissant ou diminuant, l'autre doit croître ou diminuer aussi, qui est le Phénomene observé par M. Cassini. Cette différence fait *environ* le tiers de la plus grande hauteur de Marée: je dis *environ*, parce que les quantités ϵ & δ sont variables, quoique leurs variations soient beaucoup plus petites que celles qui résultent des différens âges de la Lune, & à cet égard on peut dire que la différence dont il s'agit ici, est presque constante.

(b) Dans les Syzygies (ou plûtôt un jour & demi après) les quantités ϱ & σ doivent être supposées $= 0$, & ainsi on a $yz = \frac{2}{3}\epsilon + \frac{2}{3}\delta$, & $sx = \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\delta$: la montée est donc dans les grandes Marées toujours double de la descente. Cette propriété servira à déterminer commodément le point fixe dans chaque Port, & elle le donne de 5. pieds 3 pouces plus haut pour Brest, qu'il n'a été choisi par les Observateurs, si on la compare avec l'Observation, qui est au milieu de la page 94. des Mém. de l'Acad. des Scienc. de 1712.

(c) Dans les Quadratures (ou un jour & demi après) il faut faire $\varrho = 0$, & $\sigma = b$, ce qui donne $yz = \frac{2}{3}\delta - \frac{1}{3}\epsilon$, & $sx = \frac{1}{3}\delta - \frac{2}{3}\epsilon$: d'où l'on voit que la montée & descente des eaux à l'égard de notre point fixe, ont une raison variable dans les petites Marées, qui dépend du rap-

rapport qui se trouve alors entre la force lunaire δ, & la force solaire ϵ. Nous avons supposé dans cet Ouvrage ce rapport moyen comme 5 à 2, & ce rapport posé, il faut dire que dans les petites Marées, l'élévation des eaux au-dessus de notre point fixe, est 8 fois plus grande que leur baissement au-dessous du même point. Dans les Marées minimes nous avons supposé $\delta = 2\,\epsilon$, & dans les plus grandes des petites Marées $\delta = 3\,\epsilon$.

(*d*) Nous avons fait voir, que le point *z* n'est jamais éloigné beaucoup du point ϵ, cela étant & faisant le Sinus de l'Angle $bc\epsilon$ (qui marque l'âge de la Lune) $= m$, on pourra supposer $\varrho = 0$ & $\sigma = m$, ce qui donne

$$yz = \tfrac{2}{3}\epsilon + \tfrac{2}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\epsilon, \text{ \& } sx = \tfrac{1}{3}\epsilon + \tfrac{1}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\epsilon.$$

Si l'on applique toutes ces Regles aux Observations faites en différens tems & lieux, on y trouvera un grand accord, si l'on choisit bien la juste proportion entre les quantités δ & ϵ. Mais on remarquera dans cet examen, que les Vents & les Courans peuvent faire varier le point fixe que nous avons adopté.

CONCLUSION.

Je finirai ce discours par quelques refléxions sur notre Théorie. Elle suppose avant toutes choses une pesanteur vers les centres du Soleil & de la Lune, pareille à celle qui se fait vers le centre de la Terre, & que cette pesanteur s'étend au-delà de la région de la Terre. C'est le seul principe qui nous soit absolument nécessaire, & il n'y a personne qui le conteste. La rondeur des Luminaires prouve suffisamment la pesanteur qui se fait vers le centre ; & quelle raison pourroit-on avoir pour donner des limites à cette pesanteur ? Aussi a-t-elle été reconnue depuis les siécles les plus reculés ; mais on n'en a connu toute l'évidence & toutes les loix, que depuis la Philosophie immortelle de M. NEWTON. Les premieres conséquences que nous avons tirées de ce principe pour l'explication des Marées, sont purement Géométriques. Nous pouvons donc être assurés de connoître la vraie cause des Marées, quoique nous en ignorions encore la cause premiere, qui est la cause générale & physique de la pesanteur. S'il y avoit quelqu'un qui eût deviné cette premiere cause, il mériteroit d'autant plus la préférence, que son Systême renfermeroit nécessairement la vraie cause universelle de la pesanteur : cette conséquence sera la pierre de touche pour prouver la vérité d'un tel Systême sur les Marées. Il en est de ceci, comme si l'on demandoit, par exemple, pourquoi la surface de l'eau dans un reservoir se met toujours horisontalement : on voit qu'on ne sçauroit en di-

re

re la premiere cauſe, ſans qu'elle renferme la vraie Théorie ſur la peſanteur & ſur la fluidité, qui ſeules peuvent être la vraie cauſe du Phénomene en queſtion. Cette ſeule refléxion m'a fait quitter quelques conjectures qui ſe préſentoient à mon eſprit ſur la cauſe matérielle des Marées, quoi qu'elles me paruſſent d'ailleurs aſſez plauſibles. Je n'ai fait au reſte en employant ce principe, que ce que Kepler a déja fait. M. Newton eſt allé beaucoup plus loin ſur cette matiere, après avoir démontré auparavant que la peſanteur vers chaque corps dans le Syſtême du monde diminue en raiſon quarrée reciproque des diſtances: d'où il a tiré pluſieurs nouvelles propriétés ſur les Marées, leſquelles s'accordant avec les Obſervations, pourroient confirmer davantage ſon principe ſur la diminution de la peſanteur, s'il avoit beſoin d'autres preuves. Ce principe n'a pourtant pas beaucoup d'influence, ſi je me ſouviens bien, ſur les variations des Marées, qui dépendent des Phaſes de la Lune, des declinaiſons des Luminaires & de la latitude des lieux, ſoit à l'égard des hauteurs des Marées, ſoit à l'égard des Marées. Il ne ſert principalement qu'à déterminer au juſte les variations qui dépendent des différentes diſtances des Luminaires à la Terre, & que les Obſervations n'ont pû déterminer avec aſſez de préciſion; il n'y en a cependant aucune qui lui ſoit contraire, & pluſieurs Obſervations bien détaillées, ſont tout-à-fait conformes aux réſultats que ce principe donne. On remarquera enfin que ce que j'ai dit ſur la peſanteur terreſtre, que j'ai conſidérée comme formée par l'attraction univerſelle de la matiere, n'a abſolument aucun rapport avec aucune variation des Marées; ces Marées pourront ſubſiſter telles qu'elles ſont, quelle que ſoit la nature de la peſanteur à cet égard: tout cet examen ne nous a ſervi que par rapport à la queſtion, quelle devroit être la hauteur abſolue de la hauteur des Marées, ſans le concours d'une infinité de cauſes ſecondes, qui peuvent augmenter & diminuer ces hauteurs abſolues, de ſorte que quel qu'eût été le réſultat de ces recherches, notre Théorie n'en eût pû ſouffrir aucune atteinte. J'eſpére avec tout cela, qu'on n'aura pas trouvé ces recherches inutiles à l'égard de pluſieurs circonſtances qui en ont été éclaircies, outre que nos déterminations donnent, en choiſiſſant les hypotheſes les plus vraiſemblables, des nombres tels que la nature de la choſe paroît exiger. Nous pouvons donc être tout-à-fait ſûrs de n'avoir rien admis d'eſſentiel dans toutes nos recherches, qui ne ſoit au-deſſus de toute conteſtation.

Quant à l'application de nos principes, à l'uſage que j'en ai fair, & au ſuccès de mon travail, ce n'eſt pas à moi à faire cet examen, ſur-tout ne pouvant le faire, ſans entrer dans un certain parallele avec un auſſi grand Homme qu'étoit M. Newton. Si j'ai eu quelques ſuccès, je dois avouer à l'honneur de ce ſçavant Philoſophe, que c'eſt

lui qui nous a mis en état de raiſonner ſolidement ſur ces ſortes de matieres ; & ſi j'oſe me flatter de quelque mérite, c'eſt celui d'avoir traité notre ſujet avec une attention & une exactitude conforme aux grande vûës de L'ACADEMIE, & au reſpect qu'on doit à cet illuſtre Corps.



DE
CAUSA PHYSICA
FLUXUS ET REFLUXUS
MARIS.

A D. D. MAC-LAURIN *Mathematicarum Professore, è Societate Academiæ Edimburgensis.*

OPINIONUM COMMENTA DELET DIES, NATURÆ JUDICIA CONFIRMAT.

SECTIO I.

PHÆNOMENA.

PHILOSOPHI motum Maris triplicem olim agnoverunt *, diurnum, menstruum & annuum; motu diurno Mare bis singulis diebus intumescit defluitque, menstruo æstus in Syzygiis Luminarium augentur, in Quadraturis minuuntur, annuo denique æstus hyeme quàm æstate fiunt majores: verùm Phænomena hæc sunt paulò accuratiùs proponenda.

I. Motus Maris diurnus absolvitur horis circiter solaribus 24. minutisque primis 48, intervallo scilicet temporis quo Luna motu apparente à Meridiano loci cujusvis digressa ad eundem revertitur. Hinc altitudo Maris maxima contingit Lunâ appellente ad datum situm respectu Meridiani loci dati; verùm hora solaris in quam incidit æstus singulis diebus retardatur, eodem ferè intervallo quo Lunæ appulsus ad Meridianum loci. Atque hic motus adeò accuratè ad motum Lunæ componitur, ut, secundùm Observationes à celeb. D. Cassini allatas, ratio sit habenda horæ in quam incidit vera conjunctio vel oppositio Solis, & æquatio à

 motu

* Plin. Lib. 2. Cap. 99.

motu Lunæ desumpta adhibenda, ut tempus quo Mare ad maximam assurget altitudinem die Novilunii vel Plenilunii accuratiùs definiatur. In æstuariis autem diversi existunt æstus tempore, ut loquitur Plinius, non ratione discordes. Duo æstus qui singulis diebus producuntur, non sunt semper æquales; matutini enim majores sunt vespertinis tempore hyberno, minores tempore æstivo, præsertim in Syzygiis Luminarium. (*a*).

II. De motu Maris menstruo tria præcipuè sunt observanda. 1. Æstus fiunt maximi singulis mensibus paulò post Syzygias Solis & Lunæ, decrescunt in transitu Lunæ ad Quadraturas, & sunt paulò post minimi. Differentia tanta est, ut ascensus totius aquæ maximus sit ad minimum ejusdem mensis, secundùm quasdam Observationes, ut 9 ad 5; & in nonnullis casibus differentia observatur adhuc major. 2. Æstus sunt majores, cæteris paribus, quò minor est distantia Lunæ à Terra, idque in majori ratione quàm inversa duplicata distantiarum, ut ex variis Observationibus colligitur. Ex. gr. anno 1713. ascensus aquæ in Portu Bristonico, (*b*) referente eodem Cl. viro, 26°. Febr. fuit pedum 22 digitorum 5. & Martii 13°. pedum 18. digit. 2. Declinatio Lunæ in utroque casu ferè eadem; in priori distantia Lunæ partium 953, in posteriori partium 1032, quarum distantia mediocris est 1000. Est autem quadratum numeri 1032 ad quadratum numeri 953, ut 22. pedes 5 digit. ad 19 pedes $1\frac{2}{5}$ digitos; ascensus autem aquæ in posteriori casu fuit tantùm 18. ped. cum 2. digitis. 3. Æstus sunt, cæteris paribus, majores, cùm Luna versatur in Circulo æquinoctiali, & minuuntur crescente Lunæ declinatione ab hoc Circulo.

III. Æstus fiunt, cæteris paribus, majores, quò minor est distantia Solis à Terra; adeòque majores hyeme cæteris paribus, quàm æstate. Differentia verò longè minor est quàm quæ ex diversis Lunæ distantiis oritur. Ex. gr. distantiæ Lunæ perigeæ fuerunt æquales Junii 19. 1711. & Decemb. 28. 1712. ascensus aquæ priore die pedum 18 digit. 4, posteriori pedum 19 digit. 2; declinatio autem Lunæ fuit paulò minor in hac quàm in illa Observatione. (*c*).

Porrò in diversis locis æstus sunt diversi, pro varia locorum latitudine, eorumque situ respectu Oceani unde propagantur, pro ipsius Oceani amplitudine, & littorum fretorumque indole, aliisque variis de causis.

SECTIO II.

Principia.

Phænomenis æstus Maris insignioribus breviter recensitis, progredimur ad

(*a*) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.
(*b*) *Ibid.* (*c*) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.

ad Principia, unde horum ratio eſt reddenda. Liceat tamen præfari nobiliſſimam quidem, ſed ſimul difficilimam eſſe hanc Philoſophiæ partem, quæ Phænomenorum cauſas inveſtigat & explicat. Ea eſt Naturæ ſubtilitas, ut non ſit mirum cauſas primarias, ſolertiam Philoſophorum plerumque effugere. Qui omnium Phænomenorum rationes, exponere, integramque cauſarum ſeriem nobis exhibere in ſe ſuſceperunt; illi certè magnis ſuis auſis hucuſque exciderunt. Philoſophiam quidem perfectiſſimam viri clariſſimi ſibi propoſuerunt exſtruendam, qualem tamen humanæ ſorti competere fas eſt dubitare. Præſtat igitur tantorum virorum ſucceſſu minùs felici edoctos, ipſius naturæ veſtigia cautè & lentè ſequi. Quòd ſi Phænomena ad generalia quædam Principia reducere poſſimus, horumque vires calculo ſubjicere, hiſce gradibus aliquam veræ Philoſophiæ partem aſſequemur; quæ quidem manca ſeu imperfecta erit, ſi ipſorum Principiorum cauſæ lateant: tanta tamen ineſt rerum naturæ venuſtas, ut ea pars longè præſtet Subtiliſſimis virorum acutiſſimorum commentis.

Motus Maris cuivis vel leviter perpendenti manifeſtum eſt Luminarium, Lunæ præſertim, motibus affines eſſe & analogos. Eadem eſt periodus motûs Maris diurni ac Lunæ ad Meridianum loci, eadem motûs menſtrui ac Lunæ ad Solem; utriuſque Luminaris vis in motu Maris generando hinc elucet, quòd æſtus ſint majores quò minores utriuſque diſtantiæ à Terra; adeò ut nullus ſit dubitandi locus, motum Maris eſſe aliquâ ratione ad motum Lunæ & Solis compoſitum. Quales autem dicemus illas eſſe vires quæ à Luna & Sole propagatæ (aut ab his aliquo modo pendentes) aquam bis ſingulis diebus tollunt & deprimunt; quæ in Syzygiis Luminarium conſpirant, Quadraturis pugnant; in minoribus utriuſque diſtantiis augentur, in majoribus minuuntur; quæ in minori Lunæ declinatione fortiores, in majori debiliores ſunt; & nonnunquam majorem motum cient cùm Sol & Luna infra Horizontem deprimuntur, quàm cùm in Meridiano ſuperiori ambo dominantur. Fuerunt Viri celeberrimi qui æſtum Maris preſſione quâdam Lunæ cieri putarunt. Verùm cauſam & menſuram hujus preſſionis non oſtenderunt, nec quo pacto motus Maris varii hinc oriri poſſint ſatis clarè indicarunt, multò minùs motus illos (hoc principio poſito) ad Calculum revocare docuerunt.

Sagaciſſimus Keplerus Mare versùs Lunam gravitare, æſtumque Maris hinc cieri olim monuit. Newtonus, poſtquàm leges gravitatis detexiſſet, invenit æquilibrium Maris non tam turbari ipſius gravitate versùs Lunam, quàm ex inæqualitate vis quâ particulæ Maris tendunt ad Lunam & Solem pro diverſis ſuis diſtantiis ab horum centris, primuſque motum Maris ad certas Leges, & ad Calculum revocare docuit. Fatendum quidem eſt gravitatis cauſam ignotam eſſe vel ſaltem obſcuram;

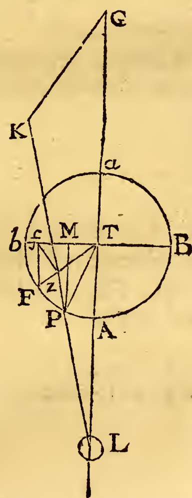
ad Principia, unde horum ratio eſt reddenda. Liceat tamen præfari nobiliſſimam quidem, ſed ſimul difficilimam eſſe hanc Philoſophiæ partem, quæ Phænomenorum cauſas inveſtigat & explicat. Ea eſt Naturæ ſubtilitas, ut non ſit mirum cauſas primarias, ſolertiam Philoſophorum plerumque effugere. Qui omnium Phænomenorum rationes, exponere, integramque cauſarum ſeriem nobis exhibere in ſe ſuſceperunt; illi certè magnis ſuis auſis hucuſque exciderunt. Philoſophiam quidem perfectiſſimam viri clariſſimi ſibi propoſuerunt exſtruendam, qualem tamen humanæ ſorti competere fas eſt dubitare. Præſtat igitur tantorum virorum ſucceſſu minùs felici edoctos, ipſius naturæ veſtigia cautè & lentè ſequi. Quòd ſi Phænomena ad generalia quædam Principia reducere poſſimus, horumque vires calculo ſubjicere, hiſce gradibus aliquam veræ Philoſophiæ partem aſſequemur; quæ quidem manca ſeu imperfecta erit, ſi ipſorum Principiorum cauſæ lateant : tanta tamen ineſt rerum naturæ venuſtas, ut ea pars longè præſtet Subtiliſſimis virorum acutiſſimorum commentis.

Motus Maris cuivis vel leviter perpendenti manifeſtum eſt Luminarium, Lunæ præſertim, motibus affines eſſe & analogos. Eadem eſt periodus motûs Maris diurni ac Lunæ ad Meridianum loci, eadem motûs menſtrui ac Lunæ ad Solem; utriuſque Luminaris vis in motu Maris generando hinc elucet, quòd æſtus ſint majores quò minores utriuſque diſtantiæ à Terra; adeò ut nullus ſit dubitandi locus, motum Maris eſſe aliquâ ratione ad motum Lunæ & Solis compoſitum. Quales autem dicemus illas eſſe vires quæ à Luna & Sole propagatæ (aut ab his aliquo modo pendentes) aquam bis ſingulis diebus tollunt & deprimunt; quæ in Syzygiis Luminarium conſpirant, Quadraturis pugnant; in minoribus utriuſque diſtantiis augentur, in majoribus minuuntur; quæ in minori Lunæ declinatione fortiores, in majori debiliores ſunt; & nonnunquam majorem motum cient cùm Sol & Luna infra Horizontem deprimuntur, quàm cùm in Meridiano ſuperiori ambo dominantur. Fuerunt Viri celeberrimi qui æſtum Maris preſſione quâdam Lunæ cieri putarunt. Verùm cauſam & menſuram hujus preſſionis non oſtenderunt, nec quo pacto motus Maris varii hinc oriri poſſint ſatis clarè indicarunt, multò minùs motus illos (hoc principio poſito) ad Calculum revocare docuerunt.

Sagaciſſimus Keplerus Mare versùs Lunam gravitare, æſtumque Maris hinc cieri olim monuit. Newtonus, poſtquàm leges gravitatis detexiſſet, invenit æquilibrium Maris non tam turbari ipſius gravitate versùs Lunam, quàm ex inæqualitate vis quâ particulæ Maris tendunt ad Lunam & Solem pro diverſis ſuis diſtantiis ab horum centris, primuſque motum Maris ad certas Leges, & ad Calculum revocare docuit. Fatendum quidem eſt gravitatis cauſam ignotam eſſe vel ſaltem obſcuram;

ſequi rationem materiæ Corporis versùs quod dirigitur, ex principio memorato aliiſque argumentis colligitur. Similis eſt ratio aliarum virium quæ in naturâ dominantur. Lucis radii ex. gr. magis refringuntur, cæteris paribus, quò denſiora ſunt Corpora quæ ſubintrant. Terræ partes versùs ſe mutuò gravitant, non versùs illud punctum fictum quod centrum Terræ appellamus; quod cùm rationi & analogiæ naturæ ſit maximè conſentaneum, tum pulcherrimè confirmatur accuratiſſimis experimentis quæ in Boreali Europæ parte nuper inſtituerunt viri clariſſimi ex Academia Regia Pariſienſi. Cauſa gravitatis (quæcumque demum ſit) latè dominatur; cumque ſit diverſa in diverſis diſtantiis, non eſt mirandum, ejus vim pendere quoque à magnitudine illius Corporis, versùs quod alia impellit. Fatemur vim hanc Corpori centrali impropriè tribui; expedit quidem brevitatis gratiâ ſic loqui, id autem ſenſu vulgari non Philoſophico eſt intelligendum.

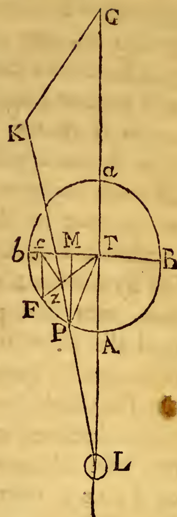
Hæc breviter tantùm hîc attingimus. Newtonus poſtquàm definiviſſet vim Solis ad aquas turbandas ex differentiâ diametri Æquatoris & Axis Terræ (quam approximatione quâdam ſuâ inveſtigaverat) per regulam auream quærit breviter aſcenſum aquæ ex vi Solis oriundum. Verùm quamvis elevatio aquæ quæ ſic prodit parum à verâ differat, cùm tamen Problemata hæc ſint diverſi generis, quorum priùs pendet à Quadraturâ circuli, poſterius autem à Quadraturâ Hyperbolæ ſeu Logarithmis, ut poſteà videbimus; ſitque dubitandi locus an à priori ad poſteriorem elevationem determinandam, tranſitus adeò brevis ſit omni ex parte legitimus, vel etiam an Methodus quâ figuram Terræ definiverat ſit ſatis accurata; cúmque vires ſubtiliſſimæ motum Maris producant, quæ nullos alios ſenſibiles edunt effectus, adeò ut leviſſima quæque in hac diſquiſitione alicujus momenti eſſe poſſint; propterea exiſtimavi me facturum operæ prætium, ſi aliam aperirem viam quâ calculus in hiſce Problematibus ex genuinis principiis accuratiſſimè inſtitui poterit.



Repetenda imprimis ſunt pauca ex Newtono, poſtea viam diverſam ſequemur. Sit L Luna, T centrum Terræ, Bb planum rectæ LT perpendiculare, P particula quævis Terræ; ſitque PM perpendicularis in planum Bb. Repræſentet LT gravitatem Terræ mediocrem vel particulæ in centro T poſitæ versùs Lunam, ſumatur LK ad LT, ut eſt LT^2 ad LP^2, eritque recta LK menſura gravitatis particulæ P in Lunam. Ducatur KG rectæ PT parallela, occurratque LT productæ, ſi opus eſt, in G, & reſolvetur vis LK in vires KG & LG, quarum prior urget par-

ticulam

ticulam *P* versùs centrum Terræ eſtque ferè æqualis ipſi *PT*; poſterioris pars *TL* omnibus particulis communis, & ſibi ſemper parallela, motum aquæ non turbat; altera verò pars *TG* eſt quàm proximè æqualis ipſi 3 *PM*: * Imprimis igitur quærendum eſt quænam debeat eſſe figura Terræ fluidæ cujus particulæ versùs ſe mutuò gravitant viribus in inversâ diſtantiarum ratione, duplicatâ decreſcentibus, quæque ſimul agitantur duabus viribus extraneis, quarum altera versùs centrum *T* dirigitur, eſtque ſemper ut *PT* diſtantia particulæ à centro, altera agit in rectâ ipſi *TL* parallela eſtque ad priorem ut 3 *PM* ad *PT*. Oſtendemus autem Sectione ſequenti figuram hujus Fluidi eſſe accuratè Sphæroidem quæ gignitur revolutione Ellipſeos circà Axem tranſverſum, ſi Terra ſupponatur uniformiter denſa; atque hinc calculum motûs Maris ex motibus cœleſtibus deducere conabimur.



Obſervandum autem alias cauſas conſpirare ad motus Maris producendos cum inæquali gravitate partium Terræ versùs Lunam & Solem. Motus Terræ diurnus circa Axem ſuum variis modis æſtum Maris afficere videtur, præter illum à Newtono memoratum, quo æſtus ad horam lunarem ſecundam aut tertiam retardatur. 1. Æſtus fit paulò major ob vim centrifugam & figuram ſphæroïdicam, ex motu Terræ oriundam, cùm hæc vis paulò major evadat in partibus Maris altioribus quàm in depreſſioribus. 2. Cùm Maris æſtus fertur vel à Meridie versùs Septentrionem, vel contrà à Septentrione versùs Meridiem, incidit in aquas, quæ diversâ velocitate circa Axem Terræ revolvuntur, atque hinc motus novos cieri neceſſe eſt, ut poſtea dicemus. Porrò ſecundùm Theoriam gravitatis, vis quâ particulæ Maris urgentur versùs Terram ſolidam, (quæ aquâ longè denſior eſt) ſuperat vim quâ versùs aquam urgentur. Vires illæ ſunt quidem exiguæ; cùm autem vires quibus Luna & Sol in aquas agunt, in experimentis pendulorum & ſtaticis *nullos* producant effectus ſenſibiles, tantos autem motus in aquis *Oceani* generent, ſuſpicari licet vires tantillas ad aquæ motus augendos aliquâ ex parte conducere.

* Vis hæc paulò major eſt ſi particula *P* ſit in parte Terræ Lunæ obverſa, minor ſi in parte Lunæ averſâ, unde meritò habetur æqualis ipſi 3 PM.

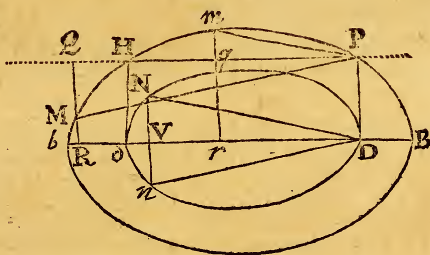
SECTIO III.

De Figurâ quam Terra fluida æqualiter densa indueret ex inæquali particularum gravitate, versùs Lunam aut Solem.

Expositis Phænomenis æstus Maris & principiis generalibus unde celeberrimi Phænomeni ratio petenda videtur, progredimur nunc ad figuram determinandam quam Terra fluida viribus Lunæ vel Solis suprà explicatis, agitata assumeret; præmittenda autem sunt quædam Lemmata quibus hæc disquisitio aliàs difficillima facilè perfici poterit.

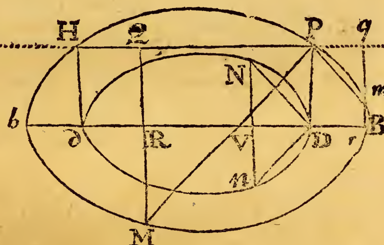
(†) LEMMA I.

(†) Hoc Lemma ad demonstrandum Corol. 4tum. proponitur, quod Corollarium ad Propositionem sequentem reducitur quæ facillime Analytice demonstrari potest.



THEOREMA.

A Puncto quovis Ellipseos, ducantur ad Ellipsim tres lineæ P H, P M, P m, prior quidem P H sit axi parallela reliquæ P M, P m faciant cum ipsa æquales quosvis angulos M P H, m P H; à punctis P, H, M & m ducantur perpendiculares ad P H & ad axim P D, H d, Q M R, m q r & super D d describatur Ellipsis similis priori, ducanturque à puncto D ad eam Ellipsim lineæ D N, D n lineis P m, P M parallelæ, denique ducatur N n quæ secet axim in V dico quod 2 D V = P Q + P q = D R + D r, si puncta Q & q cadant ab eâdem parte puncti P, vel quod 2 D V = P Q − P q = D R − D r si puncta Q & q cadant ad partes diversas puncti P.



Primo quoniam ex constructione, lineæ D N, D n æquales faciunt angulos cum axe D d, facile deducitur lineam N V n esse axi perpendicularem ideoque si Radius sit ad Tangentem anguli Q P M, ut 1 ad t, & D V dicatur z, erit N V $= tz$; & pariter si P Q aut P q vel eorum æquales D R aut D r dicantur x, M Q vel m q dicentur, tx.

Axis major sit ad minorem in utraque Ellipsi ut a ad b dicaturque B D f, D b $= g$, D P $= h$, & D d $= g - f = l$ erit per naturam Ellipseos $a^2 : b^2 = fg : h^2$, & pariter erit $a^2 : b^2 = z \times \overline{l - z} : t^2 z^2 = l - z : t^2 z$, hinc $a^2 : \frac{b^2}{t^2} = l - z : z$ & Componendo $\frac{t^2 a^2 + b^2}{t^2} : \frac{b^2}{t^2} =$

$a^2 t^2 + b^2 : b^2 = l : z = \frac{b^2 l}{a^2 t^2 + b^2} =$ D V.

In primo autem casu in quo Q & q sunt ab eadem parte puncti P erit R M $= h - tx$

 vel

Sit $Abab$ Ellipsis, C centrum, HI diameter quævis, Mm ordinata ad diametrum HI in puncto u, ex H & M ducantur rectæ HP & mx parallelæ, duabus quibusvis diametris conjugatis; & sibi mutuò occurentes in q; jungantur qu & PM, atque hæ rectæ erunt sibi mutuò parallelæ.

Occurrat recta HP, ordinatæ Mm in z, & rectæ MQ (quæ parallela sit ipsi mq) in Q. Sint CG, CA & CB semidiametri respectivè parallelæ rectis Mm, mx & HP, Ducatur GE parallela ipsi CB & producatur donec occurrat semidiametro CI in g. Ex natura Ellipseos Rectangulum $Mz \times zm : Hz \times zP :: CG^2 : CB^2$; & ob parallelas CG & Mm, erit $qz : zm :: GE : CG$. Unde $Mz \times qz : Hz \times zP ::$

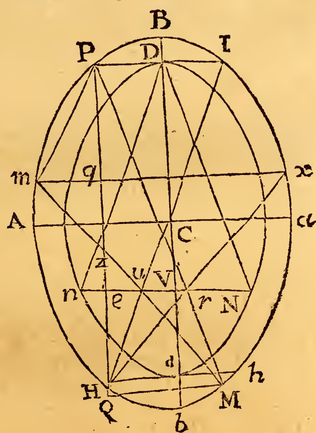
vel $tx - h$ & r m $= h + tx$, & B R aut B r, $f + x$; & R b aut r b, $g - x$; hinc ex naturâ Ellipseos erit $a^2 : b^2 = \overline{f + x} \times \overline{g - x} : \overline{h \mp tx}^2$ $= fg + gx - fx - xx : h^2 \mp 2htx + t^2x^2$ $= lx - x^2 : \mp 2htx + t^2x^2$ (demptis ex utroque termino respectivè terminis $fg : h^2$ qui sunt in eâdem ratione, & posito l loco $g - f$) $= l - x : \mp 2ht + t^2x$, atque hinc habetur $a^2t^2x \mp 2a^2ht = b^2l - b^2x$ & transpositione factâ reductisque terminis, fit $x = \frac{b^2l \pm 2a^2ht}{a^2t^2 + b^2}$. Quare si sumatur summa duarum linearum D R, D r, quæ per singulos valores x exprimuntur erit D R + D r $=$ P Q + P q $= \frac{2b^2l}{a^2t^2 + b^2}$ duplum valoris D V prius inventi.

In altero verò casu in quo Q & q hinc inde à puncto P cadunt, erit R M $= tx - h$, & r m $= h - tx$, erit B R $= f + x$ & B r $=$ $f - x$, R b $= g - x$ & r b $= g + x$. Unde ex natura Ellipseos erit $a^2 : b^2 = f \pm x \times g \mp x : h^2 - 2htx + t^2x^2$ $= fg \pm gx \mp fx - x^2 : h^2 - 2htx + t^2x^2$ $= \pm lx - x^2 \cdot 2htx + t^2x^2$ (demptis terminis fg; h^2 & adhibito l loco $g - f$) $= \pm l - x : - 2ht + t^2x$, hincque obtinetur $a^2t^2x - 2hta^2 = \pm b^2l - b^2x$ & transpositione factâ reductisque terminis fit $x = \frac{\pm b^2l + 2hta^2}{a^2t^2 + b^2}$. Quare si sumatur differentia duorum D R, D r quæ per singulos valores x exprimuntur erit D R $-$ D r $=$ P Q $-$ P q $= \frac{2b^2l}{a^2t^2 + b^2}$ duplum valoris D V prius inventi, ergo 2 D V $=$ P Q $\mp$ P q prout Q & q sunt ab eâdem vel à diversâ parte puncti P. Q. E. D.

$CG \times GE : CB^2$. Verùm $Hz \times zP : zu \times zP :: Hz : zu :: Gg : CG$. Quare ex æquo $Mz \times zq : zu \times zP :: Gg \times GE : CB^2$. Est autem Rectangulum sub Gg & GE æquale quadrato ex semidiametro CB per notam proprietatem ellipseos, cùm CI sit conjugata semidiametro CG, & CB ipsi CA. Proinde $Mz \times zq = zu \times zP$, & $zq : zu :: zP : zM$, adeóque qu parallela rectæ PM. q. e. d.

COR. 1. Recta PQ dividitur harmonicè in q & z vel $PQ : Pq :: Qz : qz$. Quippe ducatur ue parallela ipsi mx, occurratque rectæ HP in e, tum erit $Pz : qz :: PM : qu$ (ob parallelas PM, qu) $:: PQ : qe$. Unde $Pq : qz :: Pe : qe :: qe : ez :: Pe + qe : qe + ez ::$ (quoniam Qe, eq sunt æquales) $PQ : Qz$.

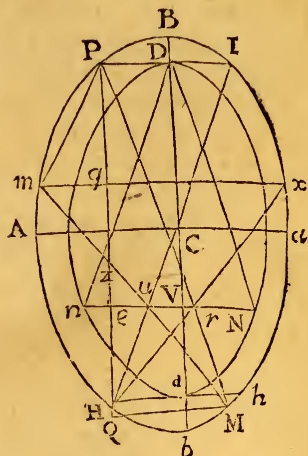
COR. 2. Occurrat recta mx Ellipsi in x, jungatur Hx quæ occurrat rectæ PM in r, juncta ur erit parellela mx. Quippe sit Ih parallela rectæ HP & occurrat ipsi mx in o; tum ox erit æqualis rectæ qm & $Io : ox :: Pq : qm :: PQ : QM$; adeóque Ix erit parallela ipsi PM. Verùm cùm IH sit diameter Ellipseos & ad x punctum in Ellipsi situm ductæ sint rectæ Ix, Hx ab extremitatibus diametri IH, erunt hæ parallelæ duabus diametris conjugatis, ex naturâ Ellipseos. Quare cùm ex punctis H & M eductæ sint duæ rectæ Hx & PM respectivè parallelæ duabus diametris conjugatis, quæ sibi mutuò occurrunt in r, juncta ur erit parallela rectæ xm per hoc Lemma.



COR. 3. Sit recta HP nunc parallela Axi Ellipseos, eritque Angulus HPM æqualis Angulo HPm, quoniam $QM : qm :: Qz : qz :: PQ : Pq$ per Cor. 1. Ducantur porrò Hh & PI parallelæ alteri Axi Aa & occurrant Axi Bb in D & d; super Axem Dd describatur Ellipsis similis Ellipsi $ABab$ & similiter posita cui occurrat recta ur producta in N & n; occurrat ur Axi Dd in V, eritque VN vel Vn æqualis rectæ er, & si jungantur Dn, DN erunt hæ rectæ respectivè parallelæ rectis PM, Pm. Nam $Pe : er :: Pq : qm$ & $He : er :: Hq : qx$, unde $He \times Pe : er^2 :: Hq \times qP : mq \times qx :: CB^2 : CA^2$. Sed Rectangulum $DV \times Vd : VN^2 :: CB^2 : CA^2$; $dV = He$, $DV = Pe$, adeóque $DV \times Vd = He \times Pe$, unde $VN^2 = er^2$, & $VN = er$, PM parallela rectæ DN & Pm rectæ Dn.

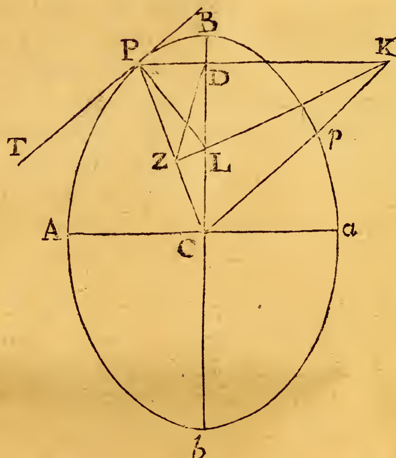
COR. 4. Hinc sequitur conversè quod si Nn sit ordinata ab interiori Ellipsi ad Axem Dd & DP perpendicularis Axi Dd occurrat Ellipsi exteriori in P; jungantur DN & Dn hisque parallelæ PM, Pm

occurrant Ellipsi exteriori in M & m; ducatur PH parallela Axi Dd, in quam sint perpendiculares MQ & mq, tum $PQ + Pq$ (vel $2\,Pe$) erit æqualis $2\,DV$, punctis Q & q cadentibus ad easdem partes puncti P, & $PQ - Pq = 2\,DV$ cum Q & q sunt ad contrarias partes puncti P.



Lemma II.

Recta PL perpendicularis Ellipsi $ABab$ in P, occurrat Axi Bb in L, & ex puncto L sit LZ perpendicularis in semidiametrum CP, eritque Rectangulum CPZ contentum sub semidiametro CP & interceptâ PZ æquale quadrato ex semiaxi CA.



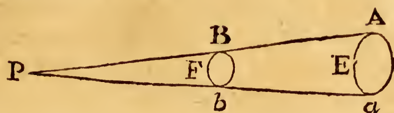
Sit Cp semidiameter conjugata ipsi CP, ducatur PD perpendicularis in Axem Bb & producatur donec occurrat semidiametro Cp in K, jungatur KZ. sitque PT tangens Ellipseos in puncto P. Ob Angulos rectos LDP, LZP, LPT circulus transibit per quatuor puncta L, D, P, & Z, & continget rectam PT in P, adeóque Angulus PDZ æqualis erit Angulo CPT vel PCK. Proinde circulus transibit per quatuor puncta C, K, D & Z; Angulus CZK æqualis erit recto CDK; KZ transibit per punctum L & ex naturâ circuli $CP \times PZ = DP \times PK = CA^2$. q. e. d. (a)

Lem-

(a) Proprietates bis in hoc & præcedenti Lemmate demonstratæ analogicè facilè ad hyperbolam transferuntur.

LEMMA III.

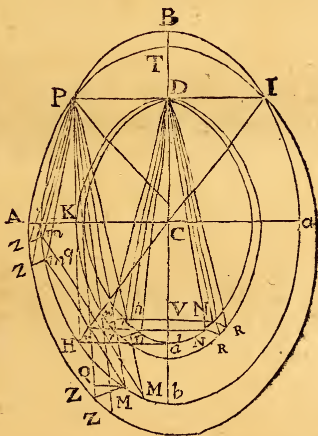
Ponamus particulas corporum versùs se mutuò gravitare viribus decrescentibus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum à se invicem, sintque *PAEa*, *PBFb* similes pyramides vel coni ex materiâ hujusmodi homogeneâ compositi, eritque gravitas particulæ *P* in solidum *PAEa* ad gravitatem ejusdem particulæ in solidum *PBFb* ut *PA* ad *PB*, vel ut homologa quævis latera horum solidorum.



Gravitas enim particulæ *P* in superficiem quamvis *AEaA* puncto *P* concentricam est ut superficies hæc directè & quadratum radii *PA* inversè, adeóque est semper eadem in quâvis distantiâ *PA*. Quare gravitas particulæ *P* versùs totum solidum *PAEa* erit ad gravitatem ejusdem particulæ versùs totum solidum *PBFb* ut *PA* ad *PB*.

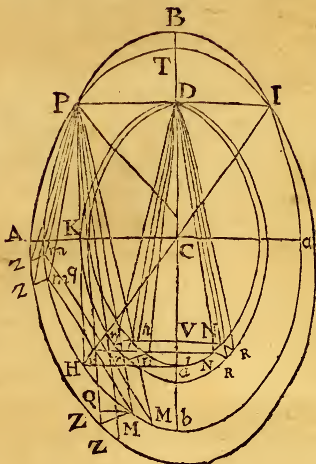
COR. 1. Hinc gravitates quibus particulæ similiter sitæ respectu solidorum similium & homogeneorum versùs hæc solida urgentur, sunt ut distantiæ particularum à punctis similiter sitis in ipsis solidis, vel ut latera quævis solidorum homologa. Quippe hæc solida resolvi possunt in similes conos vel pyramides, vel similia horum frustra, quæ vertices habebunt in particulis gravitantibus.

COR. 2. Hinc etiam facilè sequitur (*) quòd si annulus ellipticus, figuris similibus *DBab*, *DndN* terminatus, circà Axem alterutrum revolvatur, gravitatem particulæ intra solidum sic genitum sitæ, vel in interiori ejus superficie positæ, versùs hoc solidum evanescere; quoniam si recta quævis Ellipsibus hisce similibus & similiter positis occurrat, æqualia semper erunt rectæ segmenta extrema quæ ab Ellipsibus intercipiuntur (ut facilè ostenditur ex naturâ harum figurarum) adeóque vires æquales & oppositæ in hoc casu se mutuò destruent. Hinc verò sequitur quòd si *ABab* sit Sphærois genita motu Ellipseos circà alterutrum Axem, sintque *B* & *D* particulæ quævis in eodem semidiametro sitæ, gravitatem particulæ *B* versùs Sphæroidem fore ad gravitatem particulæ *D* ut distantia *CB* ad distantiam *CD*, per Corollarium præcedens.



(*) Vid. Newt. Lib. I. Prop. XCI. Cor. 3.

Lemma IV.



Sit $ABab$ Sphærois genita motu semiellipseos ABa circà Axem Aa, P particula quævis in superficie solidi, sit PK Axi normalis in K; & PD Axi parallela occurrat plano Bb (quod Axi supponitur normale) in D. Resolvatur vis quâ particula P gravitat versùs Sphæroidem in duas vires, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem, eritque prior æqualis vi quâ particula K in Axi sita tendit ad centrum solidi, posterior autem æqualis vi quâ particula D urgetur versùs idem centrum.

Producatur PK donec rursùs occurrat Ellipsi generatrici in H, ducatur Hd parallela Axi Aa quæ occurrat Axi Bb in d, concipiamus solidum $DndN$ simile ipsi $BAba$ & similiter positum describi super Axem Dd. Horum solidorum Sectiones ab eodem plano resectæ erunt semper Ellipses similes & similiter positæ, uti notum est & facilè ostenditur. Sint igitur $BAba$, $DndN$ hujusmodi figuræ à plano $PAbIBP$, quod semper transire ponatur per datam rectam PDI resectæ ex similibus hisce solidis. Contineat planum $PzZIT$ cum plano priori Angulum quàmminimum & faciat Sectiones similes $PzZIT$, $DrRD$ & similiter positas in prædictorum solidorum superficiebus. Hisce positis, imprimis ostendemus vim quâ particula P urgetur versùs duo frusta quæ planis PbI, PZI & planis PBI, PTI continentur, si reducatur ad directionem PK, æqualem fore vi quâ particula D urgetur versùs frustum planis $DnND$, $DrRD$ terminatum.

Sint enim Nn, $N'n'$ duæ ordinatæ ex interiori Ellipsi ad Axem Dd; sint (a) PM, Pm, PM' & Pm' respectivè parallelæ rectis DN, Dn, DN' & Dn'; sint porrò plana DNR, $DN'R'$, Dnr, $Dn'r'$, PMZ, $PM'Z'$, Pmz, $Pm'z'$ plano $PbIB$ perpendicularia quæ alteri plano, $PzZIT$ occurrant in rectis DR, DR', Dr, Dr', PZ, PZ', Pz, Pz'; respectivè. His positis, quoniam Anguli NDN' & MPM', nDn' & mPm',

(a) In hac Figura describenda rectas NR, $N'R'$, &c. non duximus secundùm regulas perspectivæ, sed eâ ratione quâ facillimè dignosci possint.

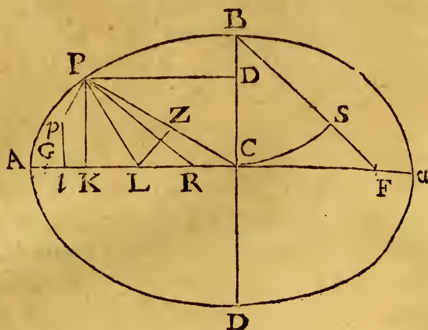
mPm', ponuntur ſemper æquales; & rectæ PM & DN, Pm & Dn, æqualiter ſemper inclinantur ad PI communem planorum Sectionem; ſi Angulus NDN' & inclinatio planorum $PbTB$, $PZIT$ ad ſe invicem continuò minui ſupponantur donec evaneſcant, erunt gravitates particulæ D, in Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$ & particulæ P in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ ultimo in ratione rectarum DN, Dn, PM & Pm reſpectivè per Lemma 3. Eædemque vires ſecundùm rectas Axi Aa, perpendiculares æſtimatæ erunt ut rectæ DV, DV, PQ, Pq reſpectivè. Unde cùm $PQ \mp Pq = 2DV$ per Corol. 4. Lem. 1. ſequitur vim quâ particula P urgetur versùs Axem Aa, gravitate ſuâ in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ æqualem eſſe vi, quâ particula D urgetur gravitate ſuâ versùs Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$. Quare ſi plana DNR, PMZ ſibi mutuò ſemper parallela & plano $PbIB$ perpendicularia moveantur ſemper circà puncta D & P (rectis ſcilicet DN, PM procedentibus ſemper in plano $PbIB$, & rectis DR, Pz in plano $PZIT$) erunt vires quibus particula P urgetur versùs Axem ex gravitate ſuâ in fruſta motu planorum PMZ, Pmz ſic deſcripta, æquales ſemper viribus, quibus particula D urgetur versùs eundem Axem gravitate ſuâ in fruſta motu planorum DNR, Dnr deſcripta; unde ſequitur particulam P urgeri eâdem vi ſecundùm rectam PK, gravitate ſuâ in fruſtra planis PbI, PzI, & planis PBI, PTI contenta, quâ particula D tendit versùs fruſtra planis $DnND$, $DrRD$ terminata. Proinde cùm hæ vires ſecundùm rectas Axi totius ſolidi perpendiculares æſtimatæ ſint etiam æquales, & par ſit ratio virium quibus particulæ P & D urgentur versùs fruſta quævis alia ſimiliter ex ſolidis reſecta, ſequitur particulam P æqualiter urgeri versùs Axem gravitate ſuâ in ſolidum exterius, & particulam D gravitate ſuâ in ſolidum ſimile interius, vel etiam in ſolidum exterius, cùm hæ vires ſint eædem per Corol. 2. Lem. 3.

Simili planè ratione colligitur vim, quâ particula P urgetur ſecundùm rectam Axi Parallelam æqualem eſſe vi, quâ particula K in Axe ſita urgetur versùs centrum ſolidi.

Cor. 1. Particulæ igitur quævis Sphæroidis æqualiter ab Axe vel Æquatore ſolidi diſtantes æqualiter versùs Axem vel Æquatorem urgentur. Vireſque quibus particulæ quævis urgentur versùs Axem ſunt ut illarum diſtantiæ ab Axe, & vires quibus urgentur versùs planum Æquatoris, ſunt ad ſe invicem, ut illarum diſtantiæ ab hoc plano,

Cor.

COR. 2. Repræsentet A vim quâ Sphærois urget particulam in Axis termino A sitam, B vim quâ idem solidum urget particulam B in circumferentia circuli medii inter A & a positam; sumatur KR ad KC, ut $\frac{A}{CA}$ est ad $\frac{B}{CB}$, jungatur PR, & particula P tendet versùs Sphæroidem in recta PR, vi quæ huic rectæ semper est proportionalis. Vis enim quâ particula D urgetur versùs centrum solidi, est ad B, ut CD ad CB, per Cor. 2. Lem. 3. Similiter vis quâ particula K urgetur versùs solidi centrum est A, ut CK ad CA. Quare per Lemma 4. vis quâ particula P urgetur secundùm rectam PK Axi normalem est ad vim, quâ urgetur secundùm rectam PD Axi parallelam, ut $\frac{PK \times B}{CB}$ ad $\frac{CK \times A}{CA}$; adeóque ut $PK \times KC$ ad $CK \times KR$. i. e. ut PL ad KR ex constructione. Quare particula P urgetur secundùm rectam PR, his viribus conjunctis, & vis composita est ad B, ut PR ad BC. Quo verò pacto vires A & B computari possint postea ostendemus.



PROPOSITIO I.

THEOREMA FUNDAMENTALE.

Constet Sphærois $ABab$ materia fluida, cujus particulæ versùs se mutuò urgeantur viribus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum decrescentibus; agantque simul duæ vires extraneæ in singulas Fluidi particulas, quarum altera tendat versùs centrum Sphæroidis, sitque semper proportionalis distantiis particularum ab hoc centro; altera agat secundùm rectas Axis solidi Parallelas, sitque semper proportionalis distantiis particularum à plano Bb Axi normali; & si semiaxes CA, CB Ellipseos generatricis sint inversè proportionales viribus totis, quæ agunt in particulas æquales in extremis Axium punctis A & B sitas, erit totum Fluidum in æquilibrio.

Ut hæc Propositio nostra primaria clarissimè demonstretur, ostendemus imprimis vim compositam ex gravitate particulæ cujusvis P & duabus viribus extraneis, semper agere in rectâ PL, quæ est ad superficiem Sphæroidis semper normalis. 2. Fluidum in rectâ quâvis PC à superficie ad centrum ductâ, ejusdem ubique esse ponderis. 3. Fluidum in canalibus

canalibus quibusvis à superficie ad datam quamvis particulam intra solidum ductis, eâdem semper vi particulam illam urgere.

1. Vires totæ quæ agunt in particulas A & B dicantur M & N, quæ ex hypothesi sunt in ratione Axium CB & CA. Resolvatur vis prior extranea quæ agit secundùm rectam PC in vires duas, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem; eruntque hæ vires semper ut rectæ PK & KC. Unde cùm vis quâ gravitas particulæ P urget eam secundùm rectam PK sit etiam ut PK, per Lemma superius, sequitur vim totam quâ particula P urgetur secundùm rectam PK, esse ad N, ut PK ad CB. Vires tres agunt in particulam P secundùm rectam PD Axi parallelam, particulæ scilicet gravitas & duæ vires extraneæ, quæ singulæ variantur in ratione rectæ PD vel KC; adeóque vis ex his tribus resultans erit ad M ut CK ad CA. Vis igitur quâ particula P urgetur secundùm rectam PK est ad vim quâ urgetur secundùm rectam PD ut $\frac{N \times PK}{CB}$ ad $\frac{M \times KC}{CA}$ sive (cùm $M : N :: CB : CA$) ut $PK \times CA^2$ ad $CK \times CB^2$. i. e. (quoniam si PL Ellipsi generatrici perpendicularis occurrat Axi Aa in L, erit KC ad KL, ut CA^2 ad CB^2, ex notâ Ellipsis proprietate) ut $PK \times KC$ ad $KC \times KL$, adeóque ut PK ad KL. Unde vis composita particulam urget in recta PL, quæ ad superficiem Fluidi ponitur perpendicularis; estque semper ut recta hæc PL, cùm vires secundùm rectas PK sint semper ut PK.

2. Sit LZ normalis in semidiametrum CP, & vis quâ particula P urgetur versùs centrum, erit ut recta PZ per vulgaria Mechanicæ Principia, & pondus Fluidi in rectâ PC ut rectangulum $CP \times PZ$, quod semper est æquale quadrato ex semiaxi CB per Lemma II. Centrum igitur æqualiter undique urgetur, estque Fluidum in æquilibrio in C.

3. Sit p particula quævis in solido ubicunque sita, Pp recta quævis à superficie ad particulam p ducta; sint PK, pl normales in Axem Aa, & vis quâ particula p urgetur pondere Fluidi in rectâ quâvis Pp secundùm hanc rectam, facili calculo quem brevitatis gratiâ omitto, invenietur æqualis $\frac{N}{2CB} \times \overline{PK^2 - pl^2} - \frac{M}{2CA} \times \overline{Cl^2 - CK^2} =$ (cùm $M : N :: CB : CA$) $\frac{M \times CA^2 \times PK^2 + M \times CK^2 \times CB^2 - M \times CA^2 \times pl^2}{2CB^2 \times CA} - \frac{M \times CB^2 \times Cl^2}{2CB^2 \times CA}$ $=$ (cùm $PK^2 : CA^2 - CK^2 :: CB^2 : CA^2$, & si CG sit semiaxis Ellipseos per p ductæ similis Ellipsi $ABab$, & similiter sitæ, $pl^2 : CG^2 - Cl^2 :: CB^2 : CA^2$) $\frac{M \times CA - M \times CG}{2}$ adeóque cùm hæc quantitas à situ puncti P non pendeat, vis hæc est semper eadem, si detur locus particulæ p; quæ proinde cùm undique æqualiter urgeatur, Fluidum erit ubique in æquilibrio.

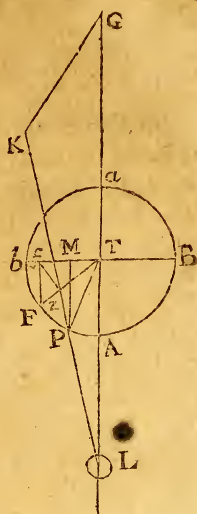
Cor. I. Sit ut in Cor. 2. Lemmatis IV. A vis gravitatis in Sphæroidem in loco A, B vis gravitatis in eandem in loco B, V vis KG in mediocri suâ quantitate in superiore Sectione expositâ, quâ Luna vel Sol aquam Sphæroidis deprimit in distantia d, quæ ponitur mediocris inter CA & CB. Sit $CA = a$, $CB = b$, eritque vis N, quâ particula B versùs C urgetur, æqualis $B + \frac{bV}{d}$, & $M = A + \frac{aV}{d} - \frac{3aV}{d} = A - \frac{2aV}{d}$. Unde per hanc Propositionem si $a : b :: B + \frac{bV}{d} : A - \frac{2aV}{d}$, erit Fluidum in æquilibrio. Atque hinc ex datis A, B & V in terminis a & b species figuræ innotescet. Est $Aa - Bb = \frac{2a^2V}{d} + \frac{b^2V}{d}$.

Cor. 2. Cùm vis V (sive ex inæquali gravitate particularum versùs Lunam, vel versùs Solem oriatur) sit exigua admodum respectu virium A & B, & differentia inter a & b admodum parva, ducatur $a = d + x$ & $b = d - x$, eritque $Bd - Bx + V \times \frac{\overline{d-x}^2}{d} = Ad + Ax - 2V \times \frac{\overline{d+x}^2}{d}$, & neglectis terminis ubi xx reperitur $Bd - Bx + Vd - 2Vx = Ad + Ax - 2Vd - 4Vx$, unde $Bd - Ad + 3Vd = Ax + Bx - 2Vx$; adeóque $x : d :: B - A + 3V : B + A - 2V$; & differentia altitudinis aquæ in A & B (seu $2x$) ad semidiametrum mediocrem d ut $2B - 2A + 6V$ ad $B + A - 2V$, vel quàm proximè ut $B - A + 3V$ ad gravitatem versùs Sphæroidem mediocrem.

Cor. 3. In præcedentibus Corollariis supposuimus $d = \frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}CB$; verùm si d denotet aliam quamvis distantiam ubi vis KG ponatur æqualis ipsi V, sitque $e = \frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}CB$, erit $x : e :: B - A + \frac{3eV}{d} : B + A - \frac{2eV}{d}$.

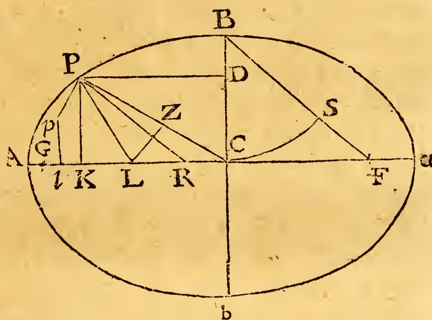
Cor. 4. Per vim V in his Corollariis intelleximus vim vel Solis vel Lunæ, & figuram consideravimus, quam Terra fluida homogenea indueret si hæ vires seorsùm in eam agerent. Sit nunc Luna Soli conjuncta vel opposita, & simul agant in Terram. In hoc casu vires Luminarium conspirant ad aquam tollendam in A & a, eamque deprimendam in B & b, & easdem ubique servant leges. Unde erit etiam in hoc casu fluidum in æquilibrio, si vis tota quæ agit in loco A, sit ad vim totam quæ agit in loco B ut CB ad CA; adeóque si V nunc designet summam virium, quibus Sol & Luna aquam deprimit in rectis Tb, TB ad mediocrem distantiam fluidum erit in æquilibrio, si $b : a :: A - \frac{2aV}{d} : B + \frac{bV}{d}$, vel x ad d ut $B - A + 3V$ ad $B + A - 2V$ quàm proximè, ut priùs.

Cor. 5. Sit nunc Luna in recta Aa, Sol in recta Bb, & quoniam

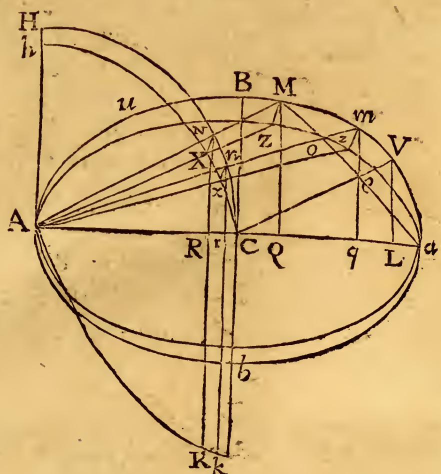


niam Lunæ vis potior eſt, Axis tranſverſus figuræ generatricis tranſeat per Lunam, conjugatus per Solem; & ſi vis tota quæ agit in loco *A* ſit ad vim totam quæ agit in loco *B* ut *CB* ad *CA* erit Sphærois fluida in æquilibrio etiam in hoc caſu. Sit *s* vis quâ Sol deprimit aquam in rectis *TA*, *Ta* ad mediocrem à centro *C* diſtantiam, *l* vis quâ Luna aquam deprimit in rectis *TB*, *Tb* ad æqualem diſtantiam; eritque vis tota quæ agit in loco *A* æqualis $A - \frac{2al}{d} - \frac{as}{d}$, vis tota quæ agit in loco *B* æqualis $B + \frac{bl}{d} - \frac{2bs}{d}$. Unde colligitur ut in Corol. 2. $x : d :: B - A + 3l - 3s : B + A - 2l - 2s ::$ (ſi $l - s$ nunc dicatur V) $B - A + 3V . B + A - 2V$, ut priùs.

SCHOL. Eâdem planè ratione oſtenditur quòd ſi *BabA* ſit Sphærois fluida oblata genita motu ſemiellipſis *BAb* circa Axem minorem *Bb*; & vertatur hæc Sphærois circa eundem Axem tali motu ut gravitas versùs Sphæroidem hanc in Polo *A* ſit ad exceſſum quo gravitas in loco *B* ſuperat vim centrifugam in *B* ex motu Sphæroidis circa Axem oriundam ut *CB* ad *CA*, Fluidum fore ubique in æquilibrio. Unde ſequitur figuram Terræ, quâtenus ex vi centrifugâ à motu diurno oriunda immutatur, eſſe Sphæroidem oblatam qualis gignitur motu ſemiellipſis *Bab* circa Axem minorem (ſi materia Terræ pro æqualiter denſa habeatur) ſemidiametrum Æquatoris eſſe ad ſemiaxem ut gravitas ſub Polis in Terram eſt ad exceſſum gravitatis ſupra vim centrifugam ſub Æquatore, corpus in loco quovis *P* tendere versùs Terram vi quæ eſt ſemper ut recta *PL* perpendicularis Ellipſi generatrici & Axi majori occurrens in *L*, & menſuram denique gradus in Meridiano eſſe ſemper ut cubus ejuſdem rectæ *PL*. Hæc omnia accuratè demonſtrantur ex hac Propoſitione; quæ quamvis in diſquiſitione de figurâ Terræ eximii uſus ſint, hic obiter tantum monere convenit.



LEMMA V.



Sit figura quævis *ABa*: describatur circulus *CNH* centro *A*, radio quovis dato *AC*; ex *A* educatur recta quævis *AM* occurrens figuræ *ABa* in *M*, & circulo in *N*; sint *MQ* & *NR* perpendiculares in Axem datum *Aa*, sit *KR* semper æqualis abcissæ *AQ*, & vis quâ particula *A* urgetur versùs solidum motu figuræ *ABa* circa Axem *Aa* genitum erit ut area quam generat ordinata *KR* directè & radius *AC* inversè.

Occurrat alia recta ex *A* educta figuræ in *m* & circulo in *n*, sintque *mq* & *nr* normales in Axem *Aa*. Sit *AZza* alia Sectio solidi per Axem, cui occurrant plana *AMz*, *Amz* ipsi *AMa* normalia in rectis *AZ*, *Az*, quæ circulum radio *AC* in plano *AZza* descriptum secent in *X* & *x*; denique arcus *Mo* circularis centro *A* descriptus occurrat *Am* in *o*. His positis, minuatur angulus contentus planis *AMa*, *AZa*, & simul angulus *MAm* donec evanescant, & ultima ratio vis quâ particula *A* tendit ad Piramidem *AMZzm* ad vim quâ urgetur versùs Piramidem *ANXxn* erit rectæ *AM* ad *AN*, vel *AQ* ad *AR*; per Lem. II. vis hujus Piramidis est ut vis superficiei *NXxn* in rectam *AN*, adeóque ut $\frac{NX \times Nn}{AN^2} \times AN = \frac{NX \times Nn}{AN}$, vel ut $\frac{NR \times Nn}{AN}$ (quoniam *NX* est ut *NR*) i. e. ut *Rr*; ejusdemque vis ad directionem Axis reducta ut $Rr \times \frac{AR}{AN}$; quare vis Piramidis *AMZzm* ad eandem directionem reducta $Rr \times \frac{AQ}{AC} = \frac{Rr \times KR}{AC}$. Vis igitur quâ particula *A* urgetur versùs frustum solidi planis *AMa*, *Aza* contenti, est ut area quam generat ordinata *KR* directè & radius *AC* inversè; cúmque solidum sit rotundum, motu scilicet figuræ circa Axem *Aa* genitum, par erit ratio vis quâ particula urgetur versùs integrum solidum.

COR. Vis quâ particula *A* urgetur in solidum est ad vim quâ urgetur versùs Sphæram super diametrum *Aa* descriptam ut area quam gene-

generat ordinata KR ad $\frac{2}{3}\ CA^2$. Quippe si AMa sit circulus; erit AQ ad Aa ut AQ^2 ad AM^2, vel AR^2 ad AN^2. Unde in hoc casu erit $KR = \frac{2\,AR^2}{AC}$, & area ARK (quam generat ordinata KR) $= \frac{2\,AR^3}{3\,AC}$, adeóque area tota motu ordinatæ RK genita erit $\frac{2}{3}\ CA^2$.

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

Invenire gravitatem particulæ A in extremitate Axis transversi sitæ versùs Sphæroidem oblongam.

Cæteris manentibus ut in Lemmate præcedenti sit AMa Ellipsis; Aa Axis transversus, C centrum, Bb Axis conjugatus, F focus; educatur recta quævis AM ex A Ellipsi occurrens in M, cui parellela CV occurrat Ellipsi in V; unde ducatur ordinata ad Axem VL, juncta aM rectæ CV occurrat in e, eritque $AM = 2\,Ce$: cúmque $AQ : CL :: AM\ (2\,Ce) : CV :: 2\,CL : Ca$, erunt $\frac{1}{2}\,AQ$, CL & CA continuè proportionales. Sit $CA = a$, $CB = b$, $CF = c$, $AR = x$, $CL = l$, cúmque $AR^2 : NR^2 :: CL^2 : VL^2$ erit $x^2 : a^2 - x^2 :: l^2 : \overline{a^2 - l^2} \times \frac{b^2}{a^2}$; adeóque $l^2 = \frac{a^2 b^2 x^2}{a^4 - c^2 x^2}$ & AQ vel $KR = \frac{2\,a b^2 x^2}{a^4 - c^2 x^2}$, area $ARK = \int \frac{2\,a b^2 x\,dx}{a^4 - c^2 x^2} =$ (si $z : x :: c : a$) $\int \frac{2\,a^2 b^2}{c^3} \times \frac{z^2\,dz}{a^2 - z^2}$. Quare sit a quantitas cujus Logarithmus evanescit, sive systematis Logarithmici modulus, l Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, eritque $ARK = \frac{2\,a^2 b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$. Unde vis quâ particula A gravitat versùs solidum genitum motu segmenti elliptici $AUMA$ circa Axem Aa, erit ad vim quâ eadem particula gravitat versùs solidum genitum motu segmenti circularis ex circulo supra diametrum Aa descripti eadem recta AM abscissi circa eundem Axem ut $\frac{2a^2 b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$ ad $\frac{2\,x^3}{3\,a}$; & si L sit Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ (vel $\frac{a}{b} \times \overline{a+c}$) erit vis quâ particula A tendit versùs totam Sphæroidem ad vim quâ tendit versùs totam Sphæram ut $3\,b^2 \times \overline{L - c}$ ad c^3.

SCHOL. Eâdem ratione invenitur gravitas particulæ in Polo sitæ versùs Sphæroidem oblatam, quærendo aream cujus ordinata est $\frac{2\,b^2 a^2}{c^3} \times \frac{z^2}{b^2 + z^2}$. Sit $BAba$ Sphærois oblata motu Ellipsis BAb circa Axem minorem genita, centro B, radio BC describatur Arcus circu-

li CS, rectæ BF occurrens in S, eritque gravitas in hanc Sphæroidem in Polo B ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram super diametrum Bb descriptam ut $3\,CA^2 \times \overline{CF-CS}$ ad CF^3. Methodus verò quâ gravitas particulæ in Æquatore sitæ versùs Sphæroidem oblongam vel oblatam computatur, est minùs obvia, facilis tamen evadit ope sequentis Lemmatis.

Lemma VI.

Duo plana $BMbaB$, $BZgeB$ se mutuò secent in recta HBh. communi figurarum tangente, auferantque ex solido frustum $BMbaBzgeB$; sint semiciculi HCh, Hch sectiones horum planorum & superficiei Sphæræ centro B, radio BC descriptæ. Ex puncto B educatur recta quævis BM in priori plano figuræ $BMba$ occurrens in M, & semicirculo HCh in N; sintque MQ & NR normales in Hh, & ordinata KR semper æqualis rectæ MQ. His positis, si angulus CBc planis hisce contentus minuatur in infinitum, erit gravitas particulæ B versùs frustum $BMbaBZgeB$ ultimò ad gravitatem ejusdem particulæ versùs frustum Sphæræ semicirculis HBh, Hch contentum, ut area $HKdh$ genita motu ordinatæ KR ad semicirculum HCh.

Sit m punctum in figurâ BMB, ipsi M quàm proximùm jungatur Bm quæ circulo HCh occurrat in n; sitque nr normalis in Hh. Ad hæc sint plana BMZ, Bmz perpendicularia plano $BMba$, secentque planum alterum $BZge$ in rectis BZ, Bz circumferentiæ Hch occurrentibus in X & x. His positis, vis quâ particula B gravitat in Pyramidem

dem $BMZzm$ erit ad vim quâ eadem particula gravitat in Pyramidem $BNXxn$ ultimò ut recta BM ad BN, vel Ma ad NR per Lem. III. Gravitas autem in hanc Pyramidem est ut $\frac{NX \times Nn}{BN^2} \times BN$, vel (quoniam NX est ut NR) ut $\frac{NR \times Nn}{BC}$ i. e. ut Rr; atque hæc gravitas agit secundùm rectam Bb vi quæ est $\frac{Br \times RN}{BC}$; unde gravitas in Pyramidem $BMZzm$ agit secundùm rectam Bb vi quæ est ut $\frac{Rr \times MQ}{BC}$, vel $\frac{Rr \times KR}{BC}$. Proinde ultima ratio virium quibus particula B urgetur versùs integra frusta solidi & Sphæræ BC, est ratio areæ $HKdh$ (quam generat ordinata KR) ad semicirculum HCh.

COR. Gravitas in frustum planis $BMba$, $BZge$ terminatum, est ad gravitatem in frustum Sphæricum contentum circulis super diametros Bb, Bg descriptis, ut area $HKdh$ ad $\frac{8}{3}CB^2$. Sit enim $BMBb$ circulus, eritque MQ ad Bb, ut RN^2 ad BC^2, & $KR = \frac{2RN^2}{CB} = 2BC^2 - \frac{2BR^2}{CB}$, & area $HKdB = \frac{4}{3}CB^2$ adeóque area tota $HKdh = \frac{8}{3}CB^2$.

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

Invenire gravitatem particulæ in Æquatore sitæ versùs Sphæroidem oblongam.

Per Æquatorem intelligimus circulum ab Axe conjugato genitum dum figura circa alterum Axem revolvitur. Repræsentet $BMba$ in figura præcedentis Lemmatis, Sectionem quamvis Sphæroidis Æquatoris plano normalem, eritque hæc figura semper similis Sectioni per Polos solidi, seu figuræ cujus revolutione solidum genitum esse supponimus. Hujus demonstrationem ut facilem & ab aliis traditam brevitatis gratiâ omitto. Sit igitur CA Sectionis hujus semiaxis transversus, CB semiaxis conjugatus, F focus; sit $CB = b$, $CA = a$, $CF = c$, $BR = x$, CV semidiameter parallela rectæ BM, VL ordinata ad Axem Bb, $CL = l$. Tunc $CB : CL :: CL : \frac{1}{2}MQ$ ut in Proposit. præcedenti, & $MQ = \frac{2l^2}{b}$. Verùm $NR^2 : BR^2 :: CL^2 : VL^2$ i. e. $b^2 - x^2 : x^2 :: l^2 : \overline{b^2 - l^2} \times \frac{a^2}{b^2}$, vel $a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} : x^2 :: l^2 : b^2 - l^2$, & $l^2 = \frac{a^2b^2 \times \overline{b^2 - x^2}}{a^2b^2 - c^2x^2} =$ (si $z : x :: c : b$) $\frac{b^2a^2}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, & $KR = MQ = \frac{2l^2}{b} = \frac{2a^2b}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, & area $BdKR$

æqua-

æqualis $\int \frac{2a^2b^2dz}{c^3} \times \frac{c^2-z^2}{a^2-z^2} = \frac{2a^2b^2z}{c^3} - \int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2dz}{a^2-z^2}$. Sit igitur l (ut in priore Propositione) Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, & area $BdKR$ erit $\frac{2a^2b^2z}{c^3} - \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2l}{a^2} = \frac{2b^2}{c^3} \times \overline{a^2 - b^2 l}$.

Supponantur nunc $x=b$, adeóque $z=c$; sitque L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, ut priùs, eritque area tota $HKdh$, motu ordinatæ KR genita, æqualis $\frac{4b^2}{c^3} \times \overline{a^2 - b^2 L}$. Quare gravitas particulæ B versùs frustum planis ellipticis $BMba$, $BZge$ terminatum erit ultimò ad gravitatem in frustum iisdem planis contentum à Sphæra centro C radio CB descripta resectum, ut $a^2c - b^2L$ ad $\frac{2}{3}c^3$ per Cor. Lem. VI. Sit circulus $BPpb$ Æquator Sphæroidis, BP & Bp duæ quævis chordæ hujus circuli; Sectiones Sphæroidis circulo BPb perpendiculares erunt Ellipses similes Sectioni quæ per Polos solidi transit, quarum BP & Bp erunt Axes transversi; Sectiones autem Sphæræ super diametrum Bb descriptæ per eadem plana erunt circuli quorum diametri erunt chordæ BP, Bp. Proinde eadem semper erit ratio gravitatis particulæ B in frustra elliptica & sphærica his planis terminata; eritque gravitas versùs integram Sphæroidem ad gravitatem versùs Sphæram, ut $a^2c - b^2L$ ad $\frac{2}{3}c^3$, a denotante semiaxem transversum figuræ cujus

jus motu gignitur solidum, b semiaxem conjugatum, c distantiam foci à centro, & L, Logarithmum ipsius $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ vel $a \times \frac{a+c}{b}$. q. e. f.

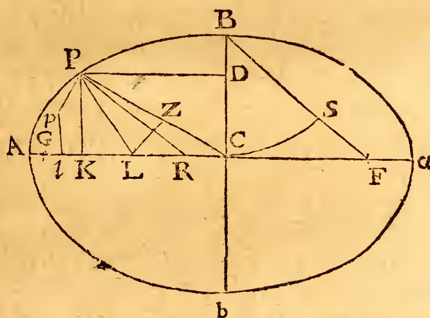
COR. Eadem semper est ratio gravitatis versùs frustum quodvis Sphæroidis & frustum Sphæræ eodem plano ad Æquatorem normali abscissum ab eâdem parte plani; vel gravitas in portionem à Sphæroide hoc plano abscissam est ad gravitatem in integram Sphæroidem, ut gravitas in frustum Sphæræ eodem Plano ex eâdem parte abscissum ad gravitatem in integram Sphæram.

SCHOL. Eâdem ratione si $BAba$ sit Sphærois oblata motu figuræ BAb circa Axem minorem Bb genita, erit gravitas in Sphæroidem hanc in loco A ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C radio CA descriptam, ut $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$ ad $\frac{2}{3}\ CF^3$.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

Ex datis viribus quibus Terræ particulæ gravitant versùs Solem & Lunam, invenire figuram quam Terra indueret in Syzygiis vel Quadraturis Solis & Lunæ in hypothesi quòd Terra constet ex Fluido homogeneo, & circa Axem suum non moveatur.



Gravitas in loco A versùs Sphæroidem oblongam motu figuræ ABa circa Axem transversam Aa genitam, est ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C radio CA descriptam, ut $3b^2 \times \overline{L-c}$ ad c^3 per Prop. II. Hæc autem gravitas est ad gravitatem in B versùs Sphæram centro C radio CB descriptam, ut CA ad CB (per Cor. 1. Lem. III.) quæ est ad gravitatem in loco B versùs Sphæroidem ut $\frac{2}{3}\ C^3$ ad $a^2c - b^2L$ per Prop. IV. Componantur hæ rationes, eritque gravitas in loco A versùs Sphæroidem ad gravitatem in loco B versùs eandem, ut $2ab \times \overline{L-c}$ ad $a^2c - b^2L$. Designet A gravitatem in loco A, B gravitatem in loco B, V summam virium quibus Luminaria conjuncta vel opposita aquam deprimunt in rectis

TB, Tb perpendicularibus rectæ Aa quæ per Terræ & Luminarium centra transire supponitur, ut in Cor. 4. Prop. I. vel differentiam earumdem virium in Lunæ Quadraturis, ut in Cor. 5. ejusdem Prop. & per ea quæ demonstrantur Cor. 1. Prop. I. erit $Aa - Bb = \frac{2a^2V + b^2V}{d}$. Adeóque $Aa - bA \times \frac{a^2c - b^2L}{2ab \times \overline{L-c}} = \frac{2a^2V + b^2V}{d}$, & $V : A :: 2a^2L + b^2L - 3a^2c : \frac{2a}{d} \times \overline{2a^2 + b^2} \times \overline{L-c}$. Atque ex datâ ratione V ad A vel ad B, vel $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ (quæ pro G gravitate mediocri in circumferentiâ $ABab$ haberi potest) habebimus æquationem unde species figuræ & differentia semiaxium seu ascensus aquæ computari possunt.

Est autem L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, adeóque æqualis $c + \frac{c^3}{3a^2} + \frac{c^5}{5a^4} + \frac{c^7}{7a^6}$, &c. per Methodos notissimas, adeóque $L - c = \frac{c^3}{3a^2} + \frac{c^5}{5a^4} + \frac{c^7}{7a^6}$, &c. Unde est V ad A, ut $\frac{2c^2}{15a^2} + \frac{4c^4}{35a^4} + \frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{\overline{L-c} \times ad}{c^3 \times \overline{2a^2+b^2}}$, & V ad $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ vel G, ut $\frac{2c^2}{15a^2} + \frac{4c^4}{35a^4} + \frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{2a^2 + b^2}{2bdc^3} \times \overline{2abL - b^2L + a^2c - 2abc}$.

Verùm si V sit admodum exigua respectu gravitatis G (ut in præsenti casu) erit differentia semidiametrorum CA, CB ad semidiametrum mediocrem quàm proximè ut $15V$ ad $8G$, vel paulò accuratiùs ut $15V$ ad $8G - 57\frac{5}{14} \times V$. Sit enim ut in Cor. 2. Prop. I. $a = d + x$, $b = d - x$, adeóque $c^2 = a^2 - b^2 = 4dx$, eritque $A : B :: 2ab \times L - c : a^2c^2 - b^2L :: \frac{b}{3} + \frac{bc^2}{5a^2} + \frac{bc^4}{7a^4}$ &c $: \frac{a}{3} + \frac{ac^2}{15a^2} + \frac{ac^4}{35a^4}$, &c. i. e. ut $\frac{d-x}{3} + \frac{4dx \times \overline{d-x}}{5 \times \overline{d+x}^2} + \frac{16d^2x^2 \times \overline{d-x}}{7 \times \overline{d+x}^4}$, &c. ad $\frac{d+x}{3} + \frac{4dx \times \overline{d+x}}{15 \times \overline{d+x}^2} + \frac{16d^2x^2 \times \overline{d+x}}{35 \times \overline{d+x}^4}$, &c. adeóque (neglectis terminis, quos plures dimensiones ipsius x ingrediuntur) ut $\frac{1}{3}d + \frac{17}{15}x : \frac{1}{3}d + \frac{19}{15}x$. Proinde erit $B - A$ ad $B + A$ ($= 2G :: x : 5d + 18x$, & $B - A : G :: 2x : 5d + 18x$. Sed per Cor. 2. Prop. I. est x ad d ut $B - A + 3V$ ad $B + A - 2V$, adeóque substituendo valores quantitatum $B - A$ & $B + A$, erit $x : d :: \frac{2Gx}{5d + 18x} + 3V : 2G - 2V$. Unde $2Gx - 2Va = \frac{2Gdx + 15Vd + 54Vx}{5d + 18x}$, & $10Gdx - 10dVx + 36Gxx - 36Vxx = 2Gdx + 15Vd + 54Vx$, & terminis omissis ubi reperi-

reperitur xx, erit $8\,Gdx - 64\,Vx = 15\,Vd$ atque $x:d::15\,V:8\,G - 64\,V$, & $2x$ ad d ut $15\,V$ ad $4\,G - 32\,V$. Ascensus igitur totius aquæ i. e. differentia semidiametrorum CA, CB (vel $2x$) est ad semidiametrum mediocrem, ut $15\,V$ ad $8\,G$ quàm proximè; facile autem erit rationem hanc exhibere magis accuratè, quoties usus id postulabit, assumendo plures terminos valoris Logarithmi L, & calculum prosequendo; prodit autem hoc pacto x ad d magis accuratè, ut $15\,V$ ad $8\,G - 57\frac{5}{14} \times V$.

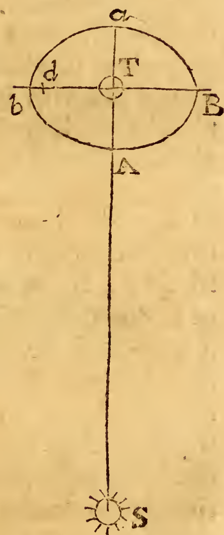
Cor. $B - A$ est æqualis $\frac{3V}{4}$; & $B - G = \frac{3V}{8}$ quàm proximè. Quippe $B - A : G :: 2x : 5d :: 30\,V : 40\,G$, adeóque $B - A : V :: 3 : 4$.

Schol. Eâdem ratione patebit gravitatem versùs Sphæroidem oblatam in Polo B fore ad gravitatem in Æquatore in loco quovis A, ut $2CB \times CA \times \overline{CF - CS}$ ad $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$.

PROPOSITIO V.

Problema.

Invenire vim V *quæ oritur ex inæquali gravitate partium Terræ versùs Solem, & definire ascensum aquæ hinc oriundum.*

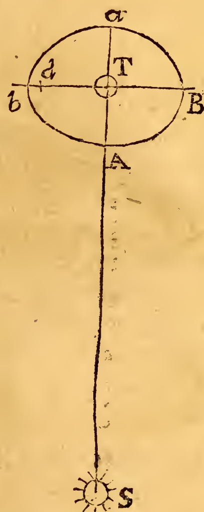


Sit S Sol, T Terra, $ABab$ orbita lunaris neglectâ excentricitate, B & b Quadraturæ. Designet S tempus periodicum Terræ circa Solem, L tempus periodicum Lunæ circa Terram, l tempus quo Luna circa Terram revolveretur in circulo ad distantiam mediocrem Td $(= \frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}CB)$ si motus Lunæ gravitate suâ versùs Solem nullâtenus turbaretur, & solâ gravitate versùs Terram in orbitâ retineretur. Designet porrò K gravitatem mediocrem Lunæ vel Terræ versùs Solem, g gravitatem Lunæ versùs Terram in mediocri suâ distantiâ, v vim quam actio Solis huic gravitati adjiceret in Quadraturis ad eandem distantiam. His positis, erit $v:K::dT:ST$; atque $K:g::\frac{ST}{SS}:\frac{dT}{ll}$ ex vulgari doctrina virium centripetarum; unde $V:g::ll:SS$: cúmque ll sit paulò minùs quàm LL, quoniam Luna nonnihil distrahitur à Terrâ gravitate suâ in Solem, patet vim v esse ad g in paulò minori ratione quàm LL ad SS. Hanc autem rationem vis v ad g nemo hactenus (quantùm

 novi)

novi) accuratè definivit; ea tamen propior videtur esse rationi LL ad $SS+2LL$ vel saltem rationi LL ad $SS+\frac{1}{2}LL$ quàm rationi LL ad SS. Argumenta verò quibus id colligitur hîc omittenda censeo, moniti Academiæ illustrissimæ memor, cùm in hâc disquisitione parvi sit momenti quænam harum rationum adhibeatur. Supponamus igitur cum Newtono $v:g::LL:SS::$ (per computos Astronomicos periodorum Solis ac Lunæ) $1:178{,}725$. Vis V quæ in Terræ superficie vi v respondet, est ad v, ut Terræ semidiameter mediocris ad distantiam Lunæ mediocrem vel ut 1 ad $60\frac{1}{2}$. Vis autem g agit secundùm rectas, quæ in centro gravitatis Terræ ac Lunæ concurrunt, cujus ratione habitâ ex incremento gravitatis in descensu ad superficiem Terræ patebit vim V esse ad G (quâ gravitas mediocris in superficie Terræ designatur ut suprà) ut 1 ad 38604600. Unde cùm per Cor. 2. Prop. III. sit $x:d::15V:8G-57\frac{5}{14}V$ erit in hoc casu $x:d::1:20589116$. Cúmque semidiameter Terræ mediocris sit pedum 19615800; hinc sequitur totum aquæ ascensum ex vi Solis oriundum fore pedis unius Parisiensis cum $\frac{90545}{100000}$ partibus pedis, i. e. pedis unius cum digitis decem, & $\frac{8654}{10000}$ partibus digiti; quem suo more breviter deprehendit Newtonus esse pedis unius digitorum undecim cum $\frac{1}{30}$ parte digiti, quæ altitudo à nostrâ differt tantùm sexta parte unius digiti.

Verùm in hoc calculo Terra supponitur esse Sphærica, nisi quatenus à vi Solis Mare elevatur. Sed si ascensum aquæ maximum quæramus, ponendum est Solem in circulo æquinoctiali versari, figuramque $ABab$ in hoc plano constitui, & augenda est vis V in ratione semidiametri mediocris ad semidiametrum Terræ maximum, & minuenda est vis G donec evadat æqualis gravitati sub Æquatore: i. e. Si figuram Terræ eam esse supponamus quam definivit Newtonus, augenda erit vis V in ratione 459 ad 460, & minuenda est G in eadem ferè ratione, quoniam vires gravitatis in superficie Terræ sunt inverse ut distantiæ locorum à centro; cúmque distantia d sit augenda in eâdem ratione, erit ascensus aquæ in Æquatore augendus in ratione triplicata semidiametri mediocris ad maximam, adeóque erit pedis unius digitorum undecim cum 60ma circiter parte digiti. Terra autem altior est sub Æquatote quàm prodiit calculo Newtoniano ex hypothesi quòd Terra sit uniformiter densa à superficie usque ad centrum, ut colligitur ex variis pendulorum Observationibus, & præsertim ex mensurâ gradus



meridia-

meridiani quam viri clarissimi nuper definiverunt accuratissimè sub Circulo Polari.

SCHOL. 1. Si gravitatem posuissemus æqualem in A & B, & ejusdem vis in totâ circumferentiâ $ABab$, prodiisset x æqualis tantùm $\frac{3Vd}{2G}$, & ascensus aquæ (seu $2x$) pedis unius digitorum sex cum tertiâ circiter parte digiti. Quippe in hâc hypothesi prodiisset CA ad CB, ut $G+V$ ad $G-2V$, adeóque x ad d, ut $\frac{3V}{2}$ ad G quàm proximè. Atque hinc apparet utilitas præcedentium Propositionum, cùm ascensus aquæ secundùm hanc minùs accuratam hypothesim minor sit ascensu quem in hâc Propositione definivimus, differentiâ $\frac{3Vd}{4G}$, quartâ scilicet parte ascensûs illius.

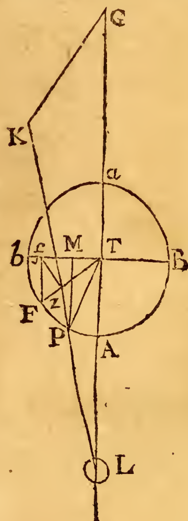
SCHOL. 2. Ex hac doctrina patet Satellites Jovis Soli & sibi mutuò conjunctos vel oppositos in Oceano Joviali (si ullus sit) ingentes motus excitare debere, modò non sint Lunâ nostrâ multò minores; cùm diameter Jovis ad distantiam cujusque Satellitis multò majorem habeat rationem quàm diameter Terræ ad distantiam Lunæ. Verisimile est mutationes macularùm Jovis ab Astronomis observatas hinc aliquâ saltem ex parte ortum ducere; quòd si hæ mutationes eam analogiam servare deprehendantur cum aspectibus Satellitum, quam hæc doctrina postulat, indicio erit veram earum causam hinc esse petendam. Ex hâc doctrinâ licet quoque conjicere non absque utilitate, motus Satellitum circa Axes suos & circa primarios ita compositos esse, ut idem Hemisphierium suis primariis semper ostendant, secundùm sententiam celeb. Astronomorum. Verisimile enim est motus Maris nimios in Satellitibus cieri deberi, si cum aliâ quâvis velocitate circa Axes suos revolverentur; aquis autem in his agitandis (si quæ sint) sufficere possunt æstus ex variis Satellitum distantiis à suis primariis oriundis.

SECTIO IV.

De motu Maris quâtenus ex motu Telluris diurno aliisve de causis immutatur.

Ostendimus in Sectione præcedenti Terram fluidam versùs Solem vel Lunam inæqualiter gravem Sphæroidis oblongæ figuram induere debere; cujus Axis transversus per centrum Luminaris transiret, si Terra non revolveretur circa Axem suum motu diurno; & ascensum aquæ in hypothesi Terræ quiescentis ex vi Solis oriundum definivimus. Verùm

ob motum Terræ diversa est ratio æstus Maris. Hinc enim aqua nunquam fit in æquilibrio, sed perpetuis motibus agitatur. Supponamus Solem & Lunam conjunctos vel oppositos versari in plano Æquatoris *ABab*; sit *Aa* diameter quæ per illorum centra transit, *Bb* huic perpendicularis. Dum aquæ moles revolvitur motu diurno, augentur vires quibus ascensus ejus promovetur in transitu aquæ à locis *b* & *b* ad *A* & *a*, & in his locis evadunt maximæ; ascensus tamen aquæ prorogari videtur, postquàm hæ vires minui cœperunt usque ferè ad loca ubi hæ vires æquipollent viribus quibus deprimitur infra altitudinem quam naturaliter obtineret, si nullâ vi extraneâ motus aquæ perturbaretur; adeò ut motus aquæ considerari possit tanquam libratorius, & tantundem ferè ascendat viribus quibus elevatur decrescentibus, quàm iisdem crescentibus. Cúmque vis centrifuga ex motu diurno orta sit multò minor gravitate, situs loci *F* ubi prædictæ vires æquipollent sub Æquatore, dum aqua transit à loco *b* ad locum *A*, sic ferè definiri posse videtur. Ex puncto *F* sit *Ff* normalis in *Bb*, & *fz* in *TF*. Designet *V* summam virium quibus Sol & Luna aquam deprimunt



in rectis *TB*, *Tb* ut suprà, & vis quâ aqua tollitur in *F* erit $\frac{3V \times Fz}{d} = \frac{3V \times Ff^2}{d \times TF}$. Supponamus *F* esse locum aquæ ubi altitudo aquæ sit minima, ut *TF* haberi possit pro semiaxe conjugato figuræ *ABab*, dicatur graviras in extremitate hujus Axis *B*, & gravitas mediocris in hac figura *G*, ut suprà; & vis quâ aqua deprimitur infra situm naturalem in loco *F* erit $B - A + \frac{V \times TF}{d}$. Ponantur hæ vires æquales, cúmque *TF* sit quàm proximè æqualis distantiæ *d*, sitque $B - G = \frac{3V}{8}$ per Cor. Prop. IV. erit $\frac{3V}{8} + V = \frac{3V \times Ff^2}{d^2}$, seu $TF^2 : Ff^2 :: 3 : 1 + \frac{3}{8} :: 24 : 11$. unde angulus *FTb* erit graduum 42 minutorum 37, incidetque ferè in punctum medium inter *b* & *A*. Hunc verò calculum ut accuratum non proponimus.

PROPO-

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

Motum Maris ex vi Solis oriundum, & motum lunarem in orbitâ quàm proximè circulari inter se comparare, & hinc ascensum aquæ æstimare.

Aſtronomis notiſſimum eſt Lunæ diſtantiam mediocrem in Syzygiis minorem eſſe diſtantiâ mediocri in Quadraturis. Clariſ. Halleyus ex Obſervationibus colligit diſtantiam priorem eſſe ad poſteriorem ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$. Newtonus Methodo quâdam ſuâ harum rationem invenit eſſe eam 69 ad 70: Princip. Prop. 28. Lib. 3. Clariſſimus Auctor Tractatûs de Motibus Lunæ ſecundùm Theoriam gravitatis, in hac doctrina optimè verſatus, colligit eam eſſe numeri 69 ad 70, ratione non habitâ decrementi gravitatis dum Luna tranſit à Syzygiis ad Quadraturas. Ut motus Maris ex vi Solis oriundus (qualis ſuprà definitur Prop. V.) cum motu Lunæ conferatur, ſupponamus orbem Lunarem aquâ compleri & quæramus aſcenſum hujus aquæ per Prop. IV. & V. In Prop. V. erat vis v ad g, ut 1 ad 178,725; quare in hoc caſu foret $x:d::15v:8g-57\frac{5}{14}\times v::1:91{,}496$: adeóque ſemiaxis figuræ ad ſemiaxem conjugatum (vel $d+x$ ad $d-x$) ut 46.248 ad 45,248; quæ ferè congruit cum ratione diſtantiarum Lunæ in Quadraturis & Syzygiis quam Halleyus ex Obſervationibus deducit; adeò ut figura orbitæ Lunaris ſpecie vix diverſa ſit ab ea quam Globus aqueus quieſcens Lunæ orbitam complens ex vi Solis indueret; forent tamen poſitione diverſæ, ſiquidem illius Axis minor Solem reſpiciat, hujus Axis major versùs Solem dirigeretur. Ratio numeri 59 ad 60 (quarum ſemidifferentia eſt ad ſemiſummam ut $3v$ ad g quàm proximè) probè congruit cum ratione ſemiaxium figuræ quam aqua ex vi Solis indueret, ſi vis gravitatis eadem eſſet per totam circumferentiam $ABab$, ut oſtendimus in Schol. 1. Prop. V. Aſcenſus autem aquæ Prop. V. definitus congruit cum eâ quam ex Obſervationibus colligit Halleyus; unde ſuſpicari licet differentiam diametrorum orbitæ lunaris paulò fieri majorem ex decremento gravitatis Lunæ in Terram dum tranſit à Syzygiis ad Quadraturas, ſimili ferè ratione quâ aſcenſus aquæ prodiit in hâc propoſitione major propter exceſſum gravitatis aquæ in Terram in loco B ſupra ipſius gravitatem in loco A aliiſque à centro diſtantiis. Verùm quicquid ſit judicandum de ratione diametrorum orbitæ Lunaris, ex his colligere licet aſcenſum aquæ Prop. V. definitum majorem vix evadere propter motum Terræ diurnum circa Axem ſuum. Supponamus enim hunc mo-

tum.

tum augeri donec vis centrifuga ex hoc motu oriunda fiat æqualis gravitati, & particulæ Maris revolvantur ad morem Satellitum in orbitis quàm proximè circularibus Terram contingentibus. Hæ orbitæ erunt ellipticæ, quarum Axes minores productæ transibunt per Solem. Et si semiaxium differentia sit ad semidiametrum mediocrem ut 3 *V* ad *G* (secundùm ea quæ de motibus lunaribus tradit vir acutissimus) erit minor ascensu aquæ suprà definito Prop. V. in qua invenimus 2 *x* esse ad *d* ut 15 *V* ad 4 *G*. Quòd si quæramus horum semiaxium differentiam ex figura orbitæ lunaris quâtenus ex Observationibus innotescit secundùm clarif. Halleyum, parum admodum superabit ascensum aquæ suprà definitum. Nec mirum si non accuratè conveniant, cùm gravitas Lunæ versùs Terram sequatur rationem inversam duplicatam distantiarum, gravitas aquæ major quoque sit in majori distantiâ, sed non in eâdem ratione. Cùm hæc Phænomena sint analoga, & sibi mutuò aliquam lucem afferant, hæc de iis inter se collatis memorare videbatur operæ prætium. Supponimus tamen hîc aquæ motum in eodem circulo Æquatori parallelo perseverare, vel latitudinem eandem in singulis revolutionibus servare, & variationem ascensus aquæ quæ ex figurâ Sphæroidicâ Terræ provenit non consideramus.

PROPOSITIO VII.

Motus aquæ turbatur ex inæquali velocitate, quâ corpora circa Axem Terræ motu diurno deferuntur.

Quippe si aquæ moles feratur æstu, vel aliâ de causâ, ad majorem vel minorem ab Æquatore distantiam, incidet in aquam diversâ velocitate circa Axem Terræ latam; unde illius motum turbari necesse est. Differentia velocitatum quibus corpora, exempli gratiâ, in loco 50gr. ab Æquatore dissito, & in loco 36 tantùm milliaria magis versùs Septentrionem vergente, major est quàm quâ 7 milliaria singulis horis describeretur, ut facili calculo patebit. Cúmque motus Maris tantus nonnunquam sit ut æstus 6 milliaria, vel etiam plura singulis horis describat, effectus qui hinc oriri possunt non sunt contemnendi.

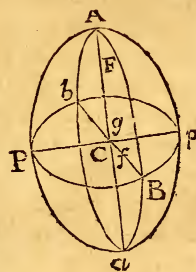
Si aqua deferatur à Meridie versùs Septentrionem motu generali æstus, vel aliâ quâvis de causâ, cursus aquæ hinc paulatim deflectet versùs Orientem, quoniam aqua priùs ferebatur motu diurno versùs hanc plagam majori velocitate quàm est ea quæ convenit loco magis versùs Boream sito. Contrà si aqua à Septentrione versùs Meridiem deferatur, cursus aquæ ob similem causam versùs Occidentem deflectet. Atque hinc varia motus Maris Phænomena oriri suspicamur. Hinc forsitan, exempli gratiâ, Montes glaciales quæ ex Oceano Boreali digrediuntur, frequen-

frequentiùs conſpiciuntur in Occidentali quàm Orientali Oceani Atlantici plagâ. Quin & majores æſtus hinc cieri poſſe in pluribus locis quàm qui ex calculo virium Solis & Lunæ prodeunt, habitâ ratione latitudinis, veriſimile eſt. Eandem cauſam ad ventos præſertim vehementiores propagandos, & nonnunquam augendos vel minuendos, aliaque tum Aëris tum Maris Phænomena producenda conducere ſuſpicamur. Sed hæc nunc ſigillatim proſequi non licet.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

Invenire variationem aſcenſus aquæ in Prop. V. definiti, quæ ex figurâ Terræ Sphæroidicâ provenit.



Sint $PApa$, $PBpb$ Sectiones Terræ per Polos P & p, quarum prior tranſeat per loca A & a, ubi altitudo aquæ in Æquatore viribus Solis & Lunæ ſit maxima, poſterior per loca B & b ubi ſit minima; ſint hæ Sectiones ellipticæ, F focus figuræ $PApa$, f focus Sectionis $PBpb$, & g focus Sectionis $ABab$. Et ſi omnes Sectiones ſolidi per rectam Aa tranſeuntes ſupponantur ellipticæ calculo inito ope Lemmatis V. invenimus gravitatem in loco A versùs ſolidum hoc fore ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C ſuper diametrum Aa deſcriptam ut $1 + \frac{3CF^2 + 3Cg^2}{10CA^2} + \frac{9CF^4 + 6CF^2 \times Cg^2 + 9Cg^4}{56CA^4}$, &c. ad $\frac{CA^2}{CB \times CP}$; & ſi gravitas in loco B, definiatur ſimili calculo, ope ejuſdem Lemmatis & Schol. Prop. II. conſtabit ratio gravitatis in A ad gravitatem in B, & per Cor. 2. Prop. I. innoteſcet ſemidiametrorum CA & CB differentia ſive aſcenſus aquæ. Verùm calculum utpotè prolixum omittimus, cùm ſit exigui uſus. Hâc Propoſitione oſtendere tantùm volui Geometriam nobis non defuturam in Problemate celeberrimo accuratiſſimè tractando. Verùm reſtat præcipuus in hac diſquiſitione nodus, de quo pauca ſunt addenda.

PROPOSITIO IX.

Problema

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Hæc ex motibus cœlestibus colligi nequit, si verò conferetur ascensus aquæ in Syzygiis Luminarium, qui ex summâ virium Solis & Lunæ generatur, cum ejusdem ascensu in Quadraturis, qui ex earundem differentia oritur, ex vi Solis per Prop. V. datâ, invenietur vis Lunæ. Hanc quærit Newtonus ex Observationibus à Sam. Sturmio ante ostium Fluvii Avonæ institutis, ex quibus colligit ascensum aquæ in Syzygiis æquinoctialibus esse ad ascensum aquæ in Quadraturis iisdem, ut 9. ad 5. Dein post varios calculos concludit vim Lunæ esse ad vim Solis, ut 4.4815 ad 1, & ascensum aquæ ex utrâque vi oriundum in distantiis Luminarium mediocribus fore pedum 50 cum semisse. Harum virium rationem ex Observationibus à celeb. Cassini in loco suprà citato allatis quæsivimus. Verùm cùm præter generales causas jam memoratas quarum aliquæ ad calculum vix revocari possunt, aliæ variæ ex locorum situ, vadorum indole, ventorum vi & plagâ pendentes æstus Maris nunc majores, nunc minores reddant, non est mirum si vires Lunæ quæ prodeunt ex Observationibus in locis diversis, vel in eodem loco diversis tempestatibus institutis non planè consentiant. Computis igitur quos de motu Maris ex vi Lunæ oriundo instituimus recensendis impræsentiarum non immorabimur. Postquam verò Observationes aliquæ circa æstus Maris ad littora Americæ & Indiæ Orientalis quas expectamus, ad manus pervenerint, de hisce forsan certiùs judicemus. Observamus tantùm æstus in minori ratione decrescere videri quàm duplicatâ Sinus complementi declinationis; quin & reliquæ æstus leges generales ex motu aquæ reciproco perturbantur. Sed veremur ne tædium pariat, si repetamus quæ ab aliis jamdudum tradita sunt. Æstus anomali à locorum & Marium situ plerumque pendere videntur. Observandum tamen ex Theoriâ gravitatis sequi, unicum tantùm æstum spatio 24 horarum contingere nonnunquam debere in locis ultra 62 gradum latitudinis, si reciprocatio motus aquæ id permitteret. *

Quòd si analysis diversarum causarum quæ ad æstus Phænomena producenda conferunt accurata institui posset, id certè ad uberiorem scientiam

* Sit enim Lunæ declinatio 28 gr. & loci ultra 62 gr. versùs eandem plagam, & manifestum est Lunam semel tantùm 24 horarum spatio loci hujus horizontem attingere.

tiam virium & motuum ſyſtematis Mundi non parum conſerret. Hinc enim ſitus centri gravitatis Lunæ & Terræ, & quæ ad æquinoctiorum præceſſionem aliaque Phænomena naturæ inſignia ſpectant, certiùs innoteſcerent. Quas ob cauſas aſcenſus aquæ quantitatem, quouſque ex motibus cœleſtibus eam aſſequi licet, accuratè definiendam & demonſtrandam, poſitis legibus gravitatis quæ ex Obſervationibus deducuntur (de cujus causâ hîc non eſt differendi locus) putavimus. Cogitata autem hæc qualiacunque judicio Illuſtriſſimæ ACADEMIÆ REGIÆ, quam omni honore & reverentiâ ſemper proſequimur, lubenter ſubmittimus.



ANNOTANDA IN DISSERTATIONEM *de Causa Physica Fluxus & Refluxus Maris, cui præfigitur Sententia*, Opinionum commenta delet dies, Naturæ judicia confirmat.

I. IN Prop. IV. invenitur $x = \frac{15 Vd}{8 G}$ quàm proximè, qui valor ipsius x est satis accuratus, nec ullâ correctione indiget præsertim in calculo Prop. V. Est autem magis accuratè x ad d ut $15\ V$ ad $8\ G - \frac{88}{7} V$ non ut $15\ V$ ad $8\ G - \frac{803}{14} V$ sive $8\ G - 57 \frac{5}{14} V$ ut lapsu quodam calami aut calculi scripseram ad finem Prop. IV. qui quidem est exigui momenti, & argumenta Propositionum sequentium non immutat. Calculi autem summam hîc adjiciam. Inveneram in Prop. IV. esse B ad A, ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15 a^2} + \frac{c^4}{35 a^4}$, &c. ad $\frac{b}{a} \times \overline{\frac{1}{3} + \frac{c^2}{3 a^2} + \frac{c^4}{7 a^4}}$, &c. adeóque (substituendo loco $\frac{b}{a}$ ipsius valorem $\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$, sive $1 - \frac{c^2}{2 a^2} - \frac{c^4}{8 a^4}$; &c. ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15 a^2} + \frac{c^4}{35 a^4}$, &c. ad $\frac{1}{3} + \frac{c^3}{30 a^2} + \frac{c^4}{840 a^4}$; &c. unde $B - A$ est ad G (seu $\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} A$) ut $\frac{c^2}{10 a^2} + \frac{23 c^4}{24 \times 35 a^4}$, &c. ad $1 + \frac{3c^2}{20 a^2} + \frac{25 c^4}{8 \times 70 a^4}$, &c. Est autem $c^2 = 4 d x$, & $a^2 = d^2 + 2 d x + x^2$ ex iis quæ in Propositione supponuntur; unde $\frac{c^2}{4 a^2} = \frac{x}{d} - \frac{2 x^2}{d^2} + \frac{3 x^3}{d^3}$, &c. & substituendo loco $\frac{c^2}{a^2}$ ejus valorem $\frac{4 x}{d} - \frac{8 x^2}{d^2}$, &c. prodibit $B - A$ ad G, ut $14 d x + 18 x^2$ ad $35\ d^2 + 21\ d x + 17\ x^2$ quàm proximè. Cúmque sit $\overline{B - A} \times d + 3 V d = 2 G x - 2 V x - \frac{3 V x^2}{d}$ per Corol. Prop. I. substituatur valor ipsius $\overline{B - A}$, & negligantur termini quos ingreditur $V x^2$ (quoniam V est admodum parva respectu G) eritque $3 \times 35 V d^2 = 56 G d x - 133 V d x + 24 G x^2$ & $x = \frac{3 \times 35 V d^2}{56 d G - 133 V d + 24 G x}$, quòd si in denominatore pro x scribatur valor vero propinquus $\frac{15 V d}{8 G}$ prodibit valor magis accuratus $\frac{3 \times 35 V d}{56\ G - 88\ V}$, eritque $x : d :: 15\ V : 8 G - \frac{88}{7} V$ quàm proximè. Diversâ paulò ratione prodit $x = \frac{15 V d}{8 G} + \frac{165 V V d}{56 G G}$, &c. quam seriem producere non est difficile, si operæ pretium videbitur. In Prop. VI. quæsivimus figuram

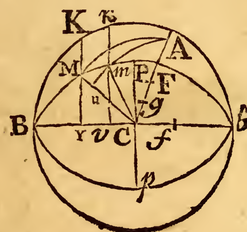
aquæ

aquæ orbem lunarem complentis ex actione Solis oriundam. Hâc correctione adhibitâ, & cæteris retentis ut priùs, Axis minor figuræ ad majorem ut 46.742 ad 47.742, quæ parùm differt à ratione quàm in eâ Propositione exhibuimus.

II. Series quam exhibuimus in Prop. VIII. deducitur per Lem. V. & Prop. II. Sit $CA=a$. $CB=b$. $CP=e$. $CF=c$. $Cf=f$. $Cg=g$. Sint ACM, ACm Sectiones quævis solidi per rectam AC (quæ normalis est plano $BPbp$) transeuntes. Arcus mu centro C radio Cm descriptus, occurrat rectæ CM in u, & occurrant ordinatæ MV, mv Axi Bb in V & v, & circulo BKb in K & k. Sit $CA^2 - CM^2 = x^2$, seu x distantia foci à centro in figura ACM, sit L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, & ultima ratio gravitatis particulæ A in frustum planis ACM, ACm terminatum ad gravitatem in frustum Sphæræ centro C radio CA descriptæ iisdem planis contentum, erit ea $3CM^2 \times \overline{L-x}$ ad x^3 per Prop. II. Gravitas igitur particulæ A in solidum erit ut $\int \frac{3CM^2 \times \overline{L-x}}{x^3} \times \frac{mu}{CM} = \int \frac{3CM \times mu}{x^3} \times \overline{L-x} = \int \frac{3CK \times Kk \times CP}{CK \times x^3} \times \overline{L-x} = \int \frac{3e \times Kk}{x^3} \times \overline{L-x}$. Sit $CV=u$. Eritque $u^2 + \overline{b^2-u^2} \times \frac{c^2}{b^2} = CM^2 = a^2 - x^2$. Unde $c^2 + \frac{b^2-c^2}{b^2}u^2 = a^2 - x^2$. $u^2 = \overline{a^2-c^2-x^2} \times \frac{b^2}{b^2-c^2} = \overline{c^2-x^2} \times \frac{b^2}{f^2}$. Adeóque $KV^2 = b^2 - u^2 = b^2 - \frac{b^2}{f^2} \times \overline{c^2-x^2} = b^2 \times \frac{f^2+x^2-c^2}{f^2} = \frac{b^2}{f^2} \times \overline{x^2-g^2}$. Est autem $Kk : Vv :: CK : KV$. Adeóque $Kk = \frac{bdv}{KV} = \frac{b^2}{f} \times \frac{-xdx}{\sqrt{c^2-x^2} \times \frac{b}{f}\sqrt{x^2-g^2}} = \frac{-bxdx}{\sqrt{c^2-x^2} \times \sqrt{x^2-g^2}}$. Quare gravitas particulæ A versus solidum erit ut $\int \frac{-3ebxdx}{x^3\sqrt{c^2-x^2} \times \sqrt{x^2-g^2}} \times \overline{L-x}$. Verùm $L-x = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4}$, &c. Quare gravitas illa erit $\int \frac{-3ebxdx}{3a^2\sqrt{c^2-x^2} \times \sqrt{x^2-g^2}} + \int \frac{-3ebx^3dx}{5a^4\sqrt{c^2-x^2} \times \sqrt{x^2-g^2}}$, &c. Sit $z^2 = x^2 - g^2$, & prior summa erit $\int \frac{-ebdz}{a^2\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$, secunda erit $\int \frac{-ebx^2dz}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}} = \int \frac{-ebdz \times \overline{z^2+g^2}}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$. Quæ cum subsequentibus summis ad circulares

Arcus facilè reducuntur. Atque hinc ratio gravitatis particulæ A versùs hoc solidum ad gravitatem versùs Sphæram super semidiametrum CA constructam, erit qualis in Propositione assignatur, terminis seriei citissimè decrescentibus, si CF, Cf & Cg sint admodum parvæ. Si evanescat g, hæc series dabit gravitatem versùs Sphæroidem in Æquatore; quæ tamen elegantiùs investigatur in Prop. III.

III. In Prop. IX. observavimus post Newtonum vim Lunæ ad Mare movendum cum vi Solis posse conferri, æstus in Syzygiis & Quadraturis comparando; eadem ratio obtineri posset conferendo æstus qui contingunt in Syzygiis Luminarium in diversis distantiis Lunæ à Terra, si æstus essent accuratè proportionales viribus quibus producuntur. Designet L vim Lunæ mediocrem, S vim Solis mediocrem, X & x duas diversas distantias Lunæ à Terra in Syzygiis æquinoctialibus, Z & z distantias Solis à Terra in iisdem Syzygiis, d & D mediocres utriusque distantias; & si Lunæ declinatio nulla sit, atque essent ut vires Luminarium, seu ut $\frac{Ld^3}{X^3}+\frac{SD^3}{Z^3}$ & $\frac{Ld^3}{x^3}+\frac{SD^3}{z^3}$, hinc comparando æstus ratio L ad S detegeretur. Sit enim ascensus aquæ in priori casu ad ascensum in posteriori ut m ad n, eritque L ad S ut $\frac{mD^3}{z^3}-\frac{nD^3}{Z^3}$ ad $\frac{nd^3}{X^3}-\frac{md^3}{x^3}$.





INQUISITIO PHYSICA IN CAUSAM FLUXUS AC REFLUXUS MARIS.

A. D. D. EULER, *Mathematicarum Professore; è Societate Academiæ Imperialis Sancti-Petersburgensis.*

Cur nunc declivi nudentur littora Ponto,
Adversis tumeat nunc Maris unda fretis;
Dum vestro monitu naturam consulo rerum:
Quàm procul à Terris abdita causa latet!
In Solem Lunamque feror. Si plauditis auso;
Sidera sublimi vertice summa petam.

CAPUT PRIMUM.

De Causâ Fluxus ac Refluxus Maris in genere.

§. I. OMNEM mutationem, quæ in corporibus evenit, vel ab ipsa motûs conservatione proficisci, vel à viribus motum generantibus, hoc quidem tempore, quo qualitates occultæ causæque imaginariæ penitùs sunt explosæ, nullâ indiget probatione. Hoc autem discrimen quovis oblato Phænomeno diligentissimè considerari oportet, ne tam motûs conservationi ejusmodi effectus tribuatur, qui sine viribus oriri nequit, quàm vires investigentur, quæ motum suâ naturâ conservandum producant. Quo quidem in negotio, si debita attentio adhibeatur, errori vix ullus relinquitur locus: cùm ex legibus naturæ satis superque constet, cujusmodi motus vel per se conserventur, vel viribus externis debeantur. Corpus scilicet in motu posi-

tum propriâ vi hunc motum uniformiter in directum retinet: atque corpus, quod circa axem convenientem per centrum gravitatis transeuntem motum rotatorium semel est consecutum, eodem motu rotari perpetuò suâ sponte perget: neque hujusmodi motuum causam in ullâ re aliâ, nisi in ipsâ corporum naturâ, quæri oportet. Quocirca si hujus generis Phænomenon fuerit propositum, alia causa investigari non potest, nisi quæ à principio tales motus procreaverit.

§. 2. Hujus generis foret quæstio, si quæreretur causa motûs vertiginis Planetarum ac Solis; hîc enim sufficeret eam causam assignasse, quæ initio hos motus produxisset, cùm Sol æquè ac Planetæ talem motum semel consecuti eundem propriâ vi perpetuò conservare debeant, neque ad hoc Phænomenon explicandum vis ulla externa etiam nunc durans requiratur. Longè aliter se res habet, si motus proponatur neque uniformis, neque in directum procedens, cujusmodi est motus Planetarum periodicus circa Solem: hoc enim casu minimè sufficit ea vis, quæ initio Planetas ad istiusmodi motus impulerit, sed perpetuò novæ virium actiones requiruntur, à quibus tam celeritas quàm directio continuò immutetur: quæ vires, quàm primùm cessarent, subitò Planetæ orbitas suas desererent, atque in directum motu æquabili avolarent. Quòd si igitur Phænomenon quodcunque naturæ proponatur, antè omnia sollicitè est inquirendum, ad quodnam genus id pertineat, atque utrum causa in viribus externis sit quærenda, an in ipso subjecto corpore? Quinetiam sæpenumerò usu venire potest, ut effectus utriusque generis in eodem Phænomeno multùm sint inter se permixti; quo casu summo studio ii à se invicem discerni antè debebunt, quàm causarum investigatio suscipiatur,

§. 3. His ritè perpensis explicatio Galilei, quam in suis Dialogis de æstu Maris assignare est conatus, mox concidit; putavit enim Fluxum ac Refluxum Maris tantùm à motibus Terræ rotatorio circa axem & periodico circa Solem oriri, neque aliis viribus tribui oportere, *nisi* quæ hos motus cùm producant, tùm conservent. Namque si ponamus Terram solo motu diurno esse præditam, iste motus Mare aliter non afficiet, nisi id sub Æquatore attollendo, ex quo figura Terræ sphæroidica compressa nascitur, motus verò reciprocus in Mari omninò nullus hinc generari poterit. Quòd si autem Terræ insuper motum æquabilem in directum tribuamus, priora Phænomena nullo modo afficientur, sed prorsùs eadem manebunt, quemadmodum ex principiis mechanicis clarissimè perspici licet, quibus constat motum uniformem in directum omnibus partibus Systematis cujuscunque corporum æqualiter impressum nullam omninò mutationem in motu & situ partium relativo inferre. Abeat nunc motus iste æquabilis Terræ in directum impressus in circularem vel ellipticum per vires quibus Terra perpetuò ad Solem urgetur; ac ne

hoc

hoc quidem casu ullus motus reciprocus in Mari produci poterit; quod cùm per se est perspicuum, tùm etiam ab ipso Galileo non statuitur: ipse enim non tàm ex mixtione motûs vertiginis & periodici æstum Maris proficisci est arbitratus, quàm ex motu quocunque progressivo sive rectilineo sive curvilineo, si is cum motu rotatorio combinetur.

§. 4. Quanquàm autem motus Terræ periodicus circa Solem cum motu rotatorio circa axem conjunctus nullum in Mari motum reciprocum generare valet, tamen Mare, quod si motus esset æquabilis in directum in quiete persisteret, aliquantùm turbari debebit. Quòd si autem ad vim quâ Terra in orbitâ suâ continetur attendamus, non difficulter mutationem, quam Mare ab ea patietur, colligere poterimus. Nam cùm partes Terræ à Sole remotiores minori vi, propiores verò majori sollicitentur, illæ ad majus tempus periodicum, hæ verò ad minus absolvendum cogentur, ex quo partibus Terræ fluidis, ut potè mobilibus, motus ab Oriente versùs Occidentem secundùm eclipticam inducetur hancque veram esse causam existimo ac præcipuam cur tàm Oceanus quàm aer sub Æquatore perpetuò habeat Fluxum ab ortu versùs occasum. Possem etiam ex eodem principio clarè ostendere tàm Maris, si omninò liberum esset, quàm aeris celeritatem tantam fore, quâ tempore viginti-quatuor horarum spatium circiter viginti graduum absolvatur; sed cùm hæc inquisitio ad præsentem quæstionem propriè non pertineat, atque inclyta Academia fortasse aliâ occasione quæstiones hùc spectantes sit propositura, uberiorem explicationem hujus insignis Phænomeni eò usquè differendam esse censemus; hoc quidem tempore tantùm indicasse contenti, motum Terræ periodicum conjunctim cum motu diurno Mari motum aliquem imprimere posse, sed neutiquam motum reciprocum, uti Galileus est arbitratus.

§. 5. Uti in omnibus omninò quæstionibus physicis multò facilius est, quæ non sit causa Phænomeni cujuspiam oblati, quàm quæ sit, ostendere; ita etiam præsens quæstio de Fluxu ac Refluxu Maris est comparata, ut non difficulter causas falsò assignatas possimus refellere. Ac primò quidem post eversam Galilei sententiam, explicatio æstûs Maris Cartesiana pressioni Lunæ innixa tot tantisque laborat difficultatibus, ut omninò subsistere nequeat. Præterquàm enim quòd istiusmodi pressio aliundè probari nequeat, atque ad hoc solum Phænomenon explicandum gratuitò assumatur, observationibus etiam minimè satisfacit. In aperto enim ac libero Oceano aquam mox post transitum Lunæ per Meridianum elevari observamus, cùm secundùm Cartesii sententiam eodem tempore deprimi deberet; neque præterea hoc modo satis distinctè explicatur, cur Luna sub Terra latens eundem ferè effectum exerat, ac si super Horizonte versetur. Deinde hoc idem negotium non feliciori successu aggressus est Wallisius causam in communi centro gravitatis Terræ & Lunæ

quærens, cujus explicatio mox ſatis dilucidè eſt ſubverſa. Supereſt denique Newtoni theoria, quæ nemine contradicente Phænomenis multò magis eſt conſentanea: at in ea id ipſum quod hoc loco quæritur, cauſa ſcilicet phyſica, non aſſignatur, ſed potiùs ad qualitates occultas referri videtur; interim tamen ne hæc quidem theoria ſatis eſt evoluta, ut de ejus ſive conſenſu ſive diſſenſu cum obſervationibus judicium ſatis tutum ferri queat.

§. 6. Cùm igitur dubium ſit nullum, quin Fluxûs ac Refluxûs Maris cauſa in viribus externis & realibus ſit poſita, quæ ſi ceſſarent, ſimul æſtus Maris mox evaneſceret, ubi lateant hæ vires & quomodo ſint comparatæ potiſſimùm nobis erit explicandum, hoc enim eſt id ipſum, quod celeberrima Academia Scientiarum Ragia in quæſtione propoſita requirit. Neque verò vires tantummodò indicaſſe ſufficiet, verùm prætereà id maximè erit monſtrandum, quomodo iſtæ vires agant, atque hos ipſos effectus, quos obſervamus, non verò alios producant; in hoc enim totius quæſtionis cardo, explicationis ſcilicet confirmatio, vertitur. Quoniam autem plerumque pluribus viribus excogitandis idem Phænomenon explicari poteſt, ſtudium adhibendum eſt ſummum in hac indagatione, ne ad vires inanes atque imaginarias delabamur, quæ in mundo neque ſunt neque locum habere poſſunt. Parum enim ſcientiæ naturali conſulunt, qui quovis Phænomeno oblato ſibi pro arbitrio mundi ſtructuram peculiarem effingunt, neque ſunt ſolliciti, utrùm ea compages cum aliis Phænomenis conſiſtere queat, an verò ſecùs. Quòd ſi enim jam aliundè conſtet exiſtere in mundo ejuſmodi vires, quæ oblato effectui producendo ſint pares, fruſtrà omne ſtudium in conquiſitione virium novarum collocabitur.

§. 7. Quoniam autem ad cauſam cujuſque Phænomeni detegendam, ad ſingulas circumſtantias ſedulò attendere neceſſe eſt, ante omnia mirificum conſenſum æſtûs Maris cum motu Lunæ contemplari conveniet. Non ſolùm enim inſignis harmonia inter æſtum Maris ac Lunæ motum diurnum deprehenditur, ſed etiam revolutio ſynodica reſpectu Solis ingentem affert varietatem. Omnes denique obſervationes abundè declarant rationem Fluxûs & Refluxûs Maris à ſitu cùm Lunæ tum etiam Solis conjunctim pendere: ex quo ſtatim prono ratiocinio conſequitur, vires illas æſtum Maris producentes, quæcunque etiam ſint, cùm Lunam potiſſimùm, tùm verò etiam Solem reſpicere debere. Quamobrem imprimis nobis erit inquirendum, utrum ejuſmodi vires Solem & Lunam reſpicientes, quæ in aquis talem effectum, qualis eſt æſtus Maris, producere queant, jure ac ratione ſtatui poſſint, an ſecùs. Ac ſi pluribus modis iſtiuſmodi vires animo concipere liceat, diligenter erit diſpiciendum, quænam cum aliis Phænomenis conſiſtere poſſint nec ne. Quantumvis enim explicatio quæpiam cum Phænomenis conſpiret, niſi virium,

quæ

quæ aſſumuntur, exiſtentia aliundè comprobetur, labili ea omninò innititur fundamento. Quòd ſi autem contrà, effectus ejuſmodi viribus tribuatur quas in mundo reverà exiſtere alia Phænomena clarè docuerunt, atque ſummus explicationis cum experientiâ conſenſus deprehendatur, dubium erit nullum quin iſta explicatio ſit genuina & ſola vera.

§. 8. Quamvis autem certis viribus Lunæ ac Soli tribuendis Phænomenon æſtûs Maris commodè explicari poſſet, tamen ob hanc ſolam cauſam iſtiuſmodi vires ſtatuere nimis audax videtur: quamobrem imprimis erit diſpiciendum, num aliæ rationes ejuſmodi vires non ſolùm admittant, ſed etiam actu exiſtere manifeſtò indicent. Perluſtremus igitur vires, quas jam aliundè in mundo vigere novimus, ſciſcitemurque paucis an ad motum reciprocum Oceano inducendum ſint idoneæ: tales enim vires ſi in mundo jam extent, omnis labor in aliis inquirendis impenſus irritus foret ac ridiculus. Ac primò quidem ſi Solem ſpectamus, motus Terræ annuus omninò declarat Terram perpetuò versùs Solem urgeri & quaſi attrahi, idque fortiùs in minori diſtantia, debiliùs verò in majori; atque adeò hanc Solis vim in Terram rationem tenere reciprocam duplicatam diſtantiarum: ex quo ſpontè ſequitur non ſolùm univerſam Terram, ſed etiam ſingulas ejus partes perpetuò versùs Solem urgeri. Tota quidem Terra æquè fortiter ad Solem ſollicitatur, ac ſi omnis materia in ejus centro eſſet congeſta; interim tamen partes circa ſuperficiem ſitæ vel magis vel minùs ad Solem allicientur, quàm totum Terræ corpus, prouti vel minùs vel magis ſint remotæ à Sole, quàm centrum Terræ. Hinc igitur fit, ut hæc eadem vis ad Solem tendens aquam modò magis modò minus trahat, ex quâ alternâ actione motus reciprocus in Fluidis neceſſariò oriri debet. Quocircà iſta Solis vis in præſenti negotio neutiquam negligi poterit, cùm ea, ſi fortè ſola cauſam æſtûs Maris non conſtituit, certè effectum aliarum virium neceſſariò afficere ac turbare debeat.

§. 9. Quemadmodùm autem Terra cum omnibus ſuis partibus versùs Solem ſollicitatur, ita eorum ſententia non multùm à veritate abhorrere videtur, qui in Lunâ ſimilem vim collocant. Obſervationes quidem hujuſmodi vim in Lunâ non demonſtrant ſicuti in Sole; cùm motus Terræ in orbitâ ſuâ à Luna omninò non affici deprehendatur: ſed ſi docuerimus eandem vim ad Lunam reſpicientem, quæ æſtui Maris producendo ſit par, in motu Terræ nullam ſenſibilem anomaliam producere valere, audacia, quæ fortè in talis vis admiſſione conſiſtere videbatur, multùm mitigabitur. Hujuſmodi autem vis exiſtentia aliis rationibus, nullo ad æſtum Maris habito reſpectu, ſatis clarè evinci poteſt; quia enim nullum eſt dubium, quin Luna ad Terram conſtanter feratur, ob æqualitatem actionis & reactionis Terram quoque versùs Lunam pelli neceſſe eſt. Namque ſi ponamus Sole penitùs ſublato, Terræ ac

Lunæ omnem motum ſubitò adimi, Luna utique ad Terram accedet; nemo autem non concedet, probè perpenſis principiis mechanicis, Terram intereà non prorsùs eſſe quieturam, ſed Lunæ obviam ituram, concurſumque in communi gravitatis centro contingere: hoc autem evenire non poterit, niſi Terra actu ad Lunam ſollicitetur. Deindè in ipsâ Lunâ gravitatem dari ſimilem huic, quam in Terrâ ſentimus, negari non poteſt; niſi enim talis vis in Lunâ vigeret, partes Lunæ fluidæ, cùm ob gravitatem in Terram, tùm ob motum Lunæ circa proprium axem, etſi ſit admodùm lentus, & tempori periodico æqualis, jam dudùm avolaſſent, parteſque ſolidæ conſiſtentiam ſuam amiſiſſent. Pluribus deniquè aliis rationibus ex naturâ vorticum petitis, magis confirmari poſſet tale corpus mundanum, cujuſmodi eſt Luna, ſubſiſtere non poſſe, niſi vortice ſit cinctum, quo gravitas in id generetur. Quòd ſi autem gravitationem versùs Lunam concedamus, cur ejus actionem non ad nos usquè admittamus, nulla omninò ratio ſuadet: quin potiùs ejuſmodi vim ſimilem ſtatui conveniet, reliquis in mundo deprehenſis, quæ quaſi in infinitum porriguntur, atque inverſam duplicatam tenent diſtantiarum rationem.

§. 10. His expoſitis manifeſtum eſt, & quaſi experientiâ convictum, Terram cum ſingulis ſuis partibus tam versùs Lunam quàm versùs Solem perpetuò ſollicitari, atque utramque vim proportionalem eſſe reciprocè quadratis diſtantiarum. Hæ igitur vires, cùm actu exiſtant, conſtanterque effectum ſuum exerant, in præſenti negotio, quo in cauſam æſtûs Maris inquirimus, prætereri omninò nequeunt; niſi dilucidè antè ſit probatum, eas non ſolùm Fluxum ac Refluxum non generare, ſed ne quidem quicquam efficere. Si enim iſtæ vires ullum duntaxat motum reciprocum Mari inducere valeant, quantumvis is etiam ſit exiguus, atque adeò æſtui Maris fortaſsè contrarius, earum tamen ratio neceſſariò erit habenda, cùm ſine illis vera cauſa, quæcumque ſit, neque inveſtigari neque cognoſci poſſit. Neque præterea ſanæ rationis præcepta permittunt alias vires excogitare, in iiſque cauſam æſtûs Maris collocare, antequam evidenter ſit demonſtratum, binas iſtas vires Solem Lunamque ſpectantes, quas non gratuitò aſſumſimus, ſed ex certiſſimis Phænomenis in mundo exiſtere novimus, ad Fluxum ac Refluxum Maris producendum non eſſe ſufficientes. In ſequentibus autem capitibus clariſſimè ſumus oſtenſuri, ab his duabus viribus non ſolùm in Oceano motum reciprocum generari debere, ſed etiam eum ipſum, qui æſtus marini nomine inſigniri ſolet: atque hanc ob rem firmiter jam affirmamus veram Fluxûs ac Refluxûs cauſam in ſolis illis duabus viribus, quarum altera ad Solem eſt directa, altera ad Lunam, eſſe poſitam; hocque ſimul omnium eorum ſententias funditùs evertimus, qui vel aliis omninò viribus idem Phænomenon adſcribere, vel cum his ipſis alias vires conjungere conantur.

§. 11.

§. 11. Quæstio igitur de causa Fluxûs ac Refluxûs Maris, prouti ea ab Illustrissimâ Academiâ Regiâ est proposita, ad hanc deducitur quæstionem, ut binarum illarum virium, quibus singulæ Terræ partes cùm ad Solem tùm ad Lunam perpetuò urgentur, idque in distantiarum ratione reciprocâ duplicatâ, causa assignetur Physica. Ex quo tractationem nostram bipartitam esse oportebit. Primò scilicet ex principiis Mechanicis dilucidè erit ostendendum, à binis illis viribus Solem Lunamque respicientibus cùm Fluxum ac Refluxum Maris generatim oriri debere, tùm etiam hoc modo singula Phænomena distinctè explicari posse: hac enim parte absolutâ nullum superterit dubium, quin origo æstûs Maris his ipsis viribus, quas actu jam in mundo existere docuimus, debeatur. Deinde verò harum virium causa Physica indicari debet, cùm id sit præcipuum, quod Inclyta Academia requirit. Quod quidem ad illam partem attinet, in ejus explicatione minimè hæsitamus; & clarissimis certissimisque demonstrationibus evincere pollicemur, per istas vires omnia omninò æstûs Maris Phænomena absolutissimè explicari posse; quâ in re nulli dubitationi ullus relinquetur locus, cùm tota ad Geometriam & Mechanicam sublimiorem pertineat, calculoque analytico sit subjecta. Altera verò pars, in scientiam naturalem imprimis incurrens, majori difficultati videtur obnoxia, nec tantæ evidentiæ capax; verùm cùm ista res occasione plurium quæstionum ab Academiâ Celeberrima antehac propositarum jam tanto studio sit investigata atque absoluta, eam non minori certitudine expedire confidimus.

§. 12. Explosis hoc saltem tempore qualitatibus occultis missâque Anglorum quorumdam renovatâ attractione, quæ cum saniori philosophandi modo nullatenùs consistere potest, omnium virium quæ quidem in mundo observantur, duplex statuendus est fons atque origo. Nempe cùm viribus tribuatur vel motûs generatio vel immutatio, iste effectus semper vel ab allisione corporum, vel à vi centrifugâ proficiscitur, quarum actionum utraque facultati, quâ omnia corpora sunt prædita in statu suo sive quietis sive motûs æquabilis in directum perseverandi, debetur. Ob hanc enim ipsam facultatem corpus in motu positum alia corpora, quæ vel ipsius motui directè sunt opposita, vel ejus directionem mutare cogunt, ad motum sollicitat; atque priori casu regulæ collisionis corporum, posteriori verò vis centrifugæ indoles & proprietates oriuntur ac demonstrantur. Cùm igitur omnia corpora terrestria tam versùs Solem, quàm versùs Lunam perpetuò sollicitentur, causa hujus sollicitationis continuo appulsui materiæ cujusdam subtilis, vel vi centrifugæ similis materiæ tribui debebit. Priori igitur casu materiam subtilem statui opporteret, quæ constanter summâ rapiditate cùm ad Solem tùm ad Lunam ferretur: hujusmodi verò hypothesis ob maximas difficultates, quibus est involuta, admitti minimè potest. Primò enim perpetuò novis vi-

ribus eſſet opus, quæ materiam ſubtilem indeſinenter versùs Solem Lunamque pellerent, quâ quidem re quæſtio non majorem lucem aſſequeretur. Deinde talis motus per ſe diu conſiſtere non poſſet, propter perpetuum materiæ ſubtilis ad eadem loca affluxum nullumque refluxum, ut taceamus alia maxima incommoda cum iſtiuſmodi poſitione permixta.

§. 13. Excluſâ igitur materiæ ſubtilis continuâ alliſione, tanquam ad vires cùm ad Solem tùm Lunam tendentes producendas minimè idonea, alia harum virium cauſa non relinquitur, niſi quæ in vi centrifugâ conſiſtat. Quemadmodum autem materia ſubtilis in gyrum acta ac vorticem formans non ſolùm animo concipi, ſed etiam in mundo perſiſtere queat, jam ſatis ſuperque eſt expoſitum, cùm in diſſertationibus, quæ cùm quæſtio de causâ gravitationis agitaretur, laudes Illuſtriſſimæ Academiæ merebantur, tùm etiam in aliis operibus; quibus in locis ſimul dilucidè eſt oſtenſum, quomodo ejuſmodi vortices comparatos eſſe oporteat, ut vires centrifugæ fiant quadratis diſtantiarum à centro vorticis reciprocè proportionales. Quæ res cùm meo quidem judicio jam tam plana ſit facta, ut vix quicquam ad præſens inſtitutum attinens adjici queat, vorticum ulteriori examini ſine ullâ hæſitatione ſuperſedemus; idque eò magis, quòd Celeberrima Academia ejuſmodi amplam atque adeò jam confectam digreſſionem poſtulare haud videatur. Quoniam enim quæſtio de cauſa gravitatis cùm versùs Terram tùm etiam versùs Solem & Planetas jam ſatis eſt inveſtigata ac diremta; nunc quidem, ſi cujuſcunque Phænomeni cauſa eò fuerit perducta, ibidem acquieſcendum videtur, neque actum agendo denuò in causâ gravitatis inveſtigandâ nimiùm immorari conveniret. Denique in præſenti negotio ſufficere poſſet, ſi æſtûs Maris cauſa adhuc tantis tenebris obvoluta ad alia maximè aperta Phænomena reducatur, quorum cauſa non ſolùm habetur probabilis, ſed etiam quæ ſola ſit veritati conſentanea, cujuſmodi eſt gravitatio tàm versùs Solem quàm Lunam.

§. 14. Cauſam igitur Fluxûs ac Refluxûs Maris proximam in binis vorticibus materiæ cujuſdam ſubtilis collocamus, quorum alter circa Solem alter verò circa Lunam ita circumagatur, ut in utroque vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro vorticis; quæ lex vis centrifugæ obtinebitur, ſi materiæ ſubtilis vorticem conſtituentis celeritas ſtatuatur tenere rationem reciprocam ſubduplicatam diſtantiarum à centro vorticis. Quæcunque igitur corpora in iſtiuſmodi vortice poſita ad ejus centrum pellentur vi acceleratrice, quæ pariter ac vis centrifuga quadratis diſtantiarum reciprocè eſt proportionalis. Vis abſoluta autem quâ corpus quodpiam in datâ diſtantiâ à centro vorticis collocatum eò urgetur, pendet à celeritate materiæ ſubtilis abſolutâ. Ac primò quidem quod ad vorticem circa Solem rotatum attinet, ejus vis abſoluta ex tem-

tempore Terræ periodico cum diſtantia ejuſdem à Sole comparato tanta colligitur, ut corpus, cujus diſtantia à centro Solis æqualis eſt ſemidiametro Terræ, eò ſollicitetur vi, quæ ſit 227512 vicibus major, quàm eſt gravitas naturalis in ſuperficie Terræ. Metiemur autem hanc ipſam vim abſolutam cujuſque vorticis, per vim, quam idem vortex exerit in diſtantiâ à ſuo centro ſemidiametro Terræ æquali: ex quo ſi vis gravitatis terreſtris deſignetur per 1. erit vis abſoluta Solis = 227512, cujus numeri loco brevitatis gratiâ utemur litterâ S. Simili modo vim vorticis Lunam cingentis abſolutam indicabimus litterâ L, cujus valorem Newtonus rectè cùm ex ipſo Fluxu ac Refluxu Maris, tùm etiam ex præceſſione Æquinoctiorum conſtituiſſe videtur circiter $\frac{1}{40}$. Quare ſi, poſitâ Terræ ſemidiametro = 1, corporis cujuſdam à centro Solis vel Lunæ diſtantia fuerit x, erit vis, quâ id corpus vel ad Solem ſollicitatur vel ad Lunam, vel $= \frac{L}{xx}$ vel $= \frac{S}{xx}$, uti ex indole horum vorticum prona conſequentia fluit. In his quidem litterarum S & L determinationibus aſſumſimus mediam Solis à Terra diſtantiam 20620 ſemidiametrorum Terræ, quæ ex parallaxi horizontali 10″ ſequitur, Lunæ verò à Terra diſtantiam mediam 60 ſemid. Terræ; interim tamen vires ad Mare movendum hinc ortæ ab his hypotheſibus non pendent, uti ſequentibus patebit.

§. 15. Quoniam igitur æſtum Maris per binas vires, quarum altera Solem reſpicit, altera Lunam, ſumus expoſituri, facilè videri poſſemus eandem omninò explicationem ſuſcipere, quam Newtonus dedit in ſuis Principiis Mathematicis Philoſophiæ Naturalis. Primùm autem notandum eſt, quòd ſi Newtonus veram cauſam hujus Phænomeni aſſignaſſet, ſummoperè abſurdum atque abſonum foret, novitatis ſtudio aliam cauſam, quæ certò falſa futura eſſet, excogitare. Deinde verò Newtonus ne veſtigium quidem reliquit, ex quo cauſa harum virium attractivarum, quas Soli Lunæque tribuit, colligi poſſet, ſed potiùs de cauſæ Phyſicæ inventione, qualem Academia Regia potiſſimum requirit, deſperaſſe videtur; id quod ejus aſſeclæ apertè teſtantur, qui attractionem omnibus corporibus propriam eſſe, neque ulli cauſæ externæ deberi firmiter aſſerunt, atque adeò ad qualitates occultas confugiunt. Denique Newtonus deductionem & expoſitionem omnium Phænomenorum ad æſtum Maris pertinentium minimè perfecit, ſed quaſi tantum adumbravit; plena enim explicatio tot tamque difficilium Problematum ſolutionem poſtulat, quæ Newtonus non eſt aggreſſus: cùm enim hujus quæſtionis enodatio ampliſſimos calculos requirat, ipſe analyſin vitans pleraque tantum obiter indicaſſe contentus fuit; ob quem defectum plurimis adhuc dubiis circa ipſius explicationem locus eſt relictus. Neque enim in his viribus veram æſtûs Maris cauſam contineri antè certum eſſe poteſt, quàm abſoluto cal-

calculo perfectus consensus Phænomenorum cum Theoriâ fuerit declaratus.

CAPUT SECUNDUM.

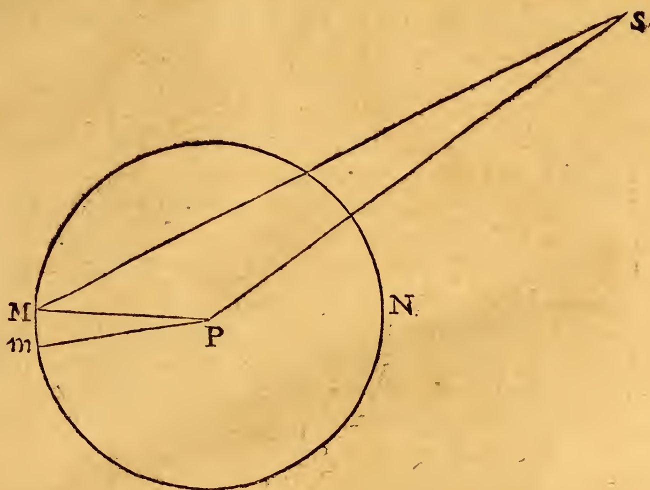
De viribus Solis & Lunæ ad Mare movendum.

§. 16. EFFECTUS, quos vires cùm Solis tùm Lunæ antè stabilitæ in Terram exerunt, ad duo genera sunt referendi: quorum alterum eos complectitur effectus quos Sol ac Luna in universam Terram tamquam unum corpus consideratam exercet; alterum verò eos, quos singulæ Terræ partes à viribus Solis ac Lunæ patiuntur. Ad effectus prioris generis investigandos, omnis Terræ materia tanquam in unico puncto, centro scilicet gravitatis, collecta consideratur, ac tàm ex motu insito quàm viribus sollicitantibus motus Terræ progressivus in suâ orbitâ determinari solet. Ex hocque principio innotuit vim hanc Solis efficere, ut Terra circa Solem in orbitâ ellipticâ circumferatur, vim Lunæ autem tam esse debilem, ut vix ac ne vix quidem ullam sensibilem perturbationem in motu Terræ annuo producere valeat. Contrà autem docebitur, vim Lunæ ad partes Terræ inter se commovendas ac Mare agitandum multò esse fortiorem vi Solis; ex quo plerisque primo intuitu summè paradoxon videatur, quòd vis Lunæ in priori casu respectu vis Solis evanescat, cùm tamen eadem casu posteriori multum excedat vim Solis. Sed mox, cùm effectus utriusque generis diligentiùs evolvemus & perpendemus, satis dilucidè patebit, eos inter se maximè discrepare, atque à vi, quæ in universam Terram minimum exerat effectum, maximam tamen agitationem partium Terræ inter se oriri posse & vicissim.

§. 17. Ad illum autem harum virium effectum, qui in commotione partium Terræ inter se consistit, dijudicandum, ante omnia probè notari oportet, si singulæ Terræ partes viribus æqualibus & in directionibus inter se parallelis sollicitentur, eo casu nullam omnino commotionem partium oriri, etiamsi sint maximè fluidæ nulloque vinculo invicem connexæ, sed totum virium effectum in integro tantum corpore movendo consumtum iri; perindè ac si totum Terræ corpus vel in unico puncto esset conflatum, vel ex materiâ firmissimè inter se connexâ constaret. Ex quo manifestum est partes Terræ saltem fluidas, quæ viribus cedere queant, inter se commoveri non posse, nisi à viribus dissimilibus urgeantur: atque hanc ob rem non magnitudo virium partes Terræ sollicitantium, sed potiùs dissimilitudo, quâ cùm quantitatis tùm directionis ratione inter se discrepant, eum effectum, quo situs partium mutuus per-

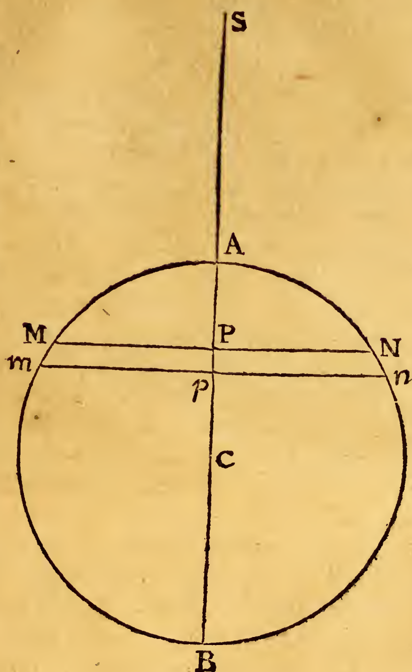
perturbetur, producit. Ita vis Solis, etsi est maxima, tamen ob insignem distantiam partes Terræ ferè æqualiter afficit, contrà verò vis Lunæ ob propinquitatem admodùm inæqualiter: unde à Luna multò major agitatio Oceani resultat, quàm à Sole, quamvis ea vis, quæ ad Solem tendit, insigniter major sit alterâ Lunam respiciente. Atque hoc pacto dubium antè allatum funditùs tollitur, hocque adhuc planius fiet, si utriusque vis effectus ad calculum revocabimus.

§. 18. Ad inæqualitatem igitur virium quibus singulæ Terræ partes vel à Sole vel à Luna sollicitantur, definiendam, ante omnia vim, quâ universa Terra, si in suo centro gravitatis esset concentrata, afficeretur, determinari oportet, hæcque est ea ipsa vis, quæ Terræ motum progressivum in sua orbita respicit & turbat; deindè dispiciendum est, quantùm vires, quibus singulæ Terræ partes urgentur, tàm ratione quantitatis quàm directionis ab illâ vi totali discrepent. Quòd si enim nulla deprehendatur differentia, partes quoque singulæ situm suum relativum inter se retinebunt; at quò major erit differentia inter vires illas singulas partes sollicitantes, eò magis eæ inter se commovebuntur, situm relativum permutabunt. In hac autem investigatione, simul gravitatis naturalis, quâ omnia corpora versùs centrum Terræ tendunt, ratio est habenda; hæc enim vis in causa est, quòd quantumvis vires Solis & Lunæ in diversis Terræ regionibus sint inæquales, æquilibrii tamen status detur, in quo partes tandem singulæ conquiescant, neque perpetuò inter se agitari pergant. Atque hanc ob rem singulæ Terræ partes à tribus viribus sollicitatæ considerari debebunt, primò scilicet à propriâ gravitate, quâ directè deorsum nituntur; tùm verò à vi, quâ ad Solem urgentur, ac tertiò à vi versùs Lunam directâ; hæque tres vires, cujusmodi Phænomena quovis tempore in partibus Terræ fluidis gignant, erit investigandum.



§. 19. Quò igitur vim totalem, quâ Terra vel à Sole vel à Luna urgetur, definiamus, consideremus primùm peripheriam circuli MN tanquam ex materiâ homogeneâ conflatam, cujus centro P verticaliter immineat Sol vel Luna in S, ita ut recta PS ad planum circuli MN sit perpendicularis. Sit circuli hujus radius $PM = y$, & distantia $SP = x$, ac vis sive Solis sive Lunæ absoluta $= S$. His positis elementum peripheriæ Mm pelletur ad S in directione MS vi acceleratrice $= \frac{S}{MS^2} = \frac{S}{xx+yy}$, positâ cùm vi gravitatis naturalis in superficie Terræ $= 1$, tùm etiam semidiametro Terræ $= 1$: atque hanc ob rem elementum Mm versùs S nitetur vi $= \frac{S \times Mm}{xx+yy}$. Resolvatur hæc vis in binas laterales, quarum alterius directio cadat in MP, alterius verò sit parallela directioni PS; atque evidens erit vires omnes MP per totam peripheriam se mutuò destruere, alterarum verò mediam directionem cadere in PS, ac vim his omnibus æquivalentem iisdem conjunctim sumtis fore æqualem. Trahetur autem elementum Mm in directione ipsi PS parallela vi $= \frac{Sx \times Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde positâ ratione radii ad peripheriam $= 1 : \pi$ tota circuli MN peripheria, quæ erit $= \pi y$, urgebitur seu quasi gravitabit versùs S in ipsâ directione PS vi $= \frac{\pi Sxy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. Vis autem acceleratrix quâ hæc peripheria circuli versùs S sollicitabitur, prodibit, si vis motrix inventa dividatur per massam movendam, quæ est $= \pi y$, eritque $= \frac{Sx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$.

§. 20. Hoc præmisso, contemplemur superficiem sphæricam genitam conversione circuli AMB circa diametrum AB; sitque semidiameter $AC = BC = r$; erit ipsa superficies $= 2\pi rr$. Jam attrahatur hæc superficies ad Solem Lunamve in S, existente distantiâ $SC = a$; atque ad vim totalem seu conatum quo integra superficies ad S tendet, inveniendum, concipiatur annulus genitus conversione elementi Mm circa diametrum AB, quæ protensa per S transeat. Positis igitur $SP = x$, $PM = y$, erit per §. præc. conatus hujus annuli in directione $PS = \frac{\pi Sxy . Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. At posito $Pp = dx$, erit $Mm = \frac{rdx}{y}$, & $xx + yy = 2ax - aa + rr$, unde annulli conatus versùs S erit $= \frac{\pi Srxdx}{(2ax-aa+rr)^{\frac{3}{2}}}$, cujus integrale est $= C + \frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$, ex quo conatus portionis superficiei sphæricæ conversione arcus AM ortæ prodibit $= \frac{\pi Srr}{aa} + \frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$. Quare si ponatur $SP = SB$ seu $x = a + r$, emerget conatus totius superficiei sphæricæ $= \frac{2\pi Srr}{aa}$: hincque cùm ipsa superficies sit $= 2\pi rr$, erit vis acceleratrix quâ superficies sphærica actu versùs S tendet $= \frac{S}{aa}$, ideoque tanta, quanta foret, si tota superficies in centro C esset collecta.



§. 21. Cùm igitur superficies sphærica perinde ad Solem sive Lunam in S sollicitetur, ac si tota in ipso centro esset conflata, hæc proprietas ad omnes superficies sphæricas, ex quibus integra Sphæra composita concipi potest, patebit, dummodo singulæ hæ superficies ex materiâ homogeneâ constent, sive quod eodem redit, ipsa Sphæra in iisdem à centro distantiis sit æquè densa. Hanc ob rem ejusmodi Sphæra quoque perinde ad S in directione PS urgebitur, ac si tota ipsius materia in centro C esset concentrata; hæcque proprietas non solùm in ejusmodi

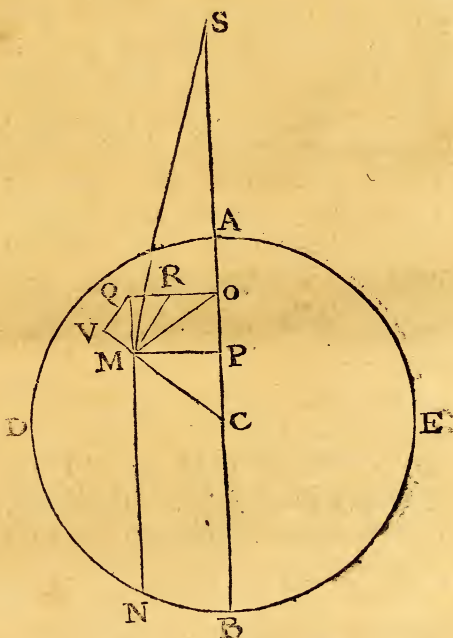
 di

di Sphæras competit, quæ totæ ex materiâ uniformi ſunt confectæ, ſed etiam ut jam indicavimus, in tales, quæ ex materiâ conſtant difformi, dummodo in æqualibus à centro diſtantiis, materia circumquaque ſit homogenea ſeu ſaltem ejuſdem denſitatis. Cùm igitur Terram ſibi repræſentare liceat tanquam Sphæram, ſi non ex uniformi materiâ conflatam, tamen ſine ullo errore ita comparatam, ut in æqualibus circa centrum intervallis materiam æquè denſam includat, Terra quoque univerſa tàm à Sole quàm à Lunâ æquè ſollicitabitur, ac ſi omnis ejus materia in centro eſſet collecta. Quanquam enim nunc quidem accuratiſſimis ab Illuſtriſſimâ Academiâ Regiâ inſtitutis paſſim menſuris ſatis eſt demonſtratum, Terræ figuram ad polos eſſe compreſſam, tamen tantilla à perfectâ Sphærâ aberratio, in aliis quidem negotiis maximi momenti, in hoc inſtituto tutò negligi poteſt. Parique ratione, etiamſi Terra in æqualibus à centro diſtantiis non ſit æquè denſa, tamen differentia certè non eſt tanta, ut error ſenſibilis inde ſit metuendus.

§. 22. Ut igitur vires inveniantur, quæ tendant ad ſitum partium Terræ relativum immutandum, definienda eſt vis acceleratrix, quâ centrum Terræ ſive ad Solem ſive ad Lunam urgeatur: quâ cognitâ, ſi comperiantur omnes Terræ partes æqualibus viribus acceleratricibus & in directionibus parallelis ugeri, nulla omnino ſitûs mutatio, nullaque proinde Maris agitatio orietur. Sed Terra in ſe ſpectata omnium partium ſitum mutuum invariatum conſervabit. At ſi vires, quibus ſingulæ partes à Sole aut Lunâ urgentur, diſcrepent à vi centrum Terræ afficiente, tàm ratione quantitatis quàm directionis, tum niſi firmiſſimè inter ſe ſint connexæ in ſitu ſuo mutuo perturbari debebunt. Hocque caſu aquæ, quæ ob fluiditatem vi etiam minimæ cedunt, ſenſibiliter agitabuntur, atque affluendo defluendoque aliis locis elevabuntur, aliis deprimentur. Cùm autem iſte motus, qui in ſingulis Terræ partibus generatur, à differentiâ inter vires centrum Terræ & ipſas partes ſollicitantes proficiſcatur, propria vis, quâ quæque particula agitabitur, innoteſcet, ſi à vi acceleratrice illam particulam ſollicitante auferatur vis acceleratrix, quam centrum Terræ patitur: hæcque ſubtractio ita inſtituitur, ut cuique particulæ præter vim actu eam ſollicitantem alia vis æqualis illi, quam centrum perpetitur, in directione contrariâ applicata concipiatur: tum enim vis quæ ex compoſitione harum duarum oritur, erit vera vis particulam illam de loco ſuo deflectens.

§. 23. Conſentanea eſt hæc reductio principiis Mechanicis; quibus ſtatuitur motum relativum in ſyſtemate quotcunque corporum & à quibuſcunque viribus ſollicitatorum manere invariatum, ſi non ſolùm toti ſyſtemati motus æquabilis in directum ſimul imprimatur, ſed etiam ſingulis partibus vires æquales quarum directiones ſint inter ſe parallelæ, applicentur. Noſtro igitur caſu motus inteſtinus partium Terræ non turbabitur

babitur, si singulis particulis vires æquales in directionibus parallelis applicemus ut fecimus: quòd si autem istæ vires æquales sint illi, quâ tota Terra seu centrum sollicitatur, & contrariæ, hoc ipso Terræ motum curvilineum & inæquabilem, quippe qui ab iisdem viribus oritur, adimemus. Quare si insuper toti Terræ motum æqualem & contrarium illi, quo actu fertur, impressum concipiamus, obtinebimus totam Terram quiescentem, atque etiam nunc partes perinde agitabuntur & inter se commovebuntur, ac si nullas istiusmodi mutationes intulissemus. Quilibet autem facilè percipiet, quantum ex hâc reductione subsidium assequamur; multò enim facilius erit mutationes, quæ in ipsâ Terrâ accidunt, percipere atque explicare, si centrum Terræ constituatur immotum, quàm si totalis motus singularum partium motibus esset permixtus. Hanc ob rem istâ reductione quâ centrum Terræ in quietem redigitur, perpetuò utemur, quò Phænomena æstûs Maris, prouti in Terrâ immotâ sentiri debent, eliciamus; quippe qui est casus naturalis, ad quem omnes observationes sunt accommodatæ, omnes verò theoriæ accommodari debent.



§. 24. Concipiatur nunc Terra tota tanquam globus $ADBE$ urgeri ad Solem Lunamve in S existentem cujus vis absoluta seu ea, quam in distantia à centro suo S semidiametro Terræ æquali exerit, sit $= S$, distantia verò centri Terræ C ab S seu CS ponatur $= a$; eritque vis acceleratrix, quâ tota Terra tanquam in C collecta sollicitabitur in directione $CS, = \frac{S}{aa}$. Contemplemur jam particulam Terræ quamcunque M cujus situs ita sit definitus, ut sit $CP = x$ & $PM = y$, existente MP normali ad CS, hinc igitur habebitur $SP = a - x$ & $SM = \surd((a-x)^2 + y^2)$. Vis igitur acceleratrix, quâ particula M versùs S pelletur, erit $= \frac{S}{(a-x)^2 + y^2}$; à quâ cùm auferri debeat vis, quâ tota Terra versùs S nititur; concipienda est particulæ M applicata vis $= \frac{S}{aa}$ in directione MN ipsi CS parallelâ & opposita; quæ duæ vires particulam M æquè afficient ac si universa Terra quiesceret vel uniformiter in directum moveretur, qui casus ab il-

lo non differt. Ex his igitur ambabus viribus conatus innotescet, quo particula M à vi ad S directa de loco suo recedere annitetur: ad ipsum autem motum definiendum insuper vis gravitatis erit respicienda: & quia hæc particula non est libera, sed quaquaversùs materiâ terrestri circumdata, investigari oportet, quantum ista materia effectum viribus sollicitantibus concedat.

§. 25. Quoniam autem in hoc capite nobis nondum est propositum in ipsum effectum ab his viribus oriundum inquirere, sed tantum conatum evolvere atque explorare; diligentiùs perpendemus, cujusmodi vires ex combinatione harum potentiarum particulam M sollicitantium resultent. Hunc in finem resolvatur vis MS in duas laterales, quarum alterius directio parallela sit ipsi CS, altera verò in MP cadat: ex quo reperietur vis illa particulam M in directione MQ urgens $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; altera verò vis in directione MP trahens $= \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cùm autem particula M insuper trahatur in directione MN vi $= \frac{aa}{S}$, tres istæ vires à Sole Lunave in S existente reducentur ad duas, quarum altera in directione MQ urgens erit $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{S}{a^2}$, altera verò directionem habens $MP = \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Quare si rectæ MQ & MP his viribus proportionales capiantur, & rectangulum $MQOP$ compleatur exprimet diagonalis MO tàm directionem quàm quantitatem vis ex tribus præcedentibus ortæ: erit autem anguli OMP tangens $= \frac{a-x}{y} - \frac{((a-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 y}$; quo cognito, si fiat ut MP ad MO ita $\frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ad quartam, hæc ipsa quarta proportionalis erit vis particulam M in directione MO sollicitans, quæ oritur à vi ad S tendente.

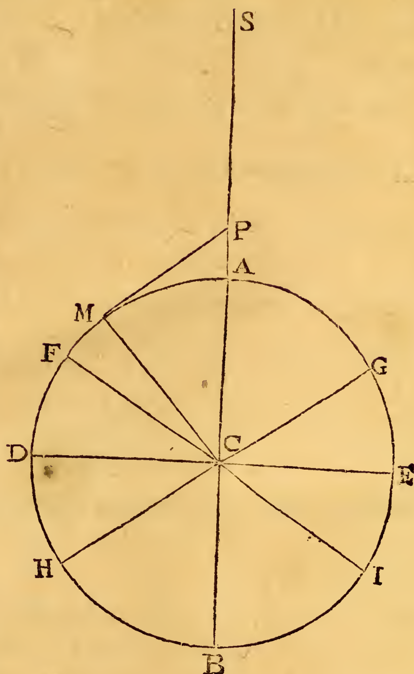
§. 26. Ut autem istæ vires faciliùs cum gravitate naturali, cujus directio est MC, conjungi queant, resolvantur eæ in binas, quarum altera in ipsam directionem MC cadat, alteriùs verò directio sit MR nor-

malis ad MC. Ad hoc commodiffimè præftandum, refolvatur vis MS primùm in duas, quarum altera ut antè directionem habeat ipfi CS parallelam, alteriûs verò directio in ipfam MC incidat. Cùm igitur fit $MC = \sqrt{(x^2+y^2)}$ erit prior vis $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, pofterior verò $= \frac{S\sqrt{(x^2+y^2)}}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ quâ vis gravitatis augebitur. At fi à priori auferatur vis $= \frac{S}{aa}$, remanebit vis particulam M in directione MQ follicitans $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$. Jam ex Q in CM productam demittatur perpendiculum QV, eritque ob fimilitudinem triangulorum QVM & MPC vis gravitati contraria fecundùm directionem MV agens ex vi MQ orta $= \frac{Sax}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$; unde omninò particula M à vi ad S tendente versùs C urgebitur vi $= \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{S(ax-xx-yy)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2)}}$. Præterea verò eadem particula M in directione MR ad MC normali follicitabitur vi $= \frac{Say}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sy}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 27. Tametfi iftæ expreffiones tantoperè fint compofitæ, ut parum ex iis ad ufum deduci poffe videatur, tamen fi confideremus diftantiam Lunæ à Terra, multò magis autem diftantiam Solis, vehementer excedere quantitatem Terræ, ac propterea quantitates x & y refpectu quantitatis a exiguas admodum effe; per approximationem fatis commodas formulas ex iis derivare licebit. Cùm enim fit proximè $\frac{1}{((a-x)^2+y)^{2\frac{3}{2}}} = (a^2 - 2ax + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3} + \frac{3(2ax-xx-yy)}{2a^5} + \frac{15(2ax-xx-yy)^2}{8a^7}$, loco $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ fatis tutò fubftitui poterit $\frac{1}{a^3} + \frac{3x}{a^4} + \frac{3(4xx-yy)}{2a^5}$. Ex his autem obtinebitur vis, quâ particula M præter gravitatem à vi Solis five Lunæ in S exiftentis ad centrum Terræ C in directione MC urgetur, $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Præterea autem eadem particula M follicitabitur in directione MR ad MC normali, vi $= \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{3Sy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}\left(x + \frac{4xx-yy}{2a}\right)$. Atque cùm in his formulis termini primi pofteriores multis vicibus excedant, rem craffiùs infpiciendo, particula M à vi Solis Lunæve fecundùm MC urgebitur vi $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}$, in directione verò MR vi $= \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 28.

§. 28. Ex his igitur postremis formulis intelligitur ab actione Solis sive Lunæ in *S* existentis gravitatem particulæ *M* augeri si ejus situs respectu rectæ *SC* ita fuerit comparatus, ut sit $yy > 2xx$ hoc est tangens anguli $MCP > \sqrt{2}$ posito sinu toto $= 1$, contrà verò gravitatem diminui, si fuerit $yy < 2xx$. Quare cùm angulus cujus tangens est $= \sqrt{2}$ contineat $54^\circ, 45'$ circiter, si concipiatur circulus Terræ maximus quicunque *ADBE*, cujus planum per punctum *S* transeat, in eoque ducantur rectæ *FCI* & *GCH*, quæ cùm rectâ *SAB* angulos constituant $54^\circ\ 45'$; tùm omnes Terræ particulæ in spatiis *FCH* & *GCI* sitæ gravitatis naturalis augmentum accipient, reliquæ verò particulæ in spatiis *FCG* & *HCI* positæ decrementum gravitatis patientur. Atque hinc, quâcumque Terræ particulâ propositâ, definiri poterit, quantùm ejus gravitas à Sole Lunâve in *S* existente vel augeatur vel diminuatur. Altera verò vis, quâ particula *M* in directione horizontali *MR* urgetur, (*vide figuram ad pag. 298.*) affirmativa erit, in eamque plagam, quæ in figura repræsentatur, verget, si quantitates *x* & *y* ambæ fuerint vel affirmativæ vel negativæ: contrariumque eveniet, si earum altera sit affirmativa, altera negativa. Quare si particula *M* sita fuerit vel in quadrante *ACD* vel *ACE*, tum vis horizontalis ad rectam *CA* tendet; contrà verò hæc vis ad radium *CB* dirigetur, si particula *M* sit vel in quadrante *BCD* vel *BCE* constituta. Ex quibus perspicitur effectus vel Solis vel Lunæ in ambo hemisphæria, superius scilicet *DAE* & inferius *DBE*, inter se esse ferè similes; quæ similitudo quoque in ipso æstu Maris observatur.



§. 29. Ponamus nunc particulam *M* in ipsâ Terræ superficie esse constitutam, eritque $\sqrt{(x^2 + y^2)} = 1$ ob Terræ semidiametrum $= 1$. Quare si particula *M* fuerit posita in *M*, existente anguli *ACM* sinu $= y$ & cosinu $= x$, ejus gravitas naturalis acceleratrix à Sole Lunâve in *S* augebitur vi $= \frac{S(y^2 - 2xx)}{a^3}$, secùndum horizontem autem in directione

tione MR urgebitur vi $= \frac{3Sxy}{a^3}$. Gravitas igitur maximè augebitur, si particula M posita fuerit in D vel E, quibus in locis punctum S in horizonte apparet; ibi verò gravitatis augmentum erit $= \frac{S}{a^3}$. In punctis autem A & B, quæ punctum S vel in suo zenith vel nadir positum habent, maximum deprehendetur gravitatis decrementum, quod scilicet erit $= \frac{2S}{a^3}$: ita ut maximum gravitatis decrementum duplò majus sit quàm maximum incrementum. Vis autem horizontalis $\frac{3Sxy}{a^3}$ maxima evadet, si angulus ACM fuerit semirectus, id quod accidit in iis Terræ regionibus, in quibus punctum S conspicitur vel 45° gradibus supra horizontem elevatum, vel tantundem sub horizonte depressum latet: his igitur casibus ob $xy = \frac{1}{2}$ fiet vis horizontalis $= \frac{3S}{2a^3}$. Hujus ergo vis effectus in hoc consistet, ut directio gravitatis mutetur, atque versùs rectam SC inclinetur angulo cujus tangens est $= \frac{3S}{2a^3}$, existente sinu toto $= 1$, quia gravitatem unitate designamus.

§. 30. Hæ itaque vires si satis essent magnæ, in ponderibus utique sentiri deberent, ac prior quidem gravitatem naturalem vel augens vel diminuens in oscillationibus pendulorum animadverti deberet, eorum motum vel accelerando vel retardando; posterior verò vis situm pendulorum quiescentium verticalem de hoc situ deflecteret, atque ad horizontem inclinatum efficeret. Quoniam autem hujusmodi perturbationes non observamus, operæ pretium erit dilucidè monstrare vires illas tam esse exiguas, ut hi effectus sensus nostros omninò effugiant. Primùm igitur cùm pro Sole sit $S = 227512$ atque $a = 20620$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{38535570}$; pro Luna autem quia est $S = \frac{1}{40}$ & $a = 60$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{8640000}$; ex quo vis Lunæ plus quàm quater major est vi Solis, ceteris paribus; atque si Solis & Lunæ vires prorsùs conspirent, erit ex iis conjunctim $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{7057700}$ seu proximè $= \frac{1}{7000000}$. Hinc maxima gravitatis diminutio, quæ quidem oriri poterit, erit $= \frac{1}{3500000}$, maximum verò incrementum $= \frac{1}{7000000}$; unde numerus oscillationum ejusdem penduli eodem tempore editarum, illo casu erit ut $\sqrt{(1 - \frac{1}{3500000})}$ seu $1 - \frac{1}{7000000}$, hoc verò casu ut $\sqrt{(1 + \frac{1}{7000000})}$ seu $1 + \frac{1}{14000000}$. Numeri ergo oscillationum ab eodem pendulo eodem tempore absolutarum, cùm gravitas maximè est diminuta,

& cùm maximè eſt aucta, tenebunt rationem ut 13999998 ad 14000001 hoc eſt ut 4666666 ad 4666667; ex quo ſatis perſpicitur differentiam hanc minimè percipi poſſe. Similis autem omninò eſt ratio alterius Phænomeni declinationis ſcilicet à ſitu verticali comparata, quæ nunquam ad $5'''$ exſurgere poteſt.

CAPUT TERTIUM.

De Figurâ, quam vires cùm Solis tùm Lunæ Terræ inducere conantur.

§. 31. CUM igitur in capite præcedente vires tàm à Sole quàm à Lunâ oriundas determinaverimus, quibus ſingulæ Terræ particulæ ad ſitum relativum cùm inter ſe tùm reſpectu centri, quod in hoc negotio tanquam quieſcens conſideratur, immutandum ſollicitantur; ordo requireret, ut jam in ipſum motum, quo ſingulæ particulæ inter ſe commoveri debeant, inquireremus. Verùm cùm hæc inveſtigatio ſit altioris indaginis, atque opus habeat principiis mechanicis ad motum partium inter ſe reſpicientibus, qualia vix uſquam adhuc reperiuntur; in hoc capite rem ſecundùm principia ſtatica ulteriùs perſequi pergamus, ac figuram determinemus, quam vires Solis & Lunæ cùm ſeorſim tùm etiam conjunctim inducere conantur. Hunc in finem Terram undequaque materiâ fluidâ ſeu aquâ cinctam contemplabimur, quò ſollicitationibus obedire ac figuram iis convenientem actu induere queat. In hoc ſcilicet negotio Solem & Lunam pariter ac ipſam Terram quieſcentes concipimus, ita ut inter ſe perpetuò eundem ſitum relativum conſervent, quo pacto Terræ ab actionibus Solis ac Lunæ figura permanens mox induetur, quam tamdiu retinebit, quoad idem ſitus relativus duret. Perſpicuum autem eſt cognitionem hujus figuræ magno futuram eſſe adjumento ad ejuſdem figuræ tranſmutationem definiendam, ſi tàm Soli quàm Lunæ motus tribuatur.

§. 32. Conſideremus igitur primùm Terram in ſtatu ſuo naturali, in quem ſe ſola vi gravitatis compoſuit; in quo, cùm habitura ſit figuram ſphæricam, repræſentet circulus $ADBE$ ſeu potiùs globus ejus rotatione ortus Terram, quam præterea undique aquâ circumfuſam ponimus. Verſetur jam Sol vel Luna in S, à cujus vi cùm gravitas naturalis tam in A quàm in B diminuatur, in D verò & E augeatur, manifeſtum eſt Terram ſeu potiùs aquam illi circumfuſam elevatum iri in A & B, contrà verò in D & E deprimi, idque eouſque, quoad ſollicitationes à Sole Lunâve in S oriundæ cum vi gravitatis ad æquilibrium fuerint redactæ.

Sit

Sit itaque curva *a d b e* ea figura, quæ circa axem *a b* rotata generet Terræ formam, quam à vi ad *S* directâ tandem recipiet, atque cùm aquæ nunc ponantur in æquilibrio constitutæ, necesse est ut directio media omnium sollicitationum, quibus singulæ Terræ particulæ in supremâ superficie sitæ urgentur, ad ipsam superficiem sit normalis. Quare si particulam quamcunque *M* spectemus; ea primùm à gravitate naturali in directione *M C* urgetur deorsùm, idque vi, quam constanter ponimus = 1; quippe quæ est ipsa gravitas in superficie Terræ, eò quòd elevatio vel depressio particulæ distantiam ejus à centro Terræ, à quâ variatio gravitatis pendet, sensibiliter non immutet. Deinde verò eadem particula *M* à vi in *S* existente sollicitatur duplici vi, quarum alterius directio in ipsam *M C* incidit, alterius verò in *M R* normalem ad *M C*. Quocirca trium harum virium mediam directionem incidere oportet in rectam *M N* normalem ad curvam *a M d*, quo ipso natura hujus curvæ determinabitur.

§. 33. Dubium hîc subnasci posset, quod cùm ad præsens institutum omnium virium, quibus singulæ particulæ sollicitantur, ratio haberi debeat, eam hîc negligamus, quæ à vi centrifugâ motûs Terræ diurni oritur, quippe quæ non solùm non est infinitè parva, sed multis vicibus major, quàm vires quæ vel à Sole vel Lunâ resultant: sed quia hæc vis constantem producit effectum, Terræ scilicet figuram sphæroidicam ad polos compressam, mutationem, quæ in Fluxu ac Refluxu Maris observatur, sensibiliter afficere nequit. Deinde quamvis hîc figuram Terræ sphæricam ponamus, tamen in aberrationem præcipuè ab hac figurâ tam à Sole quàm Lunâ oriundam inquirimus: manifestum autem est, quantum figura aquæ ob vires Solis Lunæve à sphæricâ recedat, tantundem aquæ figuram admisso motu diurno Terræ à figurâ sphæroidicâ esse discrepaturam. Quâpropter in hoc negotio sufficere potest, si, Terrâ instar sphæræ perfectæ consideratâ, definiamus quantam differen-

tiam in aquæ figurâ vires cùm Solis tùm Lunæ producant: hac enim determinatâ, si Terræ motus vertiginis restituatur, perspicuum erit totam figuram sub æquatore intumescere, sub polis autem subsidere; ita tamen ut ubique eadem vel elevatio vel depressio aquæ à viribus Solis Lunæve maneat. Namque si ulla etiam varietas in æstu Maris à motu vertiginis Terræ proficiscatur, ea calculo monstrante nusquam major esse potest parte $\frac{1}{289}$ æstûs totalis; tantilla autem differentia notari non meretur, neque ob eam causam operæ pretium est tam complicatos & abstrusos calculos inire, ad quos perveniretur, si Terræ figura naturalis à sphæricâ diversa poneretur, atque insuper vis centrifuga à motu vertiginis Terræ in computum duceretur.

§. 34. Ad curvam igitur $aMdb$, cui ea quæ ex alterâ parte axis ab similis est & æqualis, determinandam, ponatur vis absoluta sive Solis sive Lunæ in S existentis $= S$, distantia $CS = a$, ac ducta semiordinata MP vocetur $CP = x$, & $PM = y$. Ex præcedenti igitur capite habebitur vis, quâ punctum M vel à Sole vel Lunâ versùs C urgebitur $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$, insuper autem idem punctum M sollicitabitur in directione MR normali ad MC vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx-yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$. Præter has verò vires punctum M gravitate naturali deorsum pellitur vi $= 1$ secundùm directionem MC, ita ut punctum M ab omnibus his viribus conjunctim in directione MC deorsum urgeatur vi $= 1 + \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$ ubi ob 1 sequens terminus tutò negligi potest, & in directione MR vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$; quarum duarum virium si MN ponatur media directio, prodibit per regulas compositionis motus anguli CMN tangens $= \frac{3Sy(2ax+4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}+2Sa(yy-2xx)}$, quæ divisione actu institutâ, iisque terminis neglectis in quorum denominatoribus a plures quàm quatuor obtinet dimensiones, abit in hanc expressionem $\frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, quæ est ea ipsa formula, quâ vis MR exprimebatur. Quocirca angulus CMN prorsùs non pendet ab auctâ minutâve gravitate, sed tantùm à vi horizontali singulis particulis in Terræ superficie sitis impressâ.

§. 35. Quoniam verò hæc ipsa media directio MN debet esse ad curvam aMd in puncto M normalis, erit subnormalis $PN = -\frac{ydy}{dx}$ & $CN = \frac{xdx+ydy}{dx}$. Cùm igitur sit anguli MNP tangens $= \frac{-dx}{dy}$ & anguli MCP tangens $= \frac{y}{x}$, erit horum angulorum differentiæ, hoc est anguli CMN tangens $= \frac{ydy+xdx}{ydx-xdy}$, quæ superiori expressioni, quâ

hæc

hæc eadem tangens deſignabatur, æqualis poſita pro curvâ quæſitâ $aMdb$ ſequentem præbebit æquationem $\frac{ydy+xdx}{ydx-xdy} = \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, ad quam integrandam ponimus $\sqrt{(xx+yy)} = z = MC$, & anguli MCA coſinum $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = u$, unde fiet $x = uz$ & $y = z\sqrt{(1-uu)}$, atque $ydx - xdy = \frac{zzdu}{\sqrt{(1-uu)}}$, itemque $xdx + ydy = zdz$. Hac autem factâ ſubſtitutione, æquatio inventa abit in hanc $\frac{dz}{zz} = \frac{3Sudu}{a^3} + \frac{3Szdu(5uu-1)}{2a^4}$, cujus poſtremus terminus, qui ob parvitatem præ reliquis ferè evaneſcit, ſi abeſſet, foret integrale $\frac{1}{c} - \frac{1}{z} = \frac{3Suu}{2a^3}$ ſeu $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3}$ proximè. Ponamus itaque completum integrale eſſe $z = c + \frac{3Sc^2u^2}{2a^3} + \frac{3Sc^3V}{2a^4}$, ac factâ applicatione reperietur $V = \frac{5u^3-3u}{3}$, ita ut habeatur $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3} + \frac{Sc^3u(5uu-3)}{2a^4}$, quod autem integrale proximè tantùm ſatisfacit; at mox aliâ viâ aperietur verum ipſius z valorem per u commodiùs & propiùs definiendi.



§. 36. Cùm autem ſoliditas ſphæroidis, quod generatur ex converſione curvæ adb circa axem ab, æqualis eſſe debeat ſoliditati Sphæræ radio $CA = 1$ deſcriptæ, hinc conſtans quantitas c quæ per integrationem eſt ingreſſa, definietur: id quod commodiſſimè præſtabitur, ſi utraque ſphæroidis ſemiſſis, ſuperior ſcilicet versùs S directa, atque inferior ſeorſim inveſtigetur. Quoniam igitur pro ſemiſſi ſuperiori eſt $CP = x = zu = cu + \frac{3Sccu^3}{2a^3} + \frac{Sc^3u^2(5uu-3)}{2a^4}$ & $MP^2 = y^2 = z^2(1-uu) = (1-uu)\left(cc + \frac{3Sc^3u^2}{a^3} + \frac{Sc^4u(5uu-3)}{a^4}\right)$, erit $\int yydx$, cui ſoliditas genita converſione ſpatii $dCPM$ eſt proportionalis, $= c^3u - \frac{c^3u^3}{3} + \frac{5Sc^4u^3}{2a^3}$

 $-3Sc$

$-\frac{3Sc^4u^5}{2a^3}-\frac{3Sc^5u^2}{a^4}+\frac{21Sc^5u^4}{4a^4}-\frac{5Sc^5u^6}{2a^4}$. Posito igitur $u=1$, prodibit superioris semissis ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}-\frac{Sc^5}{4a^4}$. Simili modo cùm pro inferiori semissi sit $Cac=z=c+\frac{3Sc^2u^2}{2a^3}-\frac{Sc^3u(5u^2-3)}{2a^4}$, erit ejus soliditas ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}+\frac{Sc^5}{4a^4}$; ex quibus totius sphæroidis soliditas erit ut $\frac{4}{3}c^3+\frac{2Sc^4}{a^3}$. Quare cùm Sphæræ radio $=1$ descriptæ soliditas pari modo definita, sit ut $\frac{4}{3}$, fiet $1=c^3+\frac{3Sc^4}{2a^3}$; hincque $c=1-\frac{S}{2a^3}$. Quamobrem pro curvâ quæsitâ habebitur, hoc valore loco c substituto, ista æquatio $z=1+\frac{S(3u^2-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$; ex quâ natura istius curvæ luculenter cognoscitur.

§. 37. Hinc igitur perspicitur à Sole vel Lunâ in S existente aquam, cujus superficies antè erat in A, attolli in a, ita ut sit elevatio $Aa=\frac{S}{a^3}+\frac{S}{a^4}$; atque in regione oppositâ B, aquam pariter elevari per spatium $Bb=\frac{S}{a^3}-\frac{S}{a^4}$: unde patet aquas in A & B, ad eandem ferè altitudinem elevari, cùm excessus superioris elevationis super inferiorem sit tantum $\frac{2S}{a^4}$, quod discrimen respectu totius elevationis vix est sensibile. Contrà verò in regionibus lateralibus D & E, aqua circumquaque æqualiter deprimetur, & quidem per intervallum $Dd=Ee=\frac{S}{2a^3}$; ex quo ista depressio duplo minor est, quàm elevatio quæ in A & B accidit. In punctis præterea F, G, H & I, quæ à cardinalibus A & B distant angulo $54^{\circ}\ 45'$, quippe pro quo est $3uu-1=0$, neque elevabitur aqua neque deprimetur, sed naturalem tenebit altitudinem. In loco autem Terræ quocumque M cognoscetur aquæ vel elevatio vel depressio ex angulo ACM, cujus cosinus u est sinus altitudinis sub quâ Sol vel Luna in S existens super horizonte conspicitur ab observatore in M constituto; hoc enim in loco aqua elevata erit supra naturalem altitudinem intervallo $=\frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$: quæ expressio si fit negativa, Maris depressionem indicat. Hîc autem annotare non est opus, quòd si punctum S sub horizonte lateat, tum sinus depressionis maneat quidem u, sed negativè accipi debeat.

§. 38. Definiamus igitur primùm cùm elevationem tùm depressionem, quæ à solâ vi Solis ubique terrarum produci deberet, si uti ponimus, omnia in statu æquilibrii essent constituta. Quoniam itaque est $S=227512$ atque $a=20620$ semid. Terræ, si una Terræ semidiameter assumatur

19695539

19695539 pedum Parif. erit $\frac{S}{a^3} = 0,5072$ ped. feu pauxillum excedet femipedem: valor autem $\frac{S}{a^4}$ omnino erit quantitas evanefcens & imperceptibilis. Hanc ob rem in regionibus fub Sole verticaliter fitis, quæ habeant Solem vel in Zenith vel Nadir, aqua ultra altitudinem naturalem attolletur ad femipedem cum pollicis parte decimâ circiter; depreffio autem maxima cadet in loca, quæ Solem in horizonte confpicient; ubi aqua ad quadrantem pedis tantum deprimetur; ex quo totum difcrimen, quod à Sole in altitudine aquæ naturali oritur, ad tres quartas pedis partes circiter affurget. Ifte Solis effectus autem diftantiæ tantum mediocri Solis à Terra eft tribuendus: quòd fi enim Sol verfetur vel in apogæo, vel perigæo, ejus effectus vel diminui vel augeri debebit in ratione reciprocâ triplicatâ diftantiarum Solis à Terra, quia pendet à valore $\frac{S}{a^3}$. Cùm igitur orbitæ Terræ excentricitas fit $= \frac{163}{10000}$, erit intervallum Aa vel Bb, dum Sol in perigæo verfatur, $= 0,5332$ ped. fin autem Sol in apogæo fit conftitutus, $= 0,4825$ pedum; quorum differentia ad vicefimam pedis partem afcendit: valor autem medius eft $= 0,5072$, quem pro mediocri diftantiâ Solis à Terra invenimus.

§. 39. Problema hoc, quod hucufque dedimus folutum, quodque maximi eft momenti ad effectus cùm Solis tùm Lunæ in Mari elevando & deprimendo definiendos, Newtonus ne attigit quidem, fed aliam viam fecutus, non folùm indirectam fed etiam erroneam, invenit Mare à folâ vi Solis ad altitudinem duorum ferè pedum elevari debere; cùm tamem tam eandem vim Soli abfolutam quàm eandem diftantiam à Terra affumfiffet, quibus nos fumus ufi. Conclufit autem hunc enormem effectum ex comparatione vis Solis feu valoris $\frac{S}{a^3}$ cum vi Terræ centrifugâ à motu diurno ortâ, quâ Terra fub æquatore extenditur ac craffior redditur quàm fub polis; atque affumit elevationem aquæ à vi Solis ortam eandem tenere debere rationem ad incrementum Terræ fub æquatore à vi centrifuga factum, quàm teneat vis Solis ad vim centrifugam. Sed præterquam quòd hoc ratiocinium nimis infirmo fuperftructum fundamento, noftrâ viâ directâ, quâ fumus ufi, ftatim evertitur: ex ipsâ enim rei naturâ, nullis precariis affumtis principiis, elevationem aquarum à vi Solis oriundam directè & luculenter determinavimus; ac fi ullum etiam dubium ob integrationem per approximationes tantum inftitutum reftaret, id mox tolletur, cùm infrà idem problema aliâ methodo prorfus diverfâ fumus refoluturi, congruentemque folutionem exhibituri.

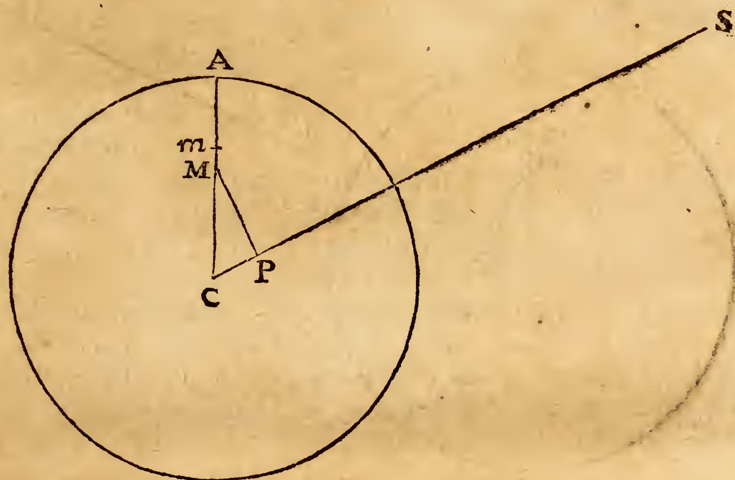
§. 40. Quamvis autem ifte Solis effectus in Mari tam elevando quèm deprimendo non adeò certus & planus effe videatur ob parallaxin Solis;

Solis, quam 10″ aſſumſimus, nondum accuratiſſimè definitam; à quâ tam diſtantia Solis à Terra a, quàm æſtimatio vis abſolutæ S, pendet: tamen ſi rem attentiùs perpendamus, comperiemus expreſſionem $\frac{S}{a^3}$ perpetuò eundem retinere valorem, quæcumque Soli parallaxis tribuatur: mutatâ enim parallaxi, valor litteræ S præcisè in eadem ratione, in quâ cubus diſtantiæ a^3, mutabitur. Per leges enim motûs firmiſſimè ſtabilitas patebit quantitatem $\frac{S}{a^3}$ à ſolo tempore periodico Terræ circa Solem determinari, cujus quantitas accuratiſſimè eſt definita. Quod ut clariùs appareat, conſideremus planetam quemcunque circa Solem in orbitâ ellipticâ revolventem, cujus ſemiaxis tranſverſus ſeu diſtantia à Sole media ſit $= a$, vis autem Solis abſoluta $= S$, erit tempus periodicum ſemper ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; quòd ſi igitur tempus periodicum ſit $= t$, erit t ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$ & $\frac{S}{a^3}$ uti $\frac{1}{tt}$. Ad valorem autem fractionis $\frac{S}{a^3}$ abſolutè inveniendum, exprimatur a in ſemidiametris Terræ, atque in minutis ſecundis dato tempore periodico t, erit ſemper $t = \frac{5064\frac{1}{2}\, a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; ex quo prodit $\frac{S}{a^3} = \frac{5064\frac{1}{2} \times 5064\frac{1}{2}}{tt}$, poſitâ unitate cùm pro gravitate naturali, tùm pro unâ Terræ ſemidiametro. At ſi tempus Terræ periodicum ſeu annus ſidereus in minutis ſecundis exponatur, fiet $t = 31558164$, atque $\frac{S}{a^3} = 0{,}50723$ ped. poſitâ ſemidiametro Terræ per obſervationes exactiſſimas 19695539 ped. Pariſ. Reg. omnino uti antè invenimus.

§. 41. Simili modo ex ſuperiori æquatione elevatio aquæ à vi Lunæ oriunda determinabitur; poſitâ enim vi Lunæ abſolutâ $= L$, poni oportet $S = L$, ejuſque valor proximè erit $= \frac{1}{40}$, quem à Newtono repertum tantiſper retinebimus, quoad verus valor per alia Phænomena accuratiùs definiatur. Quoniam itaque Lunæ à Terrâ mediocris diſtantia eſt $= 60\frac{1}{2}$ ſemid. Terræ, erit $\frac{S}{a^3} = L \times 88{,}94$ ped. $= 2{,}223$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}47 = 0{,}037$ ped. Cùm autem Lunæ excentricitas ſit quaſi $\frac{550}{10000}$, erit dum Luna in perigæo verſatur $\frac{S}{a^3} = L \times 104{,}44$ ped. $= 2{,}611$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}82 = 0{,}045$. pedum. At ſi Luna fuerit in apogæo, prodibit $\frac{S}{a^3} = L \times 75{,}74$ ped. $= 1{,}893$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}19 = 0{,}030$ pedum. Ex his igitur ſi Luna à Terrâ mediocriter diſtet, erit aquæ elevatio $Aa = L \times 90{,}41$ ped. $= 2{,}260$ ped. elevatio autem $Bb = L \times 87{,}47$ ped. $= 2{,}187$ pedum: ac depreſſio ad latera $Dd = Ee = L \times 44{,}47$ pedum $= 1{,}112$ ped. Pro perigæo verò Lunæ fiet $Aa = L \times 106{,}26$ ped. $= 2{,}656$ pedum

dum; $Bb = L. 102, 62$ ped. $= 2, 565$ pedum; atque $Dd = Ee = L. 52, 22 = 1, 305$ pedum. Pro apogæo denique Lunæ habebitur $Aa = L. 76, 93$ ped. $= 1, 923$ pedum, & $Bb = L. 74, 55$ ped. $= 1, 864$ pedum, atque $Dd = Ee = L. 37, 87$ ped. $= 0, 947$ pedum.

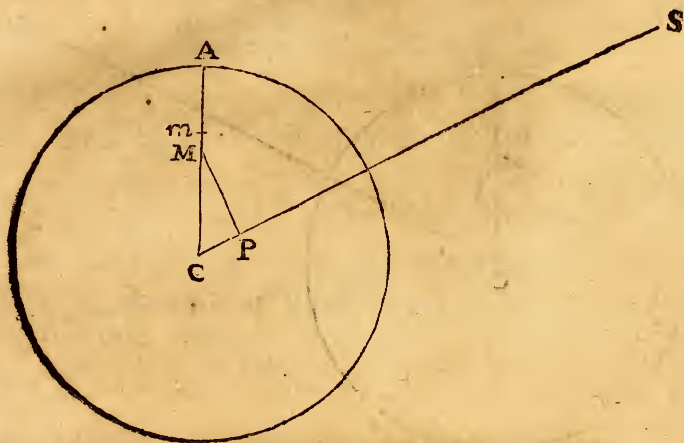
§. 42. Tametſi autem hac methodo non difficulter tam elevatio Maris quàm depreſſio quæ vel à Sole vel Lunâ ſeorſum gignitur, ſit determinata, ſi quidem omnia ad ſtatum quietis redacta concipiantur; tamen nimiùm foret difficile ejuſdem methodi ope eaſdem res definire, ſi Sol & Luna conjunctim agant. Quamobrem aliam methodum exponamus, cujus uſus pro utroque caſu æquè pateat; quæ cùm à priori penitùs ſit diverſa, ſimul ea, quæ jam ſunt eruta atque à Newtonianis diverſa deprehenſa, maximè confirmabit. Petita verò eſt hæc altera methodus ex eâ æquilibrii proprietate, quâ requiritur, ut omnes columnæ



aqueæ à ſuperficie Terræ ad centrum pertingentes ſint inter ſe æquiponderantes. Exiſtente igitur vel Sole vel Lunâ in S, cujus vis abſoluta ponatur $= S$, & diſtantia $SC = a$, ſit AC columna aquea à ſuperficie Terræ A ad centrum C uſque pertingens, quæ altitudo AC ſit $= h$. Ponatur anguli ACS coſinus $= u$, qui ſimul erit ſinus altitudinis ſub quâ punctum S à ſpectatore in A conſtituto ſuper horizonte elevatum conſpicitur; ſumaturque intervallum quodcunque $CM = z$, & conſideretur totius columnæ elementum $Mm = dz$. Hoc igitur elementum primò à gravitate deorſum versùs C urgebitur, cujus effectus, cùm intra Terram pro variis diſtantiis non ſatis conſtet, ponatur dignitati cuicunque diſtantiarum à centro putà ipſi z^n proportionalis: mox enim planum fiet exponentem n nil omnino determinationes eſſe turbaturum. Urgebitur er-

go elementum Mm versùs centrum C vi $= z^n dz$; ex quo totius columnæ AC nisus deorsum à gravitate oriundus, erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1}$.

§. 43. Præterea autem elementum $Mm = dz$ à vi S sollicitabitur duplici modo, altero deorsum in directione MC, altero in directione ad illam MC normali, quæ posterior vis, cùm pondus columnæ nequaquam afficiat, tutò negligetur, solaque prior considerabitur. Demisso autem ex M in CS perpendiculo MP, positisque $CP = x$ & $PM = y$, erit $\sqrt{(x^2+y^2)} = z$, & $x = uz$ atque $y = z\sqrt{(1-uu)}$. At ex §. 27. vis, quâ particulâ Mm deorsum sollicitatur, est $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$ $= \frac{Sz(1-3uu)}{a^3} + \frac{3Suz^2(3-5uu)}{2a^4}$. Quæ expressio per dz multiplicata,



tumque integrata facto $z = h$, præbebit totius columnæ AC nisum à vi S oriundum $= \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$. Quocirca totus columnæ AC nisus deorsum tendens erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; qui cùm in omnibus columnis debeat esse idem, æquabitur conatui, quo columna æqualis semidiametro Terræ 1 in statu naturali à solâ gravitate deorsum nititur, quæ vis est $= \frac{1}{n+1}$. Hinc igitur sequens emergit æquatio, $1 = h^{n+1} + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; ex quâ elicitur $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$, quæ est ea ipsa expressio, quam suprà §. 36. alterâ methodo invenimus.

§. 44

§. 44. Agant nunc vires ambæ ad Solem Lunamque directæ conjunctim; ac primò quidem designet S Solis vim absolutam, a ejus distantiam à Terra, & u sinum anguli, quo Sol suprà horizontem est elevatus. Deinde sit simili modo pro Luna L ejus vis absoluta, b ejus distantia à Terrâ, atque v sinus altitudinis Lunæ super horizonte. Ex his igitur columna aquea $AC = h$ tam vi propriæ gravitatis quàm à viribus Solis ac Lunæ conjunctim in centrum C urgebitur vi $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv)}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2u^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$, quæ æqualis esse debebit vi $\frac{1}{n+1}$. Ex hac autem æquatione resultat $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2u^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$. Quocirca aqua in A supra situm naturalem, quem à solâ gravitate sollicitata obtineret, à viribus Solis ac Lunæ conjunctim sollicitantibus, elevabitur per intervallum $= \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ex quâ expressione status aquæ vel elevationis vel depressionis ubique terrarum cognoscetur.

§. 45. Hanc posteriorem viam secuti, non solùm actiones Solis ac Lunæ commodè conjungere potuimus, sed etiam nunc nobis licebit motûs vertiginis Terræ, & vis centrifugæ inde ortæ, rationem habere; id quod methodo priore opus fuisset insuperabile. Ponamus enim altitudinem columnæ naturalem AC, quam habitura esset à vi gravitatis & vi centrifugâ simul, seu quod eodem redit, in figurâ Terræ sphæroidicâ compresſâ, esse $= f$, altitudinem autem quam habebit accedentibus viribus Solis ac Lunæ esse $= h$; atque manifestum est quantitates f & h quàm minimè ab 1 discrepare. Cùm igitur utriusque columnæ f & h idem debeat esse nisus deorsùm, columnæ autem f in quam sola gravitas & vis centrifuga agunt nisus sit $= \frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff$, denotante α quantitatem à vi centrifugâ in A pendentem, columnæ verò h nisus sit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} - \alpha h^2 + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5v^2)}{2b^4}$; erit æqualitate factâ $f^{n+1} - (n+1)\alpha ff = h^{n+1} - (n+1)\alpha h^2 + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Lh^2(3-1vv)}{2b^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$. Ponatur $h = f + s$, erit ob α quantitatem vehementer parvam, a verò & b maximas, $0 = f^n s + \frac{Sf^2(1-uu)}{2a^3} + \frac{Lf^2(1-3vv)}{2b^3} - 2\alpha fs + \frac{Sfs(1-3uu)}{a^3} + \frac{Lfs(1-3vv)}{b^3} + \frac{Sf^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lf^3v(3-5vv}{2a^4}$, neglectis terminis in

 qui-

quibus s plures obtinet dimensiones, ob summam ipsius s parvitatem respectu ipsius f. Hinc itaque fiet $s = \dfrac{\dfrac{S(3uu-1)}{2a^3} + \dfrac{L(3vv-1)}{2b^3} + \dfrac{Sfu(5uu-3)}{2a^4} + \dfrac{Lfv(5vv-3)}{2b^4}}{f^{n-2} - \dfrac{2\alpha}{f} + \dfrac{S(1-3uu)}{a^3 f} + \dfrac{L(1-3vv)}{b^3 f}}$.

Quòd si porrò ponatur semiaxis Terræ per polos transiens $= 1$, erit ob æquilibrium $\frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff = \frac{1}{n+1}$ & $f = 1 + \alpha$, ex quo denominator præcedentis fractionis ab unitate quàm minimè discrepabit; sub ipso enim æquatore est $\alpha = \frac{1}{578}$, ubi quidem est maximum: unde omnino ut antè elevatio aquæ à viribus Solis ac Lunæ orta supra altitudinem naturalem $s = \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$; discrimen enim quod revera aderit, sensus omnino effugiet, pendebitque simul à valore exponentis n.

CAPUT QUARTUM.

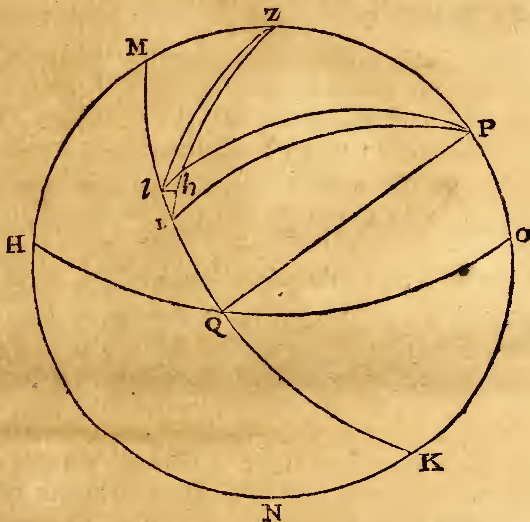
De Fluxu ac Refluxu Maris si aqua omni inertiâ careret.

§. 46. QUÆ in capite præcedente sunt tradita respiciunt hypothesin assumtam, quâ Solem ac Lunam respectu Terræ perpetuò eundem situm tenere posuimus; ibique præcipuè statum æquilibrii, ad quem Oceanus à viribus Solis & Lunæ perducatur, determinavimus. Longè aliter autem se res habet, si tam Luna & Sol quàm Terra in motum collocentur, quo casu ob perpetuam sitûs relativi mutationem nunquam æquilibrium adesse poterit; cùm enim tempore opus sit, quo data vis datum corpus ad motum perducat, duplici modo status oceani assignatus à vero discrepabit. Namque primò aqua quovis momento in eum æquilibrii situm, quem vires sollicitantes intendunt, pervenire non poterit, sed tantum ad eum appropinquabit continuò; deinde etiamsi in ipsum æquilibrii situm perveniat, in eo tamen non acquiescet, sed motu jam concepto ulteriùs feretur, uti ex naturâ motûs abundè constat. Hujus autem utriusque aberrationis ratio in inertiâ aquæ est posita, quâ fit ut aqua nec subitò in eum situm se conferat, in quo cum viribus datur æquilibrium, nec cùm hunc æquilibrii situm attigerit, ibi quiescat. Quocirca ne difficultatum multitudine obruamur, aquam omni inertiâ carentem assumamus, hoc est istius indolis, ut non solùm quovis momento se in statum æquilibrii subitò recipiat, sed ibi etiam omnem motum insitum deponendo permaneat, quamdiu iste situs viribus

sol-

ſollicitantibus conveniat. Hâc itaque factâ hypotheſi, perſpicuum eſt aquam quovis temporis momento in eo ipſo ſtatu fore conſtitutam, qui ſecundùm præcepta capitis præcedentis poſitioni cùm Solis tùm Lunæ reſpondeat.

§. 47. Ut igitur in hâc hypotheſi, quâ Mare vis inertiæ expers ponimus, pro quovis loco ad quodvis tempus ſtatum Maris quàm commodiſſimè definiamus, primùm ſolam Lunam conſiderabimus, cùm in eâ præcipua æſtûs Maris cauſa contineatur, atque tam Fluxus quam Refluxus Maris à tranſitu Lunæ per meridianum computari ſoleat: quòd ſi enim Lunæ effectus innotuerit, non ſolùm Solis effectus quoque mutatis mutandis colligetur, ſed etiam effectus, qui ab ambobus luminaribus ſimul agentibus proficiſcitur. Propoſitus igitur ſit Terræ locus quicunque, cujus in cœlo Zenith ſit Z, horizon HQO & P polus borealis, ita ut arcus PO ſit hujus loci elevatio poli, & circulus $PZHNO$ meridianus. Sit porrò MLK parallelus æquatori, in quo Luna jam motu diurno circumferatur, atque hoc momento reperiatur Luna in L; eritque tempus, quo Luna vel ex L ad meridianum M appellet, vel viciſſim à meridiano ad L pertigit, ut angulus MPL, ſive hoc tempus ſe habebit ad tempus unius revolutionis Lunæ, quod eſt 24. horarum 48′, uti ſe habet angulus MPL ad quatuor rectos. Sit igitur anguli MPL coſinus $= t$, ſinus elevationis poli PO ſeu ſinus arcûs $PZ = p$, coſinus $= P$, ac ſinus declinationis Lunæ borealis $= Q$, qui idem eſt ſinus diſtantiæ Lunæ à polo PL, hujus verò ipſius arcûs ſinus ſit $= q$, cui ſimul coſinus declinationis Lunæ æquatur, atque ob ſinum totum conſtanter poſitum $= 1$, erit $Q^2 + q^2 = 1$. Cùm jam in triangulo ſphærico ZPL dentur arcus PZ & PL cum angulo ZPL, reperietur per Trigonometriam ſphæricam arcûs ZL coſinus $= tpq + PQ$, qui ſimul eſt ſinus altitudinis Lunæ ſupra horizontem, quem antè poſuimus $= v$. Ex quibus erit $v = tpq + PQ$, & $3vv - 1 = 3(tpq + PQ)^2 - 1$, atque $5vv - 3 = 5$



 $(tpq$

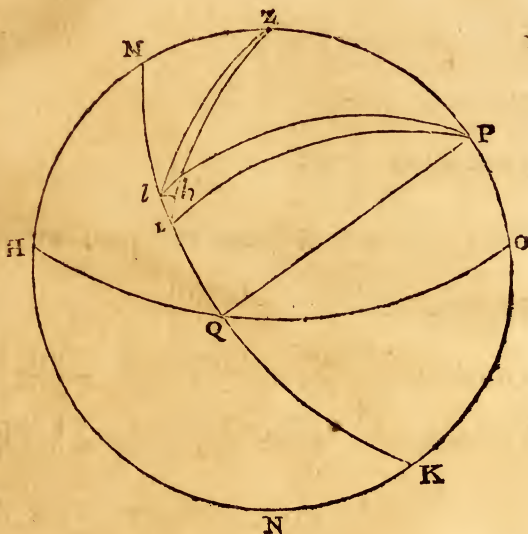
$(tpq+PQ)^2-3$; qui valores in formulis præcedentis capitis ſubſtituti præbebunt ſtatum Maris, hoc eſt vel elevationem vel depreſſionem, pro loco propoſito ad tempus aſſignatum.

§. 48. Quòd ſi ergo Lunæ vis abſoluta ponatur $= L$, ejuſque à Terra diſtantia $= b$, erit intervallum, quo aqua ſupra ſtatum naturalem elevabitur, $= \frac{L(3(tpq+PQ)^2-1)}{2b^3} + \frac{L(tpq+PQ)(5(tpq+PQ)^2-3)}{2b^4}$, quæ expreſſio ſi ſit negativa, indicat aquam infra ſtatum naturalem eſſe depreſſam. Ponamus Lunam horizonte ſeu versùs auſtrum per meridianum tranſire, quo caſu erit $t=1$; hoc igitur tempore aqua ſupra ſtatum naturalem erit elevata intervallo $= \frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3} + \frac{L(pq+PQ)(5(pq+PQ)^2-3)}{2b^4}$. Contrà verò dum Luna ſub horizonte vel versùs boream ad meridianum appellit, fiet elevatio aquæ ſupra ſtatum naturalem per intervallum $= \frac{L(3P^2Q^2-1)}{2b^3} + \frac{LPQ(5P^2Q^2-3)}{2b^4}$; quæ expreſſio ſemper eſt negativa; ideoque indicat aquam infra ſtatum naturalem conſiſtere. Namque cùm P ubique ſit minor unitate niſi ſub ipſis polis, ac declinatio Lunæ nunquam ad 30° aſſurgere poſſit, ex quo $Q < \frac{1}{2}$ & $QQ < \frac{1}{4}$, erit $3P^2Q^2$ perpetuò unitate minor; ideoque illa expreſſio negativa.

§. 49. De ratione autem elevationis aquæ in genere judicare licebit ex formulâ $\frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ſeu cùm poſterior terminus vix ſit ſenſibilis, ex ſolo priore $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}$. Ex hâc autem expreſſione intelligitur aquæ elevationem à ſolâ elongatione Lunæ ab horizonte pendere, ſive Luna ſit ſuper ſive ſub horizonte, retinet enim $3vv-1$ eundem valorem ſive v ſit affirmativum ſive negativum. Deinde quia fit $3vv-1=0$ ſi Luna ab horizonte diſtet arcu 35° 16′, tum aqua in ipſo ſtatu naturali erit conſtituta, neque elevata neque depreſſa. Elevabitur ergo aqua, cùm Luna ultra 35° 16′ vel ſupra vel infra horizontem verſetur, è contrario autem deprimetur quando Lunæ ab horizonte diſtantia minor eſt quàm 35°. 16′. Omnino autem aqua maximè erit depreſſa dum Luna ipſum horizontem occupat, hocque tempore infra ſitum naturalem ſubſidet intervallo $\frac{L}{2b^3} = 1, 111$ pedum (§. 41.); atque de hoc ſitu elevabitur recedente Lunâ ab horizonte ſive ſuper ſive ſub Terra. Hinc iis in regionibus, in quibus Luna oritur & occidit, tempore 24. hor. 48′ Mare bis maximè erit depreſſa, biſque elevata; ſtatus ſcilicet depreſſionis incidet in appulſus Lunæ ad horizontem, ſtatus autem elevationis in appulſus Lunæ ad meridianum. At quibus in regionibus Luna nec oritur nec occidit, quoniam ibi Luna altero appulſu ad meridianum maximè, altero minimè ab horizonte diſtat, ſpatio 24 h. 48′ aqua ſemel

ſemel tantum elevabitur, ſemelque deprimetur: ſub ipſis autem polis æſtus Maris omnino erit nullus, diurnus ſcilicet; nam variatio declinationis ſola ſtatum Maris turbabit.

§. 50. Cùm igitur ſub polis Terræ nullus ſit Fluxus ac Refluxus Maris, ſed aqua tantum aliquantulum aſcendat deſcendatque, prout Luna vel magis ab æquatore recedit vel ad eum accedit; videamus etiam quomodo æſtus Maris in aliis Terræ regionibus ſecundùm noſtram hypotheſin debeat eſſe comparatus. Conſiderabimus autem præcipuè tres regiones, quarum prima poſita ſit ſub ipſo æquatore, ſecunda habeat elevationem poli 30 graduum, tertia verò 60 graduum. Quia igitur in his omnibus regionibus Luna oritur atque occidit; maxima depreſſio aquæ ubique erit eadem, ſcilicet per intervallum $\frac{L}{2b^3}$ infra ſitum naturalem, eaque continget bis, quando nimirum Luna in ipſo horizonte verſatur. Ab hoc itaque ſtatu maximæ depreſſionis elevationes Maris indicabimus & computabimus, ſpatiis aſſignandis, per quæ aqua attolletur dum Luna vel ſupra horizontem in M vel infra in K ad meridianum appellit, itemque dum ab utroque meridiano æqualiter diſtat, qui locus ſit L exiſtente angulo MPL recto. Præterea tres quoque Lunæ ſitus in ſuâ orbitâ contemplabimur, quorum primus ſit, cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, ſecundus cùm Luna habet declinationem borealem 20 graduum, tertius verò cùm Luna declinationem habet auſtralem pariter 20 graduum. Denique in tabellâ ſequente adſcripſimus quantitatem anguli MPQ, ex quo tempus tam ortûs quàm occaſûs Lunæ, quo aqua maximè eſt depreſſa, atque elevatio exiſtit nulla, innoteſcit.



In locis sub Æquatore sitis, est elevatio Maris, dum Luna versatur in

	M	*L*	*K*	*ang. MPQ.*
☽ *Declinatio* 0°	$\frac{3L}{2b^3} + \frac{2L}{2b^4}$	0	$\frac{3L}{2b^3} - \frac{2L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{2,619L}{2b^3} + \frac{1,549L}{2b^4}$	0	$\frac{2,649L}{2b^3} - \frac{1,549L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. austr.* 20°	$\frac{2,649L}{2b^3} + \frac{1,549L}{2b^4}$	0	$\frac{2,649L}{2b^3} - \frac{1,549L}{2b^4}$	90°, 0′

Sub elevatione Poli 30°; erit Maris elevatio

	M	*L*	*K*	*ang. MPQ.*
☽ *Declinatio* 0°	$\frac{2,250L}{2b^3} + \frac{1,082L}{2b^4}$	0	$\frac{2,250L}{2b^3} - \frac{1,082L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{2,909L}{2b^3} + \frac{1,880L}{2b^4}$	$\frac{0,087L}{2b^3} - \frac{0,156L}{2b^4}$	$\frac{1,239L}{2b^3} - \frac{0,154L}{2b^4}$	102°, 8′
☽ *Decl. austr.* 20°	$\frac{1,239L}{2b^3} + \frac{0,154L}{2b^4}$	$\frac{0,087L}{2b^3} + \frac{0,156L}{2b^4}$	$\frac{2,909L}{2b^3} - \frac{1,880L}{2b^4}$	77°, 52′

Sub elevatione Poli 60°, erit Maris elevatio

	M	*L*	*K*	*ang. MPQ.*
☽ *Declinatio* 0°	$\frac{0,740L}{2b^3} - \frac{0,125L}{2b^4}$	0	$\frac{0,740L}{2b^3} + \frac{0,125L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{1,760L}{2b^3} + \frac{0,582L}{2b^4}$	$\frac{0,263L}{2b^3} - \frac{0,514L}{2b^4}$	$\frac{0,092L}{2b^3} + \frac{0,158L}{2b^4}$	129°, 5′
☽ *Decl. austr.* 20°	$\frac{0,092L}{2b^3} - \frac{0,158L}{2b^4}$	$\frac{0,263L}{2b^3} + \frac{0,514L}{2b^4}$	$\frac{1,760L}{2b^3} - \frac{0,582L}{2b^4}$	50°, 55′

§. 51. Si quis jam ex hâc tabulâ elevationem Maris supra statum maximæ depressionis in mensuris cognitis definire voluerit, is loco fractionum $\frac{L}{b^3}$ & $\frac{L}{b^4}$ earum valores in pedibus Parisinis ex §. 41. substituat, habitâ ratione distantiæ Lunæ à Terrâ, prout ibidem est expositum. Consequuntur autem ex hac tabulâ multa egregia consectaria, quæ verò nondum summo cum rigore ad experientiam examinari possunt, etiamsi jam insignis convenientia deprehendatur. Aquam enim adhuc omnis inertiæ expertem ponimus, perspicuum autem est, si aquæ inertia tribuatur, tum diversa omnino Phænomena oriri oportere. Quòd si igitur hi assignati effectus jam cum observationibus planè consentirent, id potiùs theoriam everteret quàm confirmaret, cùm aquam extra statum suum naturalem

turalem ſimus contemplati. Interim tamen ſatis tutò jàm ſtatus Maris ſub ipſis polis poterit definiri, qui etſi ad experientiam examinari non poteſt, tamen ipsâ ratione confirmabitur. Ac primò quidem ſub polis nulla erit Maris mutatio diurna, cùm Luna per totum diem eandem teneat ab horizonte diſtantiam, id quod ipſa quoque ratio dictat, quia ibi non datur meridianus, à cujus appulſu æſtus Maris alibi æſtimari ſolet. Dabitur tamen his locis mutatio menſtrua, atque aqua maximè erit humilis cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, quo quippe tempore perpetuò horizontem occupabit. Hinc porrò aqua ſenſim elevabitur prout Lunæ declinatio ſive versùs boream ſive versùs auſtrum augetur, donec tandem ſi declinatio fit maxima, per ſpatium 10 pollicum tantum elevetur; quæ mutatio cùm ſit perquàm lenta, ab inertia aquæ vix turbabitur.

§. 52. Ex his verò iiſdem formulis effectus à Sole oriundus non difficulter colligetur; tantum enim quantitates S & a, loco L & ſubſtitui oportet, quo facto effectus Solis circiter quater minor reperietur quàm is qui à Lunâ oritur. Seorſim autem cùm Solis tùm Lunæ effectibus definitis, per conjunctionem ſimplicem effectus, quem ambo luminaria conjunctim producunt, determinabitur. Ponamus itaque primùm Solem Lunamque in conjunctione verſari, id quod fit tempore novilunii; tum igitur neglectâ Lunæ latitudine, Sol & Luna in eodem eclipticæ loco verſabuntur, atque ſimul ad meridianum æquè ac ad horizontem appellent. Quocirca manentibus ſuperioribus denominationibus, erit quoque Solis declinationis ſinus $= Q$, coſinus $= q$, ac pro angulo MPL cujus coſinus eſt $= t$, erit ſinus altitudinis Solis pariter uti Lunæ $= tpq + PQ$. Ex quo dum ambo luminaria per meridianum versùs auſtrum tranſeunt, aquæ elevatio, quæ tum erit maxima, altitudinem naturalem ſuperabit intervallo $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)\left(3(pq+PQ)^2 - 1\right) + \frac{L(pq+PQ)}{2b^4}\left(5(pq+PQ)^2 - 3\right)$, neglecto altero termino à vi Solis oriundo, cùm ſenſus omnino effugiat. At dum ambo luminaria infra horizontem ad meridianum pertingunt, erit elevatio aquæ $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)\left(3(PQ - pq)^2 - 1\right) + \frac{L(PQ - pq)}{2b^4}$ $\left(5(PQ - pq)^2 - 3\right)$. Maxima denique aquæ depreſſio incidet, quando luminaria vel oriuntur vel occidunt, eaque minor erit quàm altitudo aquæ naturalis intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Cùm igitur $\frac{S}{2a^3}$ ſit circiter ſubquadruplum ipſius $\frac{L}{2b^3}$, in novilunio omnes effectus Lunæ ſuprà recenſiti, quartâ ſui parte augebuntur.

§. 53. In plenilunio omnia eodem ſe habere modo deprehenduntur, quo in novilunio, quia enim tum Sol & Luna in oppoſitione verſantur, erit declinatio Solis æqualis & contraria declinationi Lunæ, unde quidem pro Sole fit $-Q$, quod in novilunio erat $+Q$; at cùm Sol ſecun-

dùm ascensionem rectam à Lunâ distet 180°, erit hoc casu $-t$, quod antè erat $+t$, ex quo pro plenilunio habetur sinus altitudinis Solis $=-tpq-PQ$, qui pro novilunio erat $=tpq+PQ$, ex quo quadratum hujus sinûs utroque casu est idem, ideoque etiam eadem Phænomena in novilunio atque plenilunio. Deinde etiam hoc tempore aqua maximè deprimetur, cùm luminaria ambo in horizonte versantur, tumque aqua humilior erit quàm in statu naturali intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Ex hoc itaque situ donec Luna ad meridianum supra Terram appellit, aqua elevabitur per intervallum $= 3(PQ+pq)^2 \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, tantoque iterum subsidet usque ad Lunæ obitum; tum verò rursus elevabitur usque ad appulsum Lunæ ad meridianum infra horizontem, idque per spatium $3(PQ-pq)^2 \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, neglecto termino sequente quippe ferè insensibili. Cùm igitur sint $PQ+pq$ & $PQ-pq$ sinus distantiæ Lunæ ab horizonte dum in meridiano versatur, erunt spatia per quæ aqua tempore pleniluniorum ac noviluniorum supra statum maximè depressum elevatur, in ratione duplicatâ sinuum distantiarum Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit. Nisi ergo vel Luna in ipso æquatore existat, vel Terræ locus sub æquatore sit situs, Fluxus Maris diurni ac nocturni erunt inæquales; luminaribus autem in æquatore extantibus, utraque aquæ elevatio fiet per spatium $= 3pp\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$.

§. 54. Ut nunc in effectus, quos Sol & Luna in quadraturis siti conjunctim producunt, inquiramus; ponamus, ne calculus nimium fiat prolixus, Solem in ipso æquatore versari, quoniam tùm plerumque minimus æstus observatur. Hoc itaque casu Solis declinatio erit nulla, Lunæ verò maxima, quam neglectâ latitudine assumamus 23° 29′, cujus sinus sit $=Q$, cosinus $=q$, positâ hac declinatione boreali. Jam ponamus Lunam in meridiano in M versari, quo tempore Sol erit in horizonte; unde cùm aqua supra statum naturalem elevetur à Lunâ intervallo $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}$, à Sole verò deprimatur intervallo $\frac{S}{2a^3}$, ab utrâque vi conjunctim elevabitur per spatium $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$: at dum Luna sub horizonte ad meridianum appellit, aqua elevabitur per spatium $\frac{L(3(PQ-pq)^2-1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$. Sumatur inter has ambas elevationes inæquales more solito medium, eritque elevatio aquæ mediâ hac quadraturâ eveniens $= \frac{L(3p^2q^2+3P^2Q^2-1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$. Refluxus verò continget, cùm Luna horizontem attinget, quo tempore Sol in meridiano proximè versabitur, ex quo depressio totalis aquæ in Refluxu infra statum naturalem pro-

proximè erit $= \frac{L}{2b^3} - \frac{S(3pp-1)}{2a^3}$: quare à Fluxu usque ad subsequentem Refluxum aqua subsidet per intervallum $= \frac{3L(p^2q^2+P^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$.

§. 55. Quamvis motus Maris hoc modo assignatus ab inertiâ aquæ multum immutetur, tamen quia eandem ferè mutationem tam majoribus æstibus quàm minoribus infert, satis tutò assumere posse videmur spatia, per quæ aqua circa æquinoctia cùm tempore plenilunii sive novilunii, tùm etiam tempore quadraturarum actu ascendit, expressionibus inventis esse proportionalia. Quamobrem si in dato Terræ loco ex pluribus observationibus determinetur spatium medium, per quod Mare à Refluxu ad Fluxum ascendit, tempore æquinoctiorum, tam in pleniluniis noviluniisve quàm in quadraturis, eorum ratio ad eam quæ ex formulis consequitur, proximè accedere debebit. Atque hinc ex definitâ hac ratione per observationes ratio poterit inveniri inter vires Solis & Lunæ absolutas S & L, quæ est ipsa via quâ Newtonus est usus ad vim Lunæ absolutam definiendam, cùm vis Solis sit cognita: quod negotium, cùm à Newtono non satis accuratè sit pertractatum, nos id ex istis principiis expediemus. Exprimat igitur $m:n$ rationem intervallorum eorum, per quæ Oceanus in dato Terræ loco, cum in syzygiis luminarium quàm quadraturis tempore æquinoctiorum, ascendendo descendendoque oscillatur; eritque $m:n = 3pp\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right) : \frac{3L(p^2q^2+P^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$; ex quâ elicitur ista proportio $m\left(q^2+\frac{P^2Q^2}{p^2}\right) - n : m+n = \frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3}$; ex quâ cùm data sit vis à Sole orta $\frac{S}{a^3}$, deducitur vis à Lunâ oriundâ $\frac{L}{b^3}$ saltem proximè. Instituamus calculum pro observationibus in Portu Gratiæ (*Havre de Graces*) factis, ex quibus diligenter inter se collatis pro ratione $m:n$ prodit ista $17:11$. Cùm igitur hujus loci elevatio poli sit circiter $50°$, erit $P = \text{sin. } 50°$, & $Q = \text{sin. } 23°, 29'$; hincque $qq + \frac{P^2Q^2}{pp} = 1,0668$: ex quo prodibit $\frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3} = 7,1356:28$; ita ut vis Lunæ $\frac{L}{b^3}$ sit ferè quadrupla vis Solis $\frac{S}{a^3}$, ut jam Newtonus ex aliis observationibus conclusit: atque hanc ob rem ipsius determinationem vis Lunæ absolutæ L retinuimus.

§. 56. Si hæc, quæ de combinatione virium Lunam Solemque respicientibus sunt allata, attentiùs considerentur, mox patebit maximos æstus menstruos in novilunia ac plenilunia incidere debere; his enim temporibus tam elevatio aquæ quàm depressio à Luna oriunda à vi Solis maximè adjuvatur, cùm eodem tempore, quo Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, simul quoque Solis vis aquam maximè vel elevet vel deprimat. In quadraturis autem hæ duæ vires ferè perpetuò dissentiunt,

ſentiunt, ac dum Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, eodem tempore Sol contrarium exerit effectum, aquamque maximè vel deprimit vel elevat, ex quo minimum diſcrimen inter quemque Fluxum ac ſubſequentem Refluxum obſervabitur, æſtuſque erunt minimi. Quamobrem circa alias Lunæ phaſes æſtus Maris medium teneat inter maximum minimumque neceſſe eſt, quia tum vires Solis ac Lunæ nec omninò conſpirant, nec ſibi invicem adverſantur. Per totum autem annum quibus novilunis pleniluniiſque maximus eveniat æſtus, quibuſque quadraturis minimus æſtus reſpondeat, abſolutè ſine reſpectu ad ſitum loci habito definiri nequit. Sub æquatore quidem ubi Luna, cùm eſt in æquatore, maximâ vi gaudet, dubium eſt nullum, quin æſtus maximi in æquinoctia incidat, quando ambo luminaria in æquatore ſunt poſita, quæ eadem proprietas etiam in loca ab æquatore non multum diſſita competit: at in locis ab æquatore magis remotis æſtus Maris, cùm Luna maximam habet declinationem, dantur quidem majores ex Tabula §. 50, verùm æſtus mox ſubſequentes multo ſunt minores. Quòd ſi autem inter binos æſtus à Lunâ oriundos conſequentes medium capiatur, patebit in regionibus 30°. ab æquatore remotis, quibus æſtus eſt $\frac{2,250}{2b^3}L$ ſi Lunæ declinatio ſit nulla, æſtum Maris medium, cùm Luna habet declinationem 20 graduum, fore $=\frac{2,074}{2b^3}L$, ideoque adhuc minorem quàm cùm Luna æquatorem tenet. Contrà verò ſub elevatione poli 60 graduum, eſt æſtus Maris, Lunâ verſante in æquatore, $=\frac{0,740}{2b^3}L$, æſtus autem medius, cùm Lunæ declinatio eſt 20°, eſt $=\frac{0,916}{2b^3}L$, ideoque major. Ex quo conſequitur in regionibus polis vicinioribus æſtus maximos, non in æquinoctia, ſed potius circa ſolſtitia, incidere debere, quâ quidem in re theoria noſtra per experientiam mirificè confirmatur.

CAPUT QUINTUM.

De tempore Fluxûs ac Refluxûs Maris in eâdem hypotheſi.

§. 57. Quanquam in præcedenti capite, quo in quantitatem æſtûs Maris præcipuè inquiſivimus, etiam tempora, quibus tam Fluxus quàm Refluxus eveniat, jam indicavimus; tamen hoc capite iſtud argumentum fuſiùs atque ad obſervationes accommodatè perſequemur. Obſervationes enim, quæ circa æſtum Maris inſtitui ſolent, ad tria genera commodiſſimè referuntur; ad quorum

rum primum pertinet Maris cùm elevatio maxima tùm maxima depressio, atque indicatur quantum quovis æstu aqua cùm ascendat tùm descendat. Ad secundum observationum genus numerari convenit eas, quæ ad tempus respiciunt, quibusque definitur, quonam temporis momento ubivis terrarum aqua cùm summam teneat altitudinem tùm minimam. Tertium denique genus observationum ad ipsum motum Maris reciprocum spectat, iisque determinatur quantâ celeritate quovis temporis momento alterna Maris elevatio ac depressio absolvatur, sive momentanea mutatio, dum Mare à Fluxu ad Refluxum transit & vicissim, investigatur. Quibus tribus rebus cùm observationes convenientissimè instituantur, iisdem theoria atque explicatio phænomenorum commodissimè tractabitur. Ac primæ quidem & tertiæ parti pro nostrâ hypothesi in præcedentibus capitibus abundè satisfactum videtur.

§. 58. Quoniam autem à Maris inertiâ aliisque circumstantiis Maris motum turbantibus omnes cogitationes adhuc abstrahimus, manifestum est ubique terrarum, si sola Lunæ vis Mare agitaret, aquam maximè elevari debere cùm Luna ab horizonte longissimè fuerit remota, hoc est iis ipsis momentis quibus Luna per meridianum dati loci tam supra quàm infra Terram transit: sunt enim elevationes aquæ in duplicatâ ratione sinuum distantiarum Lunæ ab horizonte, ex quo simul successiva Maris commotio cognoscitur. Excipiuntur autem hinc, ut jam notavimus, loca polis Terræ proxima, quibus Luna vel non oritur vel non occidit; ibi enim altero Lunæ ad meridianum appulsu aqua debet esse summa, altero ima. Verùm de his locis non admodum erimus solliciti; cùm tam observationes sufficientes, quibus theoria probetur, deficiant, quàm ipse Maris motus indicatus rationi sit consentaneus, neque confirmatione indigeat. In Terræ locis ergo à polis satis remotis seu extra circulos polares sitis, quibus Luna intervallo 24 h. 48′ tam oritur quàm obit, elevabitur Mare eodem temporis intervallo bis, totiesque deprimetur; atque utraque maxima Maris altitudo continget, cùm Luna ad meridianum illius loci pervenit, minima verò cùm Luna horizontem attingit. Hinc igitur temporis intervallum inter binos aquæ Fluxus seu summas elevationes interjectum constanter erit 12 h. 24′, ab anomaliis Lunæ mentem abstrahendo; at tempus summæ depressionis, cùm respondeat appulsui Lunæ ad horizontem, inter binas elevationes æqualiter non interjacebit, sed alteri elevationi eò erit propiùs, quò major fuerit cùm loci propositi elevatio poli tum Lunæ declinatio, hoc est quò majus fuerit discrimen inter ortum obitumve Lunæ & circulum horarium sextum.

§. 59. Sed conjungamus cum Lunâ vim Solis, ut nostræ conclusiones magis ad observationes perducantur. Ac primò quidem manifestum est tempore tam novilunii quàm plenilunii aquam maximè fore elevatam, quando Luna per meridianum loci transit, quippe quo momento etiam

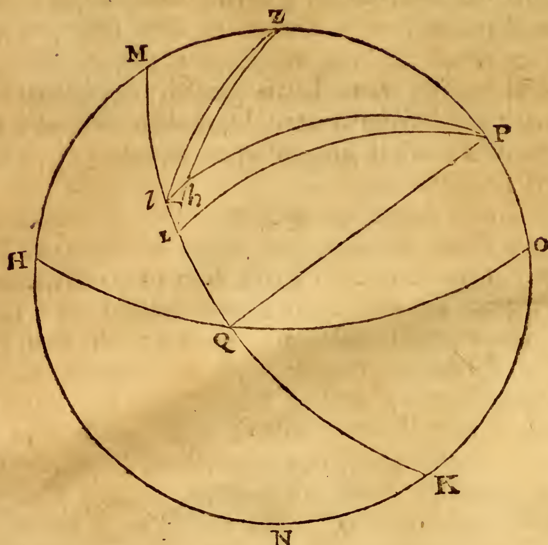
Sol ad eundem meridianum appellit, si quidem syzygia ipso meridie vel mediâ nocte celebratur. Quamobrem si novilunium pleniluniumve in ipsum meridiem incidat; ipso quoque meridiei momento maxima habebitur aquæ elevatio; pariterque si id eveniat mediâ nocte, eodem ipso momento aqua maximam obtinebit elevationem. Verùm si conjunctio vel oppositio luminarium meridiem vel præcedat vel sequatur, tum Fluxus non in ipsum meridiem incidet, sed vel tardiùs vel citiùs veniet; quia Luna his casibus tanquam primaria æstûs causa vel post vel ante meridiem ad meridianum pertingit. Atque hinc eo die, in quem sive plenilunium sive novilunium incidit, facilè poterit definiri acceleratio vel retardatio Fluxûs respectu meridiei. Ponamus enim novilunium seu plenilunium celebrari n horis ante meridiem, unde cùm motus Lunæ medius à Sole diurnus sit 12°. circiter, ipso meridie Luna à meridiano jam distabit angulo horario $\frac{n}{2}$ grad. versùs ortum, ex quo Luna post meridiem demum per meridianum transibit, elapsis $\frac{n}{30}$ horis seu $2n$ minutis primis. Sin autem novilunium pleniluniumve accidat n horis post meridiem, tum Maris maxima elevatio $2n$ minutis ante meridiem eveniet. Hæc autem momenta accuratissimè cognoscentur, si ad singulos dies transitus Lunæ per meridianum computentur; ac præterea tam ortus quàm occasus notetur, quippe quibus momentis maxima aquæ depressio respondet; majorem autem hujusmodi tabula afferet utilitatem, si insuper quovis die distantia Lunæ à Terrâ inducetur, quippe à quâ Lunæ effectus præcipuè pendet.

§. 60. Congruunt hæc jam apprimè cum observationibus, quibus constat, diebus novilunii vel plenilunii æstum Maris accelerari si novilunium pleniluniumve post meridiem accidat, contrà verò retardari. Quamvis enim ob aquæ inertiam maxima Maris elevatio non respondeat appulsui Lunæ ad meridianum, sed tardiùs eveniat, uti post docebitur, tamen similibus casibus æqualiter retardabitur; pro termino igitur fixo, si ad observationes respiciatur, non sumi debet momentum meridiei, sed id momentum, quo si Lunæ cum Sole conjunctio vel oppositio in ipsum meridiem incidit, summa aquæ elevatio observatur. Hoc igitur momento notato, uti ab iis qui hujusmodi observationes instituunt fieri solet, si plenilunium noviluniumve vel ante vel post meridiem incidat, summa Maris elevatio vel tardiùs vel citiùs continget: & quidem syzygia vera n horis vel ante meridiem eveniat vel post, tum Fluxus $2n$ minutis vel tardiùs vel citiùs observari debebit. Atque hæc est ea ipsa regula quam Celeb. Cassini in Mem. Academiæ Regiæ pro An. 1710, ex quamplurimis observationibus inter se comparatis derivavit; jubet scilicet numerum horarum, quibus conjunctio sive oppositio luminarium verum meridiem

diem vel præcedit vel sequitur, duplicari, totidemque minuta prima ad tempus medium notatum, quo Fluxus evenire solet, vel addi vel ab eo subtrahi, quo verum Fluxus momentum obtineatur. Quoniam autem hæc correctio nititur motu Lunæ medio, perspicuum est eam correctione ulteriori opus habere à vero Lunæ motu petitâ, quæ verò plerumque erit insensibilis, cùm summa aquæ elevatio non subitò adsit, sed per tempus satis notabile duret.

§. 61. Nisi autem luminaria proxima sint vel conjunctioni vel oppositioni, maxima Maris elevatio non in ipsum Lunæ transitum per meridianum incidet. Quoniam enim Luna dum prope meridianum versatur, per aliquod tempus eandem altitudinem conservat, tantisper etiam Mare eandem elevationem retinebit; & hanc ob rem si Sol interea sensibiliter vel ab horizonte recedat, vel ad eundem accedat, vis Solis ad Mare elevandum vel crescet sensibiliter, vel decrescet; ex quo dum Luna prope meridianum existit, fieri potest, ut tamen mare etiamnum elevetur, vel adeò jam deprimatur à Sole. Ex his igitur perspicuum est summam Maris altitudinem tardiùs seu post transitum Lunæ per meridianum accidere debere, si eo tempore Sol ab horizonte accedat, id quod evenit diebus novilunium & plenilunium præcedentibus. Contrà autem si Luna post Solem per meridianum transeat, idque vel ante Solis ortum vel ante occasum; tum, quia Mare in transitu Lunæ per meridianum à vi Solis deprimitur, maximam habuit altitudinem ante appulsum Lunæ ad meridianum, id quod contingit diebus novilunium pleniluniumve sequentibus. Quando autem Sol ipsum horizontem occupat, dum Luna in meridiano versatur, tum etiamsi distantia Solis ab horizonte perquam sit mutabilis, tamen cùm elevationis vis quadrato sinûs altitudinis Solis sit proportionalis, quod omnino evanescit, etiam hoc casu maxima aquæ elevatio in ipsum Lunæ per meridianum transitum incidet, hicque casus circa quadraturas luminarium locum habet.

§. 62. Ut



§. 62. Ut igitur innotescat, quamtum vires cùm Solis tùm Lunæ ad Mare elevandum dato tempore vel crescant vel decrescant, dum ab horizonte aliquantillum vel recedunt, vel ad eundem accedunt, ponamus Solem Lunamve in L versari, atque inde ad punctum meridiani M progredi. Tempusculo ergo per angulum $LPl = d\theta$ repræsentato progredietur Luna vel Sol ex L in l atque ab horizonte removebitur intervallo Lh: ad quod inveniendum sit ut antè anguli MPL cosinus $= t$, & sinus $= T$, eritque ipse angulus $LPl = d\theta = \frac{\sqrt{(1-tt)}}{+dt} = \frac{dt}{T}$, ex quo orietur anguli MPl cosinus $= t + dt = t + T \cdot d\theta$. Si jam ponatur sinus elevationis poli $= P$, sinus declinationis borealis puncti $L = Q$, nam si declinatio sit australis, sinus Q sumi debet negativè, cosinus verò respondentes sint p & q, reperietur sinus altitudinis L supra horizontem $= v = tpq + PQ$: punctique l sinus altitudinis $v + dv = tpq + PQ + Tpqd\theta$. Quocirca si Luna ponatur in L, cùm ejus vis ad Mare attollendum sit $= \frac{L(3vv-1)}{2b^3}$, erit hujus vis incrementum tempusculo $d\theta$ ortum $= \frac{3Lvdv}{b^3} = \frac{3L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{b^3}$. At si Sol ponatur in L, ejus vis ad Mare elevandum tempusculo $d\theta$ capiet incrementum $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$. Quamvis autem pro Sole & Lunâ eidem angulo $d\theta$ non æqualia tempora respondeant, tamen quia ea proximè ad rationem æqualitatis accedunt,

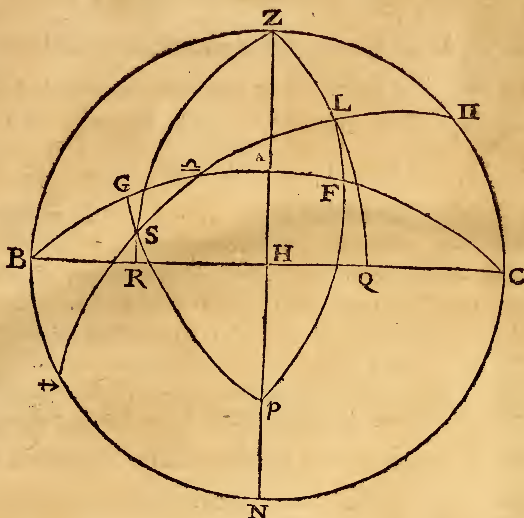
duht, sunt enim ut 24 ad $24\frac{3}{4}$ seu ut 32 ad 33, sine sensibili errore pro æqualibus haberi poterunt. Interim tamen si res accuratè definiri debeat, & vis Solis incrementum angulo $d\theta$ acquisitum sit $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, erit vis Lunæ incrementum eodem tempusculo acceptum $= \frac{32L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{11b^3}$. Ex his intelligitur hæc incrementa tribus casibus evanescere, quorum primus evenit sub polis, quia ibi est $p=0$; secundus, si punctum L in meridiano sit situm, tum enim fit $T=0$; tertius denique locum habet, si punctum L in horizonte existat, ubi est $tpq+PQ=0$.

§. 63. Ponamus nunc Solem in L versari ac Lunam per meridianum jam transiisse, hocque momento maximè aquam esse elevatam; jam enim ostendimus dum Sol ab horizonte recedit, aquam summam incidere post transitum Lunæ per meridianum. Hoc ergo momento necesse est, ut decrementum vis Lunæ, quod tempusculo $d\theta$ patitur, æquale sit incremento vis Solis eodem tempore accepto. Sit igitur anguli horarii ad polum sumti quo Luna jam à meridiano recessit, cosinus $=n$, sinus $=N$, atque sit Lunæ declinationis borealis sinus $=R$, cosinus $=r$, ex quibus orietur decrementum vis Lunæ tempusculo $d\theta$ ortum $= \frac{3L(npr+PR)Nprd\theta}{b^2}$, quod cùm æquale esse debeat incremento vis Solis eodem tempusculo nato $= \frac{3S(tpp+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, denotante Q sinum declinationis borealis Solis, & q ejus cosinum, habebitur hæc æquatio $\frac{L(npr+PR)Nr}{b^3} = \frac{S(tpq+PQ)Tq}{a^3}$, neglectâ fractione $\frac{32}{33}$, per quam incrementum vis Lunæ multiplicari deberet. Quoniam autem Luna à meridiano non procul distabit, poni poterit $n=1$, atque cùm sit proximè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, obtinebitur iste valor $N = \frac{Tq(tpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$; qui in tempus conversus dabit temporis spatium, quo aqua post transitum Lunæ per meridianum maximam altitudinem attingit. Sub æquatore ergo erit $N = \frac{Ttqq}{4rr}$, ob $P=0$ & $p=1$; quare si declinationes Luminarium vel negligantur vel æquales assumantur, ita ut sit $qq=rr$, fiet $N = \frac{Tt}{4}$, cujus expressionis valor extat maximus si angulus MPL sit 45°, quo casu erit $N=\frac{1}{8}$, & angulus respondens $= 7°,11'$, qui indicat aquam summam 30 minutis post transitum Lunæ per meridianum contingere debere: totidemque minutis aqua ante transitum Lunæ per meridianum maximè erit elevata, si Sol tum versùs occasum versetur angulo $MPL=$ semirecto. Quamobrem si Luna ad meridianum appellat horâ nonâ sive matutinâ sive pomeridianâ, Fluxus demum post semihoram eveniet; at si horâ tertiâ appellat Luna ad meridianum, aqua summa 30' antè obser-

 vabitur

vabitur: in aliis verò Terræ regionibus iſta aberratio magis eſt irregularis; interim tamen ſatis prope ex formulâ datâ per ſolam æſtimationem poteſt definiri.

§. 64. Quòd ſi autem hanc rem curatiùs inveſtigare velimus, amborum Luminarium declinationes non pro arbitrio fingere licet, pendent enim à ſe mutuò maximè ob angulum horarium *MPL* inter ea interjectum datum: ut igitur pro datâ Lunæ phaſi aberrationem maximæ aquæ elevationis à tranſitu Lunæ per meridianum determinemus, repræſentet nobis circulus *Z B N C* verticalem primarium, *B C* horizontem, *Z N* meridianum per dati loci Zenith *Z* & Nadir *N* ductum, atque Æquator ſit *B A C*, polus auſtralis *p*, & ecliptica ♊ ♎ ♐. Conſtitutus nunc ſit Sol in *S* & Luna in *L*, quæ modò per meridianum tranſierit, quo tempore ponimus aquam maximè eſſe elevatam. Ponamus porrò longitudinis Solis ab æquinoctio verno computatæ ſinum eſſe $= F$, coſinum $= f$; Lunæ verò longitudinis ſinum eſſe $= G$, coſinum $= g$; ſitque inclinationis eclipticæ *B* ♎ ♐ ſinus $= M$, coſinus $= m$. Ex his definientur declinationes cùm Solis tùm Lunæ, quarum ſinus antè erant poſiti Q & R; erit ſcilicet $Q = FM$, $R = GM$; hincque $q = \sqrt{(1 - F^2 M^2)}$ & $r = \sqrt{(1 - G^2 M^2)}$. Deinde angulus *SpL* æqualis eſt angulo cujus tangens eſt $\frac{mF}{f}$ demto angulo cujus tangens eſt $\frac{mG}{g}$; hujus verò ejuſdem anguli ob angulos *SpZ* & *LpZ* datos, quorum ſinus ſunt poſiti T & N, tangens quoque eſt $\frac{nT + Nt}{nt - NT}$, quæ tangens propter ſinum N valde parvum proximè eſt $= \frac{T}{t} + \frac{N}{tt}$. Ponatur autem K pro ſinu anguli qui exceſſus eſt anguli habentis tangentem $= \frac{mF}{f}$ ſuper angulum cujus tangens eſt $\frac{mG}{g}$, & k pro coſinu, reperietur $T = K - Nk$ & $t = k + NK$ ſcripto 1 pro n: quibus valoribus ſubſtitutis prodibit $N =$



Kq

$\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)pq^2+kPQq}$ ex æquatione $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$, paragr. præced.

§. 65. Ponamus nunc Lunam in quadraturis verſari ac primò quidem in primo post novilunium quadrante, ita ut arcus LS futurus ſit 90°., erit $G=f$, & $g=-F$, unde $Q=MF$ & $R=Mf$, ex quibus prodibit $K=$ ſin. (Atang. $\frac{mF}{f}$ – Atang. $\frac{-mf}{F}$) atque k ejuſdem anguli coſinui æquabitur. Quare his tempeſtatibus aqua maximè elevata poſt tranſitum Lunæ per Meridianum, intervallo temporis quod in arcum æquatoris converſum dabit angulum cujus ſinus erit $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)pq^2+kPQq}$. Pro poſteriore verò quadraturâ poſt novilunium, erit $G=-f$ & $g=F$, unde erit $Q=MF$ & $R=-Mf$, ex quibus fit ut antè $K=$ ſin. (Atang. $\frac{mF}{f}$ – Atang. $\frac{-mf}{F}$) & $k=$ coſinui reſpondenti. Ne autem hìc ſigna + & – calculum confundant, notari convenit K eſſe ſinum arcûs, qui reſtat, ſi aſcenſio recta Lunæ ſubtrahatur ab aſcenſione rectâ Solis; atque k eſſe ejuſdem arcûs coſinum. Ponamus exempli causâ Solem in initio Arietis verſari, erit longitudo Solis $=0°$, ſeu 360°, & longitudo Lunæ $=$ vel 90° vel 270°, unde fiet $F=0$, $f=1$, $G=\mp 1$, & $g=0$, atque $Q=0$. Præterea aſcenſio recta Solis eſt 360°, & aſcenſio recta Lunæ vel 90° vel 270°; utroque caſu ergo fit $k=0$, unde etiam prodit $N=0$; quod idem evenit, ſi Sol verſetur in initio Libræ. In utroque igitur æquinoctio, dum Luna in quadraturis verſatur, aqua maximè erit elevata eo ipſo momento, quo Luna ad meridianum appellit.

§. 66. Sit porrò Sol in ſolſtitio æſtivo, Luna verò in ultimo quadrante, erit longitudo Solis 90°, Lunæ verò $=0°$, unde fit $F=1$, $f=0$; $G=0$, $g=1$, indeque $Q=M$ & $R=0$; itemque $q=m$ & $r=1$. Solis verò aſcenſio recta habebitur 90°, Lunæ verò $=0°$, ex quo $K=1$ & $k=0$. Hinc ergo fit $N=\frac{mMP}{(4-m^2)p}$. Pro primâ autem quadraturâ eſt longitudo Lunæ 180°, unde $G=0$, $g=-1$, at ut antè $F=1$, $f=0$; ergo $Q=M$, $R=0$, itemque $q=m$ & $r=1$. Cùm igitur Lunæ aſcenſio recta ſit 180°, erit $K=$ ſin. $-90°=-1$, & $k=0$, ex quibus fit $N=\frac{-mMP}{(4-m^2)p}$. Quoniam autem eſt $4>m^2$, dum Sol in ſolſtitio æſtivo verſatur maxima aquæ elevatio in ultimâ quadraturâ continget poſt Lunæ tranſitum per meridianum ſupra Terram, priore verò quadraturâ ante hunc tranſitum, hæcque æquatio eò erit major, quò major fuerit elevatio poli; ſub æquatore enim omnino evaneſcit. Sit poli elevatio 45°, fietque his regionibus $N=\pm\frac{Mm}{4-m^2}$; quare cùm ſit M ſinus 23°,29′, prodibit $N=$

ſinui anguli 6°, 33′, qui in tempus converſus dat 26′. In primâ igitur quadraturâ totidem minutis ante tranſitum Lunæ per meridianum aqua maximè erit elevata, in ultimâ verò quadraturâ tot minutis poſt tranſitum. Contrarium evenit ſi vel Luna ſub Terra ad meridianum appellat, vel Sol in ſolſtitio hyemali verſetur. Ex his igitur formulis, ſi tabulæ adhibeantur, non erit difficile pro quovis loco Terræ ad quodvis tempus definire, quantum maxima aquæ elevatio tranſitum Lunæ per meridianum vel præcedere vel ſequi debeat; cujuſmodi ſupputationes maximam etiam afferent utilitatem, quando etiam inertiæ aquæ ratio habebitur.

§. 67. Quoniam igitur ſatis eſt expoſitum, quo momento Mare maximè ſit elevatum, maximam quoque Maris depreſſionem definire aggrediamur. Ac primò quidem manifeſtum eſt, ſi ſola Luna Mare agitaret, tum minimam aquæ altitudinem obſervatum iri, eo ipſo momento, quo Luna in horizonte verſetur: atque hinc perſpicuum eſt, idem uſu venire debere, ſi Sol eodem momento quoque in horizonte exiſtat, id quod accidit cùm noviluniis tùm pleniluniis. Præterea verò etiam ima aqua reſpondebit ſitui Lunæ in horizonte, ſi eo tempore Sol meridianum occupet, quia tum vis Solis per notabile temporis intervallum neque augetur nec diminuitur, etiamſi tum aqua non tantum deprimatur, quàm circa novilunia ac plenilunia. Ponamus igitur, quò reliquos caſus evolvamus, dum Luna horizontem occupat, Solem ab horizonte removeri; hoc ergo caſu aqua jam elevabitur, ex quo neceſſe eſt imam aquam ante adventum Lunæ ad horizontem extitiſſe, contrà verò ſi dum Luna in horizonte verſatur, Sol ad horizontem appropinquet, aqua tardiùs ſcilicet poſt appulſum Lunæ ad horizontem continget. Ponamus itaque Lunam ante ortum ſub horizonte Hh in ☽ adhuc verſari, Solemque in ☉ eſſe poſitum, unde ad meridianum PZH progrediatur, hocque ipſo momento aquam maximè eſſe depreſſam. Neceſſe igitur eſt, ut decrementum momentaneum vis Lunæ ad Mare movendum æquale ſit incremento momentaneo vis Solis. Ad hanc æqualitatem declarandam ſit anguli ☽PO ad polum ſumti, diſtantiam Lunæ à ſuo ortu O indicantis, ſinus $= V$ & coſinus $= v$, qui ob angulum ☽PO valde parvum tutò ſinui toti 1 æqualis concipi poteſt. Invento ergo angulo hoc ☽PO ſeu arcu æquatoris illi reſpondente, eoque in tempus converſo, conſtabit quanto temporis intervallo ima aqua appulſum Lunæ ad horizontem præcedat: idem verò calculus tam ad Lunæ occaſum quàm ad acceſſionem Solis ad horizontem facilè accommodabitur.

§. 68. Poſitis nunc $A\gamma a$ æquatore ac ♒♈♌ ecliptica, ſit elevationis poli Ph ſinus $= P$, coſinus $= p$; ſinus declinationis Lunæ borea-

lis ☽ $L = R$, coſinus $= r$; ex quibus fiet anguli APO coſinus $= \frac{-PR}{pr}$, quia Lunæ, cùm in horizontem O pervenit, altitudo evaneſcit. Cùm igitur anguli APO ſinus ſit $= \frac{\sqrt{(p^2r^2 - P^2R^2)}}{pr} = \frac{\sqrt{(1-P^2-R^2)}}{pr} = \frac{\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, erit anguli AP☽ ſinus $= \frac{v\sqrt{(pp-RR)} - VPR}{pr}$, & coſinus $= \frac{-vPR - V\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, unde emergit decrementum momentaneum vis Lunæ $= \frac{3LV\sqrt{(pp-RR)}(\sqrt{(pp-RR)} - VPR)d\theta}{b^3} = \frac{3LV(pp-RR)d\theta}{b^3}$, ob $v = 1$ & V valde exiguum. Sit porrò Solis declinationis borealis ⊙ S ſinus $= Q$ & coſinus $= q$, atque anguli AP⊙ ſinus $= T$, coſinus $= t$, erit vis Solis incrementum momentaneum $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpq\,d\theta}{a^3}$, quod illi vis Lunæ decremento æquale eſt ponendum, ſiquidem Maris altitudo hoc tempore eſt minima. Quare cùm ſit ferè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, iſta habebitur æquatio $4V(pp - RR) = Tpq(tpq + PQ)$, quæ præbet $V = \frac{Tpq(tpq + PQ)}{4(pp - RR)}$: cùm igitur hoc pacto innoteſcat angulus OP☽, is in tempus converſus dabit temporis ſpatium, quo ſumma Maris depreſſio ante ortum Lunæ contingit. At ſi punctum O deſignet Lunæ occaſum, idem angulus præbebit tempus poſt Lunæ occaſum, quo Mare maximè deprimetur. Intelligitur ex for-

formulâ inventâ quibus casibus ima aqua in ipsum appulsum Lunæ ad horizontem incidat; hoc scilicet primò evenit, si $T = 0$, hoc est si Sol in meridiano versetur, deinde si $tpq + PQ = 0$, id est si Sol quoque horizontem occupet; quos binos casus jam notavimus.

§. 69. Sit locus noster Terræ sub æquatore situs, seu elevatio poli nulla, erit $P = 0$, & $p = 1$, unde efficitur $V = \frac{Ttqq}{4(1-RR)} = \frac{Ttqq}{4rr}$; in quâ formulâ cùm q & r denotent cosinus declinationum Solis ac Lunæ, non multum inter se discrepabunt; ponamus enim alteram declinationem esse maximam, alteram verò minimam seu $= 0$, erit tamen cosinuum ratio minor quàm $1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$, ex quo fractio $\frac{qq}{rr}$ semper intra hos limites $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$ continebitur. Quòd si ergo hanc ab æqualitate aberrationem negligamus, id quod tutò facere possumus, quia rem tantùm prope definire conamur, habebitur $V = \frac{Tt}{4} = \frac{2Tt}{8}$. Denotat autem $2Tt$ sinum dupli anguli horarii quo Sol à meridiano distat, & hanc ob rem ad momentum maximæ depressionis aquæ assignandum, videndum est quâ diei horâ Luna ad horizontem appellat, hujusque temporis vel à meridie vel mediâ nocte intervallum capiatur, atque in arcum æquatoris convertatur. Hujus deinde arcûs vel anguli sumatur duplum, hujusque dupli sinus, cujus pars octava præbebit sinum anguli, qui in tempus conversus dabit temporis intervallum, quo ima aqua Lunæ appulsum ad horizontem vel præcedit vel sequitur; id quod ex notatis circumstantiis discernere licet. Sic si Luna horâ 9 matutinâ adoriatur, erit tempus usque ad meridiem 3 horarum, angulusque respondens 45°, cujus dupli sinus est ipse sinus totus, cujus pars octava sit sinus anguli $7^{\circ}, 11'$, cui tempus respondet ferè 30 minutorum, tantum itaque ima aqua ortum Lunæ præcedet.

§. 70. Ut hæc ad datum Lunæ cum Sole aspectum accommodari queant, ponamus longitudinis Solis ♈☉ sinum esse $= F$, cosinum $= f$ longitudinis verò Lunæ ♈☽ sinum esse $= G$, cosinum $= g$; atque inclinationis eclipticæ ♌ ♈ *a*, sinum $= M$, cosinum $= m$. His positis erit $Q = MF$, & $R = MG$; atque ascensionis rectæ Solis ♈ S tangens reperietur $= \frac{mF}{f}$, Lunæ verò ascensionis rectæ ♈ L tangens $= \frac{mG}{g}$. Subtrahatur ascensio recta Solis ab ascensione rectâ Lunæ, & differentiæ sinus sit $= K$, cosinus $= k$. Cùm igitur anguli ☉ P ☽ sit sinus $= K$ & cosinus $= k$, aguli verò AP☽ sinus $= \frac{\sqrt{(pp-RR)} - VPR}{pr}$ ob $v = 1$, & cosinus $= \frac{-PR - V\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, erit anguli AP☉ sinus $= T = \frac{(k+KV)\sqrt{(pp-RR)} - kPRV + KPR}{pr}$ & cosinus $t = \frac{(K-kV)\sqrt{(pp-RR)} - KPRV - kPR}{pr}$; quibus

bus valoribus ſubſtitutis, ſimulque ſinu V tanquam valde parvo conſiderato; reperietur ſinus $V = \frac{(KPR + k\sqrt{(pp - RR)})\ q\ (Kq\sqrt{(pp - RR)} - kPRq + PQr)}{4rr\ (pp - RR)}$. Sub æquatore autem, quo fit $P = 0$; $V = \frac{Kkqq}{4rr}$: ex quo pro æquatore regula ſuperior à diſtantiâ Solis à meridiano petita ſimul ad differentiam aſcenſionalem Solis & Lunæ poteſt accommodari, ita ut maneat invariata. Sed ad præſens inſtitutum, quo tantum veritatem cauſæ Fluxûs ac Refluxûs Maris exhibitæ declarare annitimur, non opus eſt hæc pluribus perſequi, quippe quæ potiſſimum ad accuratiſſimas æſtûs marini tabulas ſupputandas pertinent, quæ res in propoſitâ quæſtione Illuſtriſſimæ Academiæ non contineri videtur.

CAPUT SEXTUM.

De vero æſtu Maris, quatenus à Terris non turbatur.

§. 71. QUÆ hactenus ex viribus Solis ac Lunæ circa æſtum Maris fuſiùs deduximus, eâ hypotheſi nituntur aſſumtâ, quâ aquam inertiæ expertem poſuimus: quamobrem non eſt mirandum ſi plerique effectus aſſignati cum Phænomenis minùs congruant, atque adeo

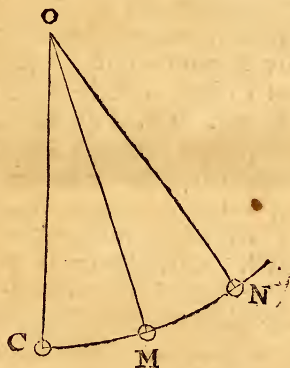
adeo pugnare videantur; quòd si enim inter se prorsus convenirent, theoria non solùm non eo consensu confirmaretur, sed potiùs omnino subverteretur, cùm quilibet facilè agnoscat ob aquæ inertiam determinationibus exhibitis ingentem mutationem inferri debere. Quæ autem ex deductis conclusionibus maximè ab experientiâ dissentiunt, potissimum quantitatem elevationis aquæ ac temporis momentum, quo tam summa Maris elevatio quàm ima depressio contingere solet, respiciunt. Nusquam enim ubi quidem Mare est liberum atque apertum, tam exiguum discrimen inter Fluxum ac Refluxum in aquæ altitudine observatur, quale in præcedentibus definivimus, quatuor scilicet pedum tantum; quæ elevatio insuper tamen maxima est deprehensa, ac tum solùm oriunda, quando tam regio prope æquatorem est sita, quàm vires luminarium inter se maximè conspirant. Experientiâ namque constat, plerisque in locis, si æstus contingat maximus, aquam non solùm ad altitudinem duplo majorem, sed etiam quadruplam, imò nonnullis in locis adeo decuplam attolli; quanquam hæc enormis elevatio non soli inertiæ aquæ, sed maximam partem vicino continenti ac littorum situi est tribuenda, uti in sequenti capite clarissimè monstrabitur. Deinde etiam quod ad tempus attinet, nusquam illis ipsis momentis, quæ assignavimus, Fluxus ac Refluxus unquam contingunt, nec etiam tempestatibus hìc definitis Fluxus maximi vel minimi, sed ubique tardiùs evenire constanter observantur; cujus quidem retardationis causa in ipsâ aquæ inertiâ posita esse primâ etiam fronte perspicitur.

§. 72. Quantumvis autem agitatio Maris in præcedentibus capitibus determinata ab observationibus dissentiat, tamen complures circumstantiæ sese jam præbuerunt experientiæ tantopere consentaneæ, ut ampliùs dubitare omnino nequeamus, quin in viribus Solem Lunamque respicientibus, quas non temerè assumsimus, sed aliunde existere demonstravimus, vera & genuina æstûs Maris causa contineatur. Hanc ob rem jam meritò suspicari licet, dissensiones quæ inter theoriam nostram, quatenus eam assumtæ hypothesi superstruximus, & experientiam intercedunt, ab aquæ inertiâ aliisque circumstantiis, quarum nullam adhuc rationem habuimus, proficisci. Quocirca si omnia inertiæ ratione habitâ ad observationes propiùs accedant, id quidem nostræ theoriæ maximum afferet firmamentum, atque simul omnes alias causas, quæ præter has vel sunt prolatæ vel proferri possunt, excludet, irritasque reddet. Cùm igitur consensum hujus theoriæ cum Phænomenis, mox simus evidentissimè ostensuri, quæstioni ab Inclytâ Academiâ propositæ ex asse satisfecisse jure nobis videbimur: cùm non solum nullas vires imaginarias effinxerimus, sed etiam virium Lunam Solemque respicientium existentiam aliunde dilucidè evicerimus. Neque verò in hoc negotio cum plerisque Anglorum ad qualitates occultas sumus delapsi, verùm potius causam ista-

rum

rum virium modo rationali & legibus motûs consentaneo in vorticibus constituimus, quorum formam atque indolem luculenter explicare possemus; idque fecissemus, nisi ab aliis cùm jam satis esset expositum, tùm etiam ab Illustrissimâ Academiâ in præsente quæstione non requiri videatur.

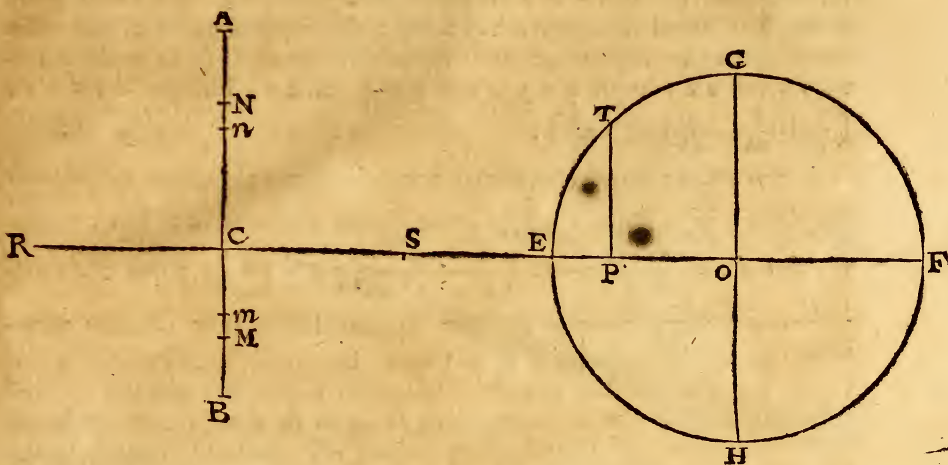
§. 73. Dum igitur hactenus aquæ omnem inertiam cogitatione ademimus, ipsi ejusmodi qualitatem affinximus, quâ viribus sollicitantibus subitò obsequeretur, seque in instanti in eum statum reciperet, in quo cum viribus in æquilibrio consisteret; hocque pacto aquam non solùm subitò omnis motûs capacem posuimus, sed etiam ita comparatam, ut quovis momento omnem pristinum motum amittat. Longè aliter autem res se habet, si inertiæ ratio in computum ducatur; hæc enim efficit ut primò aqua non subitò se ad eum situm componat, quem vires intendunt, sed pedetentim per omnes gradus medios ad eum accedat; deinde verò eadem inertia in causa est, quòd aqua, cùm in statum æquilibrii pervenerit, ibi non acquiescat, sed ob motum insitum ultrà progrediatur, quoad omnem motum à potentiis renitentibus amittat. Ex quo perspicuum est, admissâ inertiâ aquæ, à potentiis sollicitantibus motum omninò diversum actu imprimi debere ab eo, quem reciperet, si inertiâ privata esset; cujus discriminis ratio exemplo corporis penduli commodè ob oculos poni potest. Ponamus enim corpus pendulum OC ob gravitatem situm tenens verticalem, à vi quâpiam in latus secundùm directionem CM sollicitari. Si nunc hoc pendulum inertiâ careret, seu ejusmodi esset indolis, cujus aquam hactenus sumus contemplati, tum subitò situm OM acciperet, in quo hæc vis cum gravitate æquilibrium teneret. At cùm pendulum inertiâ præditum consideratur, post aliquod demum tempus elapsum ad situm OM perveniet: ac deinde quia motu accelerato eò pertingit, ibi non quiescet, sed ultrà excurret, putà in N usque, ita ut spatium CN ferè sit duplo majus spatio CM, prouti calculus clarè indicat. Propter inertiam igitur pendulum primùm tardiùs vi sollicitanti obtemperat; atque à situ æquilibrii recedit; deinde verò etiam magis recedit, majoremque excursionem conficit, quàm si inertiâ careret; quæ sunt eæ ipsæ duæ res, in quibus theoria antè exposita ab experientiâ maximè dissentire deprehensa est.



§. 74. Si nunc istud penduli exemplum ad nostrum casum æstûs Maris transferamus, primò ingens similitudo in situ penduli verticali ac sta-

tu Maris naturali, quem obtinet remotis potentiis externis, observatur. Nam quemadmodum pendulum, si in quamcunque plagam de situ verticali declinetur, propriâ vi gravitatis se in eundem recipit, ita etiam aqua, si ex situ suo æquilibrii depellatur, vi gravitatis se ad eundem componit, ac præterea pariter ac pendulum oscillationes peragit, cujusmodi oscillationum casus in aqua observati passim inveniuntur expositi. Deinde etiam simili modo, quo pendulum, Mare quò magis ex situ suo naturali fuerit deturbatum, eò majorem habebit vim sese in situm æquilibrii restituendi. Quòd si igitur Mare à viribus externis, Solis scilicet ac Lunæ, mox elevetur mox deprimatur, necesse est ut inde motus oscillatorius seu reciprocus oriatur æstui Maris omnino similis, qui autem per leges motûs difficulter definiri queat accuratè quidem; nam vero proximè, hoc non adeo erit difficile. Duæ autem sunt res, quæ absolutam ac perfectam totius motûs determinationem summoperè reddunt difficilem, quarum altera physicam spectat, atque in ipsâ fluidorum naturâ consistit, quorum motus difficulter ad calculum revocatur, præcipuè si quæstio sit de amplissimo Oceano, qui aliis in locis elevetur, aliis verò deprimatur. Altera autem difficultas in ipsâ analysi est posita, eò quòd iste motus Maris reciprocus prorsus sit diversus ab omnibus oscillationibus à Mathematicis adhuc consideratis: vires enim Lunæ ac Solis Mare sollicitantes neque à situ corporis oscillantis, neque ab ejus celeritate pendent, uti id usu venit in omnibus oscillationum casibus etiam nunc expositis, sed eæ vires à situ luminarium respectu Terræ, ideoque à tempore determinantur, cujusmodi oscillationes nemo adhuc, quantum quidem constat, calculo subjecit.

§. 75. Quod quidem ad priorem difficultatem physicam attinet, res hoc quidem tempore ferè desperata videtur; quamquam enim ab aliquo tempore theoria motûs aquarum ingentia sit assecuta incrementa, tamen ea potissimum motum aquarum in vasis & tubis fluentium respiciunt, neque vix ullum commodum inde ad motum Oceani definiendum derivari potest. Quamobrem in hoc negotio aliud quicquam præstare non licet, nisi ut hypothesibus effingendis, quæ à veritate quàm minimè abludant, tota quæstio ad considerationes purè geometricas & analyticas revocetur: alteram autem difficultatem mathematicam, etiamsi difficillimis integrationibus sit involuta, tamen feliciter superare confidimus. Considero scilicet superficiem aquæ *RS*, quæ hoc in situ æquilibrium teneat cum reliqua aqua, remotis viribus externis; his verò accedentibus alternis vicibus attollatur in *A*, deprimaturque in *B*. Quòd si igitur aqua in *M* usque sit depressa, atque externæ vires Solis ac Lunæ subitò cessarent, tum vi gravitatis propriæ conaretur sese elevare usque in situm *RS* naturalem, isteque conatus eò erit major, quò majus fuerit spatium *CM* quo à situ naturali distat. A veritate itaque non multum recede-



mus, si hanc vim ipsi spatio MC ponamus proportionalem: quamobrem posito spatio $MC = s$, erit vis, quæ aquæ superficiem in M usque depressam attollet $= \frac{s}{g}$, quæ hypothesis ad veritatem eò propiùs accedit, quòd sponte indicat, si aquæ superficies supra C jam sit elevata, tum vim fieri negativam, adeoque aquam deprimere. Præterea verò eadem hypothesis confirmatur pluribus phænomenis aquæ nisum respicientibus, ita ut de ejus veritate ampliùs nullum dubium supersit.

§. 76. Ponamus jam aquam in M constitutam urgeri à solâ Lunâ, atque ut calculus per se molestus minus habeat difficultatis, sit locus C sub ipso æquatore situs, Lunæque declinatio nulla, ex quo Luna in circulo maximo per loci zenith transeunte æquatore scilicet circumferetur: sit $EGFH$ iste circulus, cujus radius ponatur $= 1$, atque EF repræsentet horizontem, & G zenith. Positis his, sit Luna in T dum Maris superficies versatur in M, ita ut $PT = y$ exprimat sinum altitudinis Lunæ super horizonte; unde vis Lunæ Mare attollens erit $= \frac{L(3yy-1)}{2b^3} = \frac{3yy-1}{h}$, posito brevitatis gratiâ h pro $\frac{2b^3}{L}$. Hanc ob rem ergo superficies Maris in M duplici vi attolletur, scilicet vi $= \frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}$. Quòd si ergo ponamus aquam in M jam habere motum sursum directum, cujus celeritas tanta sit quanta acquiritur lapsu gravis ex altitudine v, atque spatium $Mm = -ds$ tempusculo infinitè parvo absolvatur, habebitur per principia motûs $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$. Ponamus porrò tempus ab ortu lunæ in E

 jam

jam elapsum, quod arcui $E T$ est proportionale, esse $= z$, quæ littera ipsum arcum $E T$ simul denotet, erit $y = \text{sin.}\ z$ scilicet sinui arcûs z, hoc enim modo sinus ac cosinus arcuum sumus indicaturi: unde orietur $1 - 2yy = \text{cos.}\ 2z$, atque $3yy - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ \text{cos.}\ 2z$, hincque $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\ \text{cos.}\ 2z\right)$.

§. 77. Cùm igitur elementum temporis sit $= dz$, erit ex naturâ motûs $dz = -\frac{ds}{\sqrt{v}}$, atque $v = \frac{ds^2}{dz^2}$; unde sumto elemento dz pro constante, fiet $dv = \frac{2dsdds}{dz^2} = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\ \text{cos.}\ 2z\right)$, atque $2dds + \frac{sdz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\ \text{cos.}\ 2z)}{2h} = 0$, quæ æquatio duas tantum continet variabiles s & z, & propterea si debito modo integretur, indicabit situm seu statum aquæ ad quodvis tempus. Quoniam autem hæc æquatio est differentialis secundi gradûs, atque insuper arcus & sinus arcuum continet, facilè intelligitur ejus integrationem minus esse obviam; interim tamen cùm alterius variabilis s plus unâ dimensione nusquam adsit, ea per methodos mihi familiares tractari poterit. Soleo autem, quoties ejusmodi occurrunt, initio eos terminos in quibus altera variabilis s omnino non inest, rejicere; unde hæc consideranda venit æquatio $2dds + \frac{sdz^2}{g} = 0$, quæ per ds multiplicata fit integrabilis, existente integrali $ds^2 + \frac{ssdz^2}{2g} = cdz^2$ ob dz constans. Hinc porrò elicitur $dz = \frac{ds\sqrt{2g}}{\sqrt{(2cg - ss)}}$, atque $\frac{z}{\sqrt{2g}} =$ arcui cujus sinus est $\frac{1}{\sqrt{2cg}}$, ex quo obtinetur $s = \sqrt{2cg}.\ \text{sin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}$. Cognito autem hoc valore, idonea nascitur substitutio facienda pro æquatione propositâ $2dds + \frac{sdz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\ \text{cos.}\ 2z)}{2h} = 0$; fiat enim $s = u\ \text{sin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}$, erit $ds = du\ \text{sin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{udz}{\sqrt{2g}}\ \text{cos.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}$, atque $dds = ddu\ \text{sin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{2dudz}{\sqrt{2g}}\ \text{cos.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{udz^2}{2g}\ \text{sin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}}$. Quibus valoribus substitutis emerget ista æquatio $2ddu\ \text{sin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4dudz}{\sqrt{2g}}\ \text{cos.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz^2(1 - 3\ \text{cos.}\ 2z)}{2h} = 0$, in quâ hoc commodè accidit, ut ipsa variabilis u non insit, sed tantùm ejus differentialia.

§. 78. Quòd si ergo ponatur $du = pdz$, erit $ddu = dpdz$, & æquatio nostra transibit in sequentem differentialem primi gradûs tantum, $2dp\ \text{sin.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4pdz}{\sqrt{2g}}\ \text{cos.}\ \frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz(1 - 3\ \text{cos.}\ 2z)}{2h} = 0$: quæ integrabilis reddi invenitur, si multiplicetur per quantitatem quampiam ex z & constantibus compositam, eò quòd p plures unâ dimensiones habet nusquam. Ad inte-

integrationem autem absolvendam notandum est hujus æquationis $dp + pZdz = \Sigma dz$, in quâ Z & Σ functiones quascunque ipsius z denotent, integrale esse $e^{\int Zdz} p = \int e^{\int Zdz} \Sigma dz$. Reductâ autem nostrâ æquatione ad hanc formam, habetur $dp + \frac{2pdz \cos. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}. \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{dz(3\cos. 2z - 1)}{4h \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}}$, ideoque $Zdz = \frac{2dz \cos. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}. \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{2\, diff. \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}}$; atque hinc $\int Z dz = 2 \log. \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}$; & $e^{\int Zdz} = \left(\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2$. Ex his sequitur integrale nostræ æquationis $p\left(\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2 = \frac{1}{4h}\int dz \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}} (3 \cos. 2z - 1) = \frac{3}{4h}\int dz \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}} \cos. 2z - \frac{1}{4h}\int dz \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}$, ad quas integrationes perficiendas notetur esse $\int dz \sin. \alpha z = C - \frac{1}{\alpha} \cos. \alpha z$, atque $\int dz \sin. \alpha z. \cos. \beta z = C - \frac{\beta \sin. \alpha z. \sin. \beta z - \alpha \cos. \alpha z. \cos. \beta z}{\alpha^2 - \beta^2}$: ex his itaque conficietur $p\left(\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2 = C + \frac{\sqrt{2g}}{4h} \cos. \frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{\left(2 \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}. \sin. 2z + \frac{1}{\sqrt{2g}} \cos. \frac{z}{\sqrt{2g}}. \cos. 2z\right).3}{\left(\frac{1}{2g} - 4\right)4h}$ atque $p = \frac{C}{\left(\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2} + \frac{\sqrt{2g}. \cos. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left[\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} - \frac{\left(4g \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}} \sin. 2z + \sqrt{2g}. \cos. \frac{z}{\sqrt{2g}} \cos. 2z\right).3}{4h(1-8g)\left[\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}$.

§. 59. Cùm autem posuissemus $du = pdz$, erit $u = \int pdz = \int \frac{Cdz}{\left[\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} + \int \frac{dz\sqrt{2g}. \cos. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left[\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}$ $- \frac{3}{4h}\int dz \frac{\left[4g \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}} \sin. 2z + \sqrt{2g}. \cos. \frac{z}{\sqrt{2g}} \cos. 2z\right]}{(1-8g)\left[\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}$. Hæ autem formulæ omnes sunt absolutè integrabiles, prodibitque $u = D - \frac{C \cos. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}} - \frac{g}{2h \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}} + \frac{3g \cos. 2z}{2h(1-8g) \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}}}$; ex quo tandem resultat $s = u \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}} = D \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}} + C \cos. \frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{g}{2h} + \frac{3g \cos 2z}{2h(1-8g)}$, quæ est æquatio generalis ad quodvis tempus z statum aquæ, seu distantiam ejus

ejus supremæ superficiei à C indicans, ubi constantes C & D ex dato Maris statu ad datum tempus definiri oportet. Quòd si igitur ponamus motum aquæ jam ad uniformitatem esse deductum, ita ut aqua omnibus diebus, quando Luna in T versatur in eodem loco M versetur, necesse erit ut valor ipsius s maneat idem, etsi arcus z integrâ peripheriâ 2π vel ejus multiplo augeatur. At posito $z + 2\pi$ loco z, terminus cos. $2z$ manet quidem invariatus, at D sin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + C$ cos. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$ fit $= D$ sin. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}} + C$ cos. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}}$, quæ æqualitas adesse non potest nisi vel $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ sit numerus integer, vel C & $D = 0$. Cùm itaque g determinari non liceat, quia jam est datum, ponendum erit $C = 0$ & $D = 0$, ita ut ista habeatur æquatio $s = \frac{-g}{2h} + \frac{3g \cos. 2z}{2h(1-8g)}$, ex quâ facillimè ad quodvis tempus status Maris cognoscetur: valores scilicet affirmativi ipsius s dabunt situm aquæ infra situm naturalem C, negativi verò supra C.

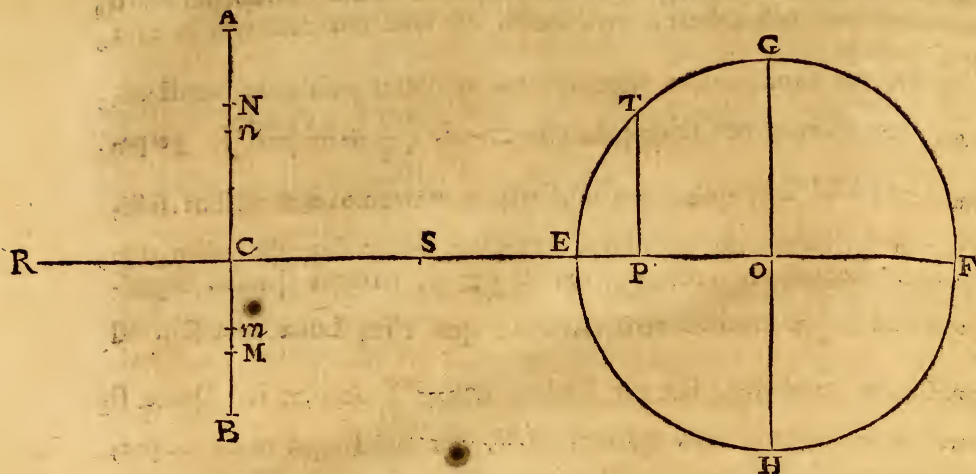
§. 80. Cognito autem spatio s per tempus z, celeritas quoque Maris quâ in M ascendit reperietur ex æquatione $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ erit enim $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{3g \sin. 2z}{h(1-8g)}$, quæ expressio ipsi celeritati, quâ aquæ superficies, dum in M versatur, elevatur, est proportionalis: hæc ergo celeritas aquæ semper est ut sinus dupli arcûs ET, vel etiam ut sinus dupli temporis, quo Luna à transitu per meridianum abest, tempore scilicet in arcum æquatoris converso. Hinc igitur celeritas aquæ erit nulla si Luna fuerit vel in E vel in G vel in F vel in H, hoc est, vel in horizonte vel in meridiano: quare cùm his temporibus aqua vel maximè sit elevata vel maximè depressa, unâ Lunæ revolutione aqua bis elevabitur, bisque deprimetur, ideoque bini Fluxus binique Refluxus contingent. Aqua quidem maximè erit depressa iis ipsis momentis, quibus Luna ad horizontem appellit, tum enim fit cos. $2z = 1$; atque spatium CB erit $= s = \frac{g(1+4g)}{2(1-8g)}$; at maxima elevatio incidet in ipsos Lunæ transitus per meridianum, quibus est cos $2z = -1$: ac tum altitudo CA erit $= -s = \frac{g(2-4g)}{h(1-8h)}$. Quanquam autem hæc momenta cum experientiâ non satis conveniunt, tamen ea hypothesi assumtæ planè congruunt, quâ posuimus Lunam solam agere, ac perpetuò in ipso æquatore versari, ex quo æstus se tandem ad summam regularitatem componat necesse est. Quòd si enim Lunæ declinatio ponatur variabilis, atque Sol insuper agat, æstus jam formati perpetuò turbabuntur, ex quo ob æquabilitatem continuò sublatam effectus tardiores necessariò consequi debebunt. Præterea quoque nullam adhuc motûs Maris hori-

zontalis

zontalis habuimus rationem, cùm enim aqua ad æstum formandum motu horizontali progredi debeat, perspicuum est hinc retardationem in æstu oriri oportere.

§. 81. Si aqua, uti in præcedentibus capitibus posuimus, inertiâ careret, tum foret ex æquatione primâ $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$ perpetuò $s = \frac{g(1-3yy)}{h}$, quia aqua tum quovis momento cum viribus sollicitantibus in æquilibrio consisteret. Maxima igitur depressio etiam tum Lunæ horizontali responderet, cùm est $y = 0$, foretque spatium depressionis $CM = \frac{g}{h}$; maxima verò elevatio, quæ circa Lunæ appulsum ad meridianum continget, fiet per spatium $CN = \frac{2g}{h}$ ob $y = 1$. Quare si aqua inertiâ careret, foret spatium MN, per quod aqua motu reciproco agitaretur, $= \frac{3g}{h}$; inertiâ autem admissâ agitationes perficientur in spatio majore $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}$; cujus excessus super spatium MN erit $= \frac{24gg}{h(1-8g)}$. Quantitas itaque æstûs pendet à valore litteræ g; qui quidem semper est affirmativus; nam si foret $g = 0$, quod evenit si gravitatis vis esset infinitè magna respectu virium Lunæ & Solis, tum etiam nullus æstus oriretur; deinde quò magis $8g$ ad 1 accedit, eò major prodibit æstus, qui adeo in infinitum excrescere posset si foret $8g = 1$; hoc quippe casu vis Lunæ gravitatem superaret, omnesque aquas ad Lunam attraheret; quod autem fieri non potest, multo minus autem esse potest $8g > 1$, quod tamen si eveniret, maxima elevatio appulsui Lunæ ad horizontem, maximaque depressio Lunæ meridianum occupanti responderet.

§. 82. Cùm igitur aqua, si inertiâ careret, agitetur per spatium $MN = \frac{3g}{h}$, suprà autem §. 41. eâdem hâc hypothesi, quâ tam locus quàm Luna in æquatore ponitur, aquam elevari supra libellam per spatium $2,260$ pedum, infra eam verò deprimi spatio $1,112$ pedum, erit $\frac{3g}{h} = 3,372$ pedum, ideoque $\frac{g}{h} = 1,124$ pedum $= 1\frac{1}{8}$ pedum. Quoniam verò valor ipsius g cum unitate comparatur, ideo venit, quod tempus per ipsum arcum circuli cujus radius est $= 1$ expressimus: hinc itaque valor ipsius g respectu unitatis definietur tempore eodem modo expresso, quo aqua in M usque depressa solâ vi gravitatis se in C restitueret, quod tem-



tempus ex circumstantiis facilè poterit æstimari: prodibit autem per calculum tempus hujus restitutionis $= \frac{\pi}{2} \sqrt{2g}$, denotante π semiperipheriam circuli radium $= 1$ habentis, seu tempus duodecim horarum Lunarium. Quòd si igitur restitutio ponatur actu fieri tempore $\frac{12}{n}$ horarum, erit $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi\sqrt{2g}}{2}$ & $g = \frac{2}{nn}$, ex quo perspicuum est, quò citiùs aqua se propriâ suâ vi restituere valeat, eò minùs excessurum esse spatium AB spatium MN. Cùm autem de hâc restitutione non satis tutò judicare queamus, præstabit ex observationibus rationem spatii AB ad MN proximè assumere. Si enim ponamus esse $AB = 2\,MN$, erit $\frac{3}{1-8g} = 6$, erit $g = \frac{2}{16}$; sin autem sit $AB = 3\,MN$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 9$ & $g = \frac{2}{12}$: at posito $AB = 4\,MN$, erit $g = \frac{2}{32}$. Quoniam igitur aqua ob inertiam ferè duplo majus spatium absolvere poni potest, assumamus $g = \frac{2}{36}$ seu $n = 6$, ita ut aqua propriâ vi gravitatis tempore circiter 2 horarum in statum naturalem se restituere valeat. Posito autem $g = \frac{1}{18}$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 5,4$; spatiumque $AB = 6$ ped. proximè. Ne autem tractatio nimis fiat specialis, retineamus litteram n, cujus valorem esse circiter 6 vel 5 notasse sufficiet, qui valor satis propè ad æstimationem accedit: ita ut sit $g = \frac{2}{nn}$ & $AB = \frac{3nn}{nn-16} \cdot \frac{9}{8}$ pedum: unde satis patet n necessariò esse debere > 4, eritque adeo vel 5 vel 6.

§. 83.

§. 83. Tentemus nunc idem hoc problema in ſenſu latiori, ac ponamus regionis C elevationis poli ſinum eſſe $= P$, coſinum $= p$; Lunæ verò declinationis borealis ſinum eſſe $= Q$, coſinum $= q$; Lunamque ſuper Terra jam per meridianum tranſiiſſe, ab eoque diſtare angulo horario $= z$, ita ut z ut antè tam tempus quàm arcum circuli radii $= 1$ deſignet; quòd ſi nunc arcûs z coſinus ponatur $= t$, erit ſinus altitudinis Lunæ ſuper horizonte $= tpq + PQ$; ideoque vis Lunæ Mare elevans $= \frac{L}{2b^3}$ $(3(tpq+PQ)-1) = \frac{3p^2q^2tt + 6pqPQt + 3P^2Q^2 - 1}{h}$, poſito ut antè $\frac{L}{2b^3} = \frac{1}{h}$. Quoniam verò eſt $t =$ coſ. z erit $2tt - 1 =$ coſ. $2z$ & $tt = \frac{1 + cof.\, 2z}{2}$, ex quo vis Lunæ ad Mare elevandum habebitur $= \frac{3p^2q^2 cof.\, 2z}{2h} + \frac{6pqPQ cof.\, z}{h} + \frac{3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2}{2h}$. Ponamus nunc ſuperficiem aquæ in M verſari, exiſtente $CM = s$, & celeritatem ejus quâ actu aſcendit debitam eſſe altitudini v, erit $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \text{vi Lunæ}\right)$, cùm verò ſit $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ ſeu $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} =$ ipſi celeritati aſcensûs erit $v = \frac{2dsdds}{dz}$, poſito dz conſtante: hinc igitur emerget iſta æquatio $2dds + dz^2$ $\left(\frac{s}{g} + \frac{3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2}{2h} + \frac{6pqPQ cof.\, 2z}{h} + \frac{3p^2q^2 cof.\, 2z}{2h}\right)$ relationem inter tempus z & ſtatum Maris s continens.

§. 84. Quòd ſi nunc hæc æquatio eodem modo tractetur, quo ſuperior, ea pariter bis integrari poſſe deprehendetur, integrationibus autem ſingulis debito modo abſolutis, & conſtantibus ita determinatis ut motus aquæ fiat uniformis, reperietur $s = \frac{-g(3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2)}{2h} - \frac{6gpqPQ cof.\, z}{h(1-2g)}$ $- \frac{3gp^2q^2 cof.\, 2z}{2h(1-8g)}$ ac celeritas aſcensûs $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{-6gpqPQ fin.\, z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2 fin.\, 2z}{h(1-8g)}$. Cùm autem ſit ſin. $2z = 2$ ſin. z coſ. z, celeritas duobus caſibus evaneſcit, quorum primus eſt ſi ſin. $z = 0$, alter ſi coſ. $z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)}$; illi caſus dabunt aquam ſummam, hi verò imam. Hinc igitur patet aquam ſummam contingere debere iis ipſis momentis, quibus Luna per meridianum tranſit, imam verò non tum, cùm Luna horizontem attingit; namque Luna horizontem attingit, ſi eſt coſ. $z = \frac{-PQ}{pq}$, aqua verò eſt ima ſi eſt coſ. $z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)} = \frac{-5PQ}{8pq}$ poſito $g = \frac{1}{18}$. Hìc autem idem eſt notandum quod ſuprà, ſcilicet nos poſuiſſe motum aquæ eſſe uniformem ſeu quotidie ſui ſimilem, Lunamque in ecliptica locum tenere fixum, ſeu ſaltem ſuam declinationem non variare. Quoniam verò ob varia-

riabilitatem declinationis Lunæ, itemque ob actionem Solis, iste motus perpetuò turbatur, atque insuper motûs Maris horizontalis nulla adhuc habita est ratio, facilè intelligitur, tàm Fluxus quàm Refluxus tardiùs venire debere, quàm quidem ex his formulis sequitur.

§. 85. Bini ergo unâ Lunæ revolutione contingent Fluxus, alter si Luna super horizonte ad meridianum appellit, alter si sub Terra; priori casu est cos. $z = 1$, & cos. $2z = 1$, hoc itaque tempore Mare supra libellam C elevabitur per spatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} + \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$. Dum autem Luna sub horizonte meridianum attingit, tum aqua elevabitur per spatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3p^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$, propter cos. $z = -1$ ac cos. $2z = 1$ hoc casu: harum igitur altitudinum differentia est $= \frac{12pqPQ}{h(1-2g)}$: atque Mare in transitu Lunæ per meridianum supra horizontem altiùs elevatur, si declinatio Lunæ sit borealis; contrà verò si declinatio fuerit australis, major Maris elevatio respondebit appulsui Lunæ ad meridianum infra horizontem. Lunâ verò in ipso æquatore versante, ambo Fluxus inter se erunt æquales. Ratione autem elevationis poli, horum binorum Fluxuum successivorum inæqualitas erit maxima sub elevatione poli 45°, pro his enim regionibus fit pP maximum; atque in aliis regionibus eò minor erit inæqualitas, quò magis fuerint à latitudine 45° remotæ. Mare autem maximè deprimetur, si fuerit cos. $z = \frac{-PQ(1-8)}{pq(1-2g)}$; quo valore substituto, reperietur aqua infra libellam C subsidere per spatium $= \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$; omnino igitur aqua in æstu movebitur per spatium $= \frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, quorum signorum ambiguorum superius + valet si Luna super horizonte, alterum verò − si Luna sub horizonte in Fluxu meridianum attingit.

§. 86. Si aqua inertiâ careret, tum superiore Lunæ transitu per meridianum elevaretur supra libellam C per spatium $= \frac{3(pq+PQ)^2-1}{h}g$, inferiori verò transitu per meridianum elevaretur ad altitudinem $\frac{3(pq-PQ)^2-1}{h}g$, quarum altitudinum discrimen est $= \frac{12gpqPQ}{h}$; ita ut discrimen admissâ inertiâ majus sit parte circiter octava, quàm idem discrimen si inertia tollatur. Maximè autem deprimetur aqua sublatâ inertiâ, si fuerit cos. $z = \frac{-PQ}{pq}$, tumque infra libellam erit constituta intervallo $= \frac{g}{h}$; ex quo

spatium;

ſpatium, per quod æſtus Maris fit ſublatâ inertiâ, prodit $= \frac{3p^2q^2 + 3P^2Q^2 \pm 6pqPQ}{h} g$; cùm igitur idem ſpatium conceſsâ inertiâ, ſit $\frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6grp.PQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, erit exceſſus hujus ſpatii ſuper illud $= \frac{24g^2p^2q^2}{h(1-8g)} - \frac{-12g^2P^2Q^2(1+g)}{h(1-2g)^2} \pm \frac{12g^2pqPQ}{h(1-2g)}$. Fieri ergo poteſt ut ſpatium, in quo æſtus Maris continetur, majus ſit ſublatâ inertiâ, quàm ſi ea aquæ tribuatur, id quod eveniet ſi $\frac{P^2Q^2(1+g)}{(1-2g)^2} > \frac{2p^2q^2}{1-8g}$ vel $\frac{PQ}{pq} > \frac{(1-2g)\sqrt{2}}{\sqrt{(1+g)(1-8g)}}$, hoc eſt $\frac{PQ}{pq} > \sqrt{\frac{256}{95}}$, poſito $g = \frac{1}{18}$; quod verò ſi evenit, Luna ne quidem horizontem in curſu diurno attingit, ac propterea aquam non deprimit. Ex quo ſequitur æſtum ubique ab inertiâ aquæ augeri: erit autem ad uſum magis accommodatè ſpatium AB, per quod Mare agitatur, ita expreſſum ut ſit $AB = \frac{3g}{h(1-8g)} \left(pq \pm \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, ubi ſignorum ambiguorum ſuperius tranſitum Lunæ per meridianum ſuper horizonte, inferius verò ſub horizonte reſpicit.

§. 87. Cùm ſit $\frac{3g}{h} = 3{,}372$ pedum, Lunâ mediocrem à Terrâ diſtantiam tenente, atque g ſit circiter $\frac{2}{25}$ vel $\frac{1}{18}$; erit poſito $g = \frac{2}{25}$ ſpatium $AB = \frac{25}{9}(pq \pm \frac{3}{7}PQ)^2$, 3,372 ped. at facto $g = \frac{1}{18}$ erit ſpatium $AB = \frac{9}{5}(pq \pm \frac{5}{8}PQ)^2$. 3,372 ped. Ex his colligitur æſtum fore maximum pro eadem elevatione poli, ſi fuerit tangens declinationis Lunæ $= \frac{3}{7}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{2}{25}$, vel $= \frac{5}{8}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{1}{18}$: horum autem caſuum prior veritati magis videtur conſentaneus, atque hanc ob rem valorem $g = \frac{2}{25}$ retineamus: hinc igitur ſequitur ſub æquatore æſtum fore maximum ſi Luna nullam habeat declinationem, atque ſimul pro quaque regione declinatio Lunæ poterit aſſignari, cui maximus æſtus reſpondeat: uti ex adjecto laterculo apparet:

Elevatio Poli.	Declinatio ☽		Elevatio Poli.	Declinatio ☽		Elevatio Poli.	Declinatio ☽
0°.	0°,	0′	30°.	13°,	54′	60°.	——
5°.	2°,	8′	35°.	16°,	42′	65°.	——
10°.	4°,	19′	40°.	19°,	46′	70°.	——
15°.	6°,	33′	45°.	23°,	11′	75°.	——
20°.	8°,	52′	50°.	27°,	3′	80°.	——
25°.	11°,	18′	55°	maxima.		85°.	——

In locis ergo ultra 45°. ab æquatore remotis æſtus erit maximus, ſi Luna maximam obtineat declinationem, ſi quidem fuerit $g = \frac{2}{25}$: ac ſi per obſervationes conſtet cuinam Lunæ declinationi maximus æſtus reſpondeat, tum inde valor litteræ g innoteſcet: quoniam autem ſub elevatione poli 50°. æſtus maximi nondum maximæ declinationi reſpondere obſervantur, ponamus id evenire ſub elevatione poli 60°, reperietur $\frac{1-8g}{1-2g} = \frac{1}{4}$ atque $g = \frac{1}{10}$, unde ipſius g tutò hi limites conſtitui poſſe videntur $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{18}$; ex hâc verò hypotheſi valor $\frac{1}{10}$ multo propiùs ad veritatem accedit; interim tamen etiamnum nil definimus, ſed obſervationes hunc in finem ſollicitè inſtitutas expectamus.

§. 88. Quòd ſi autem ponamus $g = \frac{1}{10}$, tum bini æſtus ſucceſſivi, dum Luna in maximâ declinatione verſatur, eò magis ad æqualitatem perducentur, quò ipſo theoria ad experientiam propiùs accedit; cùm enim ſit horum binorum æſtuum major ad minorem uti $\left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$ ad $\left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)$, hæc ratio eò propiùs ad æqualitatem accedet, quò minor fuerit fractio $\frac{1-8g}{1-2g}$, fit autem hæc fractio $= \frac{1}{4}$ ſi ponatur $g = \frac{1}{10}$. Hâc itaque hypotheſi erit quantitas æſtûs majoris $= (pq + \frac{1}{4}PQ)^2 . 16,86$ ped. minoris verò $= (pq - \frac{1}{4}PQ)^2 . 16, 86$ ped. At inter hos binos æſtus aqua humillima non medium interjacet, ſed minori eſt vicinior, neque tamen tantâ inæqualitate binos Fluxus dirimit, quàm fieret, ſi ima aqua Lunæ horizontali reſponderet, Si enim tempus medium inter binos Fluxus ponatur z, erit coſ. $z = 0$, at temporis, quo Refluxus Fluxum majorem inſequitur, coſinus eſt $= \frac{-PQ}{4pq}$, ejuſque ergo intervalli à tempore medio ſinus eſt $= \frac{PQ}{4pq}$, quæ expreſſio adeo ſub elevatione poli 60°, pro maxima Lunæ declinatione 28°, tantum fit $= 13°$, unde Refluxus

fluxus à tempore inter Fluxus medio circiter $54'$ aberrabit: minor verò erit aberratio, quò propiùs cùm regio Terræ tùm Luna ad æquatorem versentur, id quod cum experientiâ mirificè convenit. Quoniam autem hæc ex valore ipsius g assumto consequuntur, imprimis notari oportet, litteram g non posse absolutè determinari, sed ejus quantitatem, quippe quæ mobilitatem totius Oceani spectat, cùm ab extensione tùm etiam profunditate Maris pendere; ex quo variis in locis hæc eadem littera g, varias significationes sortietur.

§. 89. Ex solutione horum duorum problematum, quæ quidem in se spectata non solum sunt attentione digna, sed etiam cùm analysin tùm etiam motûs scientiam amplificant, quamvis ea casum propositum non penitus exhauriant, tamen motus in præcedentibus capitibus definitus multò magis cum experientiâ conciliatur, id quod theoriæ nostræ jam insigne addit firmamentum. Simili autem modo vis à Sole profecta cum inertiâ aquæ potest conjungi, atque æstus Maris definiri, quâtenus à solâ vi Solis oritur, quibus duobus effectibus conjungendis judicare licebit, quantus æstus quovis tempore & quovis loco debeat evenire. In hoc quidem capite cogitationes adhuc ab omnibus obstaculis à Terrâ & littoribus oriundis prorsus abstrahimus, atque universam Terram undiquaque aquâ circumfusam ponimus; ex quo regulas hinc natas præcipuè ejusmodi observationibus, quæ in amplissimo Oceano apud exiguas insulas sunt institutæ, conferri conveniet. Quoniam autem nondum motûs aquæ progressivi, quo alternativè ad loca, in quibus Fluxus & Refluxus accidit, progreditur & recedit, rationem habuimus, necesse est ut etiam hunc motum & Phænomena inde orta contemplemur. Ac primò quidem facilè intelligitur, cùm ob inertiam aquæ tùm etiam alia impedimenta motui opposita, aquam tam tardiùs elevari quàm deprimi oportere, quàm ex allatis hactenus consequitur: unde Fluxus non ad transitus Lunæ per meridianum contingent, sed aliquanto seriùs evenient, omnino uti experientia testatur.

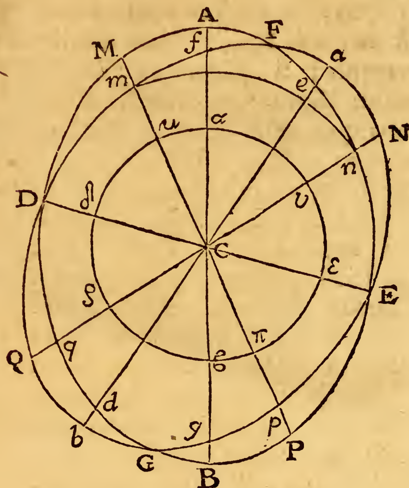
§. 90. Hæc autem retardatio præcisè ad calculum revocari non potest, quia à motu aquæ ejusque profunditate plurimum pendeat, prouti etiam videmus in diversis locis eam vehementer esse diversam, atque aliis locis Fluxum contingere post Lunæ culminationem tribus horis nondum elapsis, aliis verò locis plus quàm duodecim horis tardiùs venire, quæ quidem insignis retardatio terrarum positioni est adscribenda; interim tamen hinc sufficienter constat motum Maris admodum posse impediri. Pro eodem verò loco satis luculenter perspicitur, quò major atque altior Fluxus evenire debeat, eò tardiùs eundem accidere oportere. Quòd si enim æstus contingat infinitè parvus, dubium est nullum, quin is stato tempore adveniat, cùm impedimentis hoc casu ne locus quidem concedatur agendi: unde dilucidè sequitur æstus eò tardiùs advenire debere, quò

ſint majores. Atque hoc ipſum experientia confirmat, quâ conſtat æſtus majores, qui circa novilunia ac plenilunia contingunt, tardiùs inſequi tranſitum Lunæ per meridianum, quàm æſtus minores, qui circa quadraturas contingunt. Cùm enim Luna in quadraturis circiter 6 horis tardiùs reſpectu Solis per meridianum tranſeat, quàm in ſyzygiis, æſtus tamen non 6 horis tardiùs, ſed tantum circiter 5 $\frac{1}{4}$ horis tardiùs accidit. Videtur verò etiam calculus, qui pro utraque vi Solis ac Lunæ conjunctim inſtitui poteſt ſimili modo, quo pro ſolâ vi Lunæ fecimus, ejuſmodi retardationem majorem in ſyzygiis quàm in quadraturis indicare, etiamſi eum ob ſummas difficultates ad finem perducere non valuerimus; interim tamen ſatis planum eſt præcipuam ejus cauſam in ipsâ naturâ aquæ eſſe quærendam. Hæc autem allata ratio retardationis à Flamſtedio maximè probatur, quippe qui obſervavit maximam retardationem non tam ſyzygiis luminarium, neque minimam quadraturis reſpondere, ſed iis tempeſtatibus, quibus æſtus ſoleant eſſe maximi & minimi, id quod demum poſt ſyzygias & quadraturas contingit.

§. 91. Ad hanc autem Fluxuum à ſyzygiis ad quadraturas accelerationem, reſpectu tranſitûs Lunæ per meridianum, ac retardationem à quadraturis ad ſyzygias, plurimùm quoque vis Solis conferre videtur. Suprà enim jam indicavimus poſt ſyzygias Fluxum tranſitum Lunæ per meridianum antecedere debere, ob Solem tum jam versùs horizontem declinantem; unde etiam, ſtabilitâ inertiâ, diebus novilunia ac plenilunia ſequentibus æſtus Maris citiùs inſequi debet tranſitum Lunæ per meridianum, quàm in ipſis ſyzygiis, id quod etiam obſervationes mirificè confirmant; inter Fluxum enim quintum & ſextum poſt ſyzygias retardatio reſpectu Solis tantum 17 minut. deprehenditur, cùm tamen Luna 24′ retardetur. Hanc ob rem à Sole determinatur æſtus ad actionem virium magis exactè ſequendam, quæ determinatio cùm duret uſque ad quadraturas, mirum non eſt, quòd æſtus tùm reſpectu Lunæ citiùs contingant, magiſque ad calculum accedant. Contrarium evenit in progreſſu à quadraturis ad ſyzygias, quo tempore æſtus à Sole continuò retardantur; hocque neceſſariò efficitur, ut tandem in ipſis ſyzygiis Fluxus tardiùs inſequatur Lunæ culminationem quàm in quadraturis. Hanc autem rationem cum magnitudine æſtûs conjungendam eſſe putamus ad hæc phænomena perfectè explicanda, ſæpiſſimè enim in hâc quæſtione plures cauſæ ad eundem effectum producendum concurrunt; hoc autem eſt id ipſum quod calculus ille ſummoperè implicatus & moleſtus quaſi per tranſennam oſtendere viſus eſt.

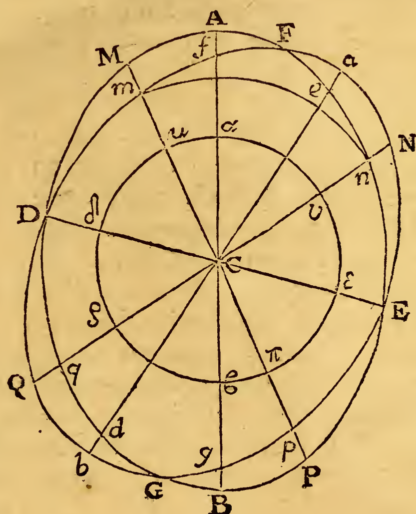
§. 92. Quò autem tam de his Phænomenis quàm reliquis certiùs & ſolidiùs judicare queamus, ipſum motum progreſſivum, quem aqua ab æſtu recipit, inveſtigabimus. Cùm enim aqua eodem loco nunc elevetur nunc ſubſidat, neceſſe eſt ut priori caſu aqua aliunde affluat, poſteriori

riori verò ab eodem loco defluat, unde nomina Fluxûs ac Refluxûs originem traxerunt. Repræsentet igitur tempore quocunque figura *A D B E* statum aquæ totam Terram ambientis, ita ut in locis *A* & *B* aqua maximè sit elevata, in locis verò mediis ab *A* & *B* æquidistantibus, maximè depressa. Post aliquod tempus transferatur æstus summus ex *A* & *B* in *a* & *b*, sitque *a D b E* figura aquæ Terram circumdantis: hoc igitur tempore necesse est, ut à parte oceani *D F* defluxerit aquæ copia *F A M D m f*, in partem verò *F E* tantundem aquæ affluxerit, portio scilicet *F a N E n e*: simili modo portio *E G* decrevit copiâ aquæ *E P B G g p*, portioque *G D* augmentum accepit *G b Q D q d*. Si nunc ponamus portionem *F M m* transire in locum *F N n*, ac portionem *E P p* in *E N n* deferri, satis clarè motum aquæ progressivum intelligere licebit. Cùm enim motus aquæ summæ *A* fiat ab ortu in occasum, aqua quæ circa *A* versùs orientem scilicet ab *M* ad *N* usque est sita, in occasum movebitur; similiterque ea quæ huic è diametro est opposita & spatium *P Q* occupat. Contrà verò reliqua aqua in *M Q* & *N P* contenta in ortum promovebitur. Verùm celeritas ubique non erit eadem; in punctis enim *M*, *N*, *P* & *Q* quippe limitibus inter motus versùs ortum & obitum, celeritas erit nulla, deinde ab *M* usque ad *F* crescet ubique ita ut incrementa celeritatis in punctis mediis ut *A* sint differentiis *A f* proportionalia: ab *F* verò usque ad *N* celeritas decrescere debet, & decrementum celeritatis in *e* erit ut *a e*; similique modo comparatus erit motus in reliquis portionibus figuræ propositæ.



§. 93. Si hæc diligentiùs prosequamur ac punctum *a* ipsi *A* proximum ponamus, reperiemus in loco quocunque *M* fore intervallum *M m* sinui dupli anguli *M C A* proportionale. Quare si anguli *A C M* sinus ponatur $= x$, cosinus $= y$, ac celeritas quam aqua in *M* habet, versùs occasum $= u$ erit $d\dot{u}$ ut $2xy$. Cùm autem elementum arcûs *AM* sit ut $\frac{dx}{g}$; nam figuram instar circuli considerari licet: erit $d\dot{u}$ ut $2x\,dx$, atque u proportionale erit ipsi $2xx-1$ ejusmodi adjecta constante, ut ubi *M m* est maximum, ibi celeritas evanescat. Hanc ob rem erit celeritas in loco quo-

quocunque *M*, quam aqua versùs occidentem habebit, uti cosinus dupli anguli *MCA*. Maxima igitur aquæ celeritas versùs occidentem erit in iis locis, in quibus aqua maximè est elevata; huicque celeritati æqualis est ea, quâ aqua in locis ubi maximè est depressa, versùs orientem promovetur; si quidem hæc in circulo fieri concipiamus, nam in sphæra motus aliquantum diversus erit, sed tamen hinc intelligi poterit. At in locis quæ ab A & *B* 45 grad. distant, ob cosinum dupli anguli = 0, aqua omnino nullum habebit motum horizontalem. Ex his igitur non solum motus aquæ progressivus cognoscitur, quo alterna elevatio ac depressio producitur, sed etiam luculenter perturbationes, quæ à Terris, littoribus atque etiam à fundo Maris proficisci possunt, perspiciuntur. Ceterum quanquam sectio nostra plana *ADBE* æquatorem solum denotare videtur, tamen eadem ad parallelum quemvis significandum satis commodè adhiberi potest: quin etiam motus pro sphæra hinc satis distinctè colligi poterit, operæ enim pretium non judicamus, per solidorum introductionem hanc rem cognitu tantò difficiliorem reddere.



§. 94. Eò minus autem hujus accuratæ inquisitioni insistemus, quòd celeritas progressiva insuper à profunditate maris pendeat. Quòd si enim ponamus *mn* jam esse Maris fundum, ita ut profunditas Maris in *M* major non esset quàm *Mm*; tum isti aquæ tantus motus inesse deberet, quo ea, dum Fluxus ex *A* in *a* transit, ex situ *nFMm* in situm *mFNn* transferri posset. Hic autem motus quamvis sit difformis & per totam massam inæquabilis, tamen si tota translatio spectetur, totus motus ex spatio à centro gravitatis interea percurso est æstimandus. Hoc igitur casu, quo Terræ superficiem solidam ad *mn* usque pertingere ponimus, reperietur centrum gravitatis massæ *nFMm* ferè æquè celeriter promoveri debere ac punctum *A*, ex quo ejus celeritas tanta esse deberet, quâ tempore unius horæ spatium ferè 15 graduum percurrere posset, quæ celeritas undique foret enormis ac stupenda. At si Mari profunditatem majorem tribuamus, scilicet ad *μν* usque, tum illa celeritas multò fiet minor, decrescet namque in eadem ratione in qua profunditas crescit. Cùm igitur celeritas Maris, quæ antè in se spectata

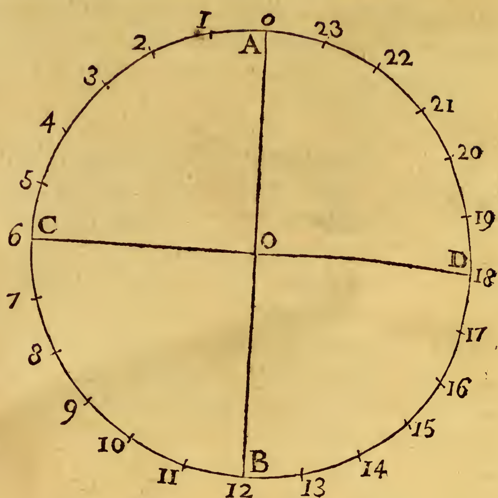
inventa

inventa eſt coſinui dupli anguli MCA proportionalis, eò fiat minor, quò majorem Mare habeat profunditatem, tenebit ea in quoque loco rationem compoſitam ex ratione directâ coſinûs dupli anguli MCA atque ex inversâ profunditatis.

§. 95. Datur autem alius modus celeritatem Maris horizontalem, poſitâ ſcilicet ubique profunditate eâdem, determinandi, qui tamen ad diverſas profunditates patet, ſi cum ratione inveniendâ conjungamus reciprocum profunditatum uti fecimus; deduciturque hic modus ex motu Maris verticali, quo modò aſcendit modò deſcendit, qui jam ſuprà eſt definitus. Primò enim manifeſtum eſt, ſi Mare ubique eâdem celeritate, (poſitâ profunditate ubique æquali) in eandem plagam promoveretur, tum etiam altitudinem manſuram eſſe eandem ubique, neque ullam mutationem in elevatione aquæ orturam eſſe. At ſi aqua motu inæquabili progrediatur, manifeſtum eſt iis in locis, ubi celeritas diminuitur, aquam turgeſcere atque adeo elevari debere, quoniam plus aquæ affluit quàm defluit; contrà verò ubi celeritas aquæ creſcat, ibi aquam ſubſidere oportere. Quare cùm elevatio & depreſſio Maris à motûs progreſſivi horizontalis inæqualitate pendeat, licebit pro quovis loco hanc inæqualitatem definire, ex motu aſcensûs & deſcensûs cognito. Cùm enim celeritas aſcensûs ſit decremento celeritatis progreſſivæ æqualis, celeritas deſcensûs verò incremento celeritatis progreſſivæ, ex dato motu verticali ratio motûs horizontalis definiri poterit. Invenimus autem ſuprà §. 84, ſi Luna à meridiano versùs occaſum jam receſſit angulo z, hoc eſt cùm regio propoſita ab eâ, in quâ aqua eſt ſumma, versùs orientem ſecundùm longitudinem diſtet angulo z, fore celeritatem quâ aqua aſcendit $= \frac{-6gpqPQ\,\text{ſin.}\,z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\,\text{ſin.}\,2z}{h(1-8g)}$. Quare cùm huic celeritati aſcensûs proportionale ſit decrementum motûs horizontalis, erit ipſa celeritas horizontalis versùs occaſum ut $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{6gpqPQ\,\text{coſ.}\,z}{h(1-2g)} + \frac{3gp^2q^2\,\text{coſ.}\,2z}{2h(1-8g)}$; hujus enim differentiale negativè ſumtum & per dz diviſum dat ipſam celeritatem aſcensûs. Quoniam autem hæc expreſſio ſimul exhibet ſpatium, quo Mare ſupra libellam elevatur, erit celeritas Maris in quovis loco versùs occidentem proportionalis elevationi ſupra libellam, & inversè profunditati Maris, quæ eſt vera regula pro motu Maris, tam verticali quàm horizontali, definiendo; atque ita priori modo inſufficienti ſuperſedere potuiſſemus.

§. 96. Conſideremus ergo motum, quo aqua tàm verticaliter quàm horizontaliter promovetur à Fluxu uſque ad Refluxum, indeque ad ſequentem Fluxum, idque ſub æquatore, dum Luna pariter in æquatore verſatur: erit itaque celeritas aſcensûs ut

ut − fin. $2z$, celeritas autem horizontalis versùs occasum ut 15 cos. $2z + 1$ posito $g = \frac{1}{10}$, cui expressioni simul altitudo aquæ supra libellam est proportionalis. Quòd si ergo superficies Terræ seu perimeter æquatoris in 24 partes æquales dividatur, atque in locis *A* & *B* aqua sit maximè elevata, in *C* & *D* verò minimè, numeri 1, 2, 3, &c. designabunt ea Terræ loca in quibus ante unam vel duas vel tres vel &c. horas lunares aqua maximè fuit elevata, tribuendo uni horæ Lunari 62 minuta. In Tabulâ ergo annexâ exhibetur motus tam verticalis, quàm horizontalis, ad singulas horas post Fluxum elapsas.



Horæ post Fluxum.	*Celeritas Maris verticalis.*	*Celeritas Maris horizontalis.*
0	0,000 descendit.	1,067 in occasum.
1	0,500 descendit.	0,927 in occasum.
2	0,860 descendit.	0,567 in occasum.
3	1,000 descendit.	0,067 in occasum.
4	0,860 descendit.	0,432 in ortum.
5	0,500 descendit.	0,792 in ortum.
6	0,000 ascendit.	0,932 in ortum.
7	0,500 ascendit.	0,792 in ortum.
8	0,860 ascendit.	0,432 in ortum.
9	1,000 ascendit.	0,067 in occasum.
10	0,860 ascendit.	0,567 in occasum.
11	0,500 ascendit.	0,927 in occasum.
12	0,000 descendit.	1,067 in occasum.

Facilè autem intelligitur pro regionibus ab æquatore remotis, præcipuè si Luna habeat declinationem, tum utrumque motum magis fore irregularem, atque mox ascensum citiùs absolvi mox verò descensum; totus autem motus faciliùs ex ipsis formulis datis cognoscetur. Hìc denique profunditatem ubique eandem posuimus; quòd si enim esset diver-

sa;

ſa, motus horizontalis ſimul rationem inverſam profunditatis tenebit.

§. 97. Denique antequam hoc caput finiamus, notari oportet, neque maximos æſtus iis ipſis temporibus evenire poſſe, quibus vires Solis & Lunæ maximè vigent, nec minimos æſtus tum, cùm vis à Luna & Sole nata eſt debiliſſima, ſed aliquanto tardiùs. Æſtûs enim magnitudo non ſolum à quantitate virium ſollicitantium pendet, uti id uſu-veniret, ſi aqua inertiâ careret, ſed inſuper à motu jam antè concepto. Quòd ſi enim antè Mare omnino quieviſſet, tum primus certè æſtus oriundus admodum futurus eſſet exilis, etiamſi vires ſollicitantes eſſent maximæ; ſequentes verò æſtus continuò creſcerent, donec tandem poſt tempus infinitum magnitudinem aſſignatam obtinerent, ſi quidem vires ſollicitantes idem robur perpetuò ſervarent: atque hoc idem evenire debet, ſi æſtus præcedentes tantum fuerint minores, quàm is qui viribus ſollicitantibus convenit. Quare cùm æſtus novilunia ac plenilunia præcedentes ſint minores, ii quidem his temporibus ab auctis viribus augebuntur, non verò ſubitò totam ſuam quantitatem conſequentur, atque hanc ob rem æſtus etiamnum poſt ſyzygias augmenta accipient, donec ob tum ſecutura virium decrementa, æſtus iterum decreſcere incipiant. Ita tempore noviluniorum & pleniluniorum non tam ipſi æſtus quàm incrementa eorum cenſenda ſunt maxima, quatenus ſcilicet æſtus præcedentes maximè deficiunt, ab iis qui ſequi deberent; ex quo manifeſtum eſt non illos æſtus, qui in ipſis ſyzygiis luminarium contingunt, eſſe maximos, ſed ſequentes eſſe majores. Hocque idem intelligendum eſt de æſtibus minimis, qui non in ipſas quadraturas incidunt, ſed tardiùs ſequuntur: unde ratio luculenter perſpicitur, cur æſtus tàm maximi quàm minimi non ipſis ſyzygiarum & quadraturarum tempeſtatibus reſpondeant, ſed feriùs obſerventur, tertii ſcilicet demum vel quarti poſt hæc tempora.

CAPUT SEPTIMUM.

Explicatio præcipuorum Phænomenorum circa Æſtum Maris obſervatorum.

§. 98. IN præcedentibus capitibus fuſiùs expoſuimus effectus, qui in Mari à viribus illis duabus, quarum altera versùs Lunam eſt directa, altera versùs Solem, produci debent; eoſque cùm per calculum analyticum, tùm per ſolida ratiocinia ita determinavimus, ut de eorum exiſtentiâ dubitari omnino non liceat, ſi quidem illæ vires admittantur. At verò iſtas vires in mundo exiſtere non ſolum per alia phæ-

 nome-

nomena evidentiſſimè probavimus, ſed etiam earum cauſam phyſicam aſſignavimus, quam in binis vorticibus, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam ſit conſtitutus, poſuimus, quippe quæ eſt unica ratio cùm gravitatem tùm etiam vires, quibus planetæ in ſuis orbitis circa Solem continentur, explicandi. Quin etiam hæc ipſa phænomena internam vorticum ſtructuram & indolem commonſtrarunt; ob eaque vortices ita comparatos eſſe ſtatuimus, ut vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris eorumdem. Quare cùm in his viribus nihil gratuitò aſſumſerimus, ſi effectus ex iis oriundi cum phænomenis æſtûs Maris conveniant, certiſſimè nobis perſuadere poterimus, in aſſignatis viribus veram æſtûs Maris cauſam contineri; abſonumque omninò fore, ſi cauſam æſtûs Maris in aliis viribus imaginariis anquirere vellemus. Quamobrem in hoc capite conſtituimus omnes effectus, qui in ſuperioribus capitibus ſparſim ſunt eruti, conjunctim & ordine proponere, ſummumque eorum conſenſum cum experientiâ declarare. Quoniam autem nondum impedimentorum à littoribus terriſque oriundorum rationem habuimus, facilè intelligitur, hinc excludi adhuc debere ejuſmodi anomalias æſtûs Maris, quæ evidentiſſimè à Terris contingentibus ortum habeant, cujuſmodi ſunt æſtus vel vehementer enormes vel vix ſenſibiles, uti in Mari Mediterraneo, vel inſignes retardationes eorum, quibus rebus explicandis ſequens caput ultimum deſtinavimus: ita in hoc capite tantum ea æſtûs Maris phænomena explicanda ſuſcipimus, quæ in portubus ampliſſimum Oceanum reſpicientibus vel inſulis obſervari ſolent in Oceano ſitis.

§. 99. Si omnes proprietates, quibus Fluxus ac Refluxus Maris præditus eſſe obſervatur, diſtinctè enumerare atque exponere velimus, deprehendemus eas ad tres claſſes revocari debere. Ad primam ſcilicet claſſem referenda ſunt phænomena, quæ in uno æſtu in ſe ſpectato conſpiciuntur, cùm ratione temporis tùm etiam ratione quantitatis; hæcque phænomena commodiſſimè ſub varietatibus diurnis comprehendi poſſunt, quâtenus ea ſe offerunt obſervatori, qui per integrum tantum diem obſervationes inſtituit, neque ea cum aliis phænomenis aliis temporibus occurrentibus comparat. Secunda claſſis complectitur varietates menſtruas, quæ ſeſe obſervatori per integrum menſem æſtum Maris contemplanti offerunt, quorſum pertinent æſtus maximi minimique, item retardationes modò majores modò minores. Tertia denique claſſis comprehendit varietates annuas ac pluſquam annuas, quæ ſequuntur vel varias Lunæ à Terra diſtantias, vel Solis; vel etiam luminarium declinationem. Hanc ob rem phænomena uniuſcujuſque claſſis recenſebimus, atque quomodo ſingula cum theoriâ traditâ congruant, oſtendemus. Hìc verò, ut jam eſt monitum, à perturbationibus quæ à Terris ac littoribus provenire poſſunt, animum prorſus abſtinemus, eas ſequenti capiti reſervantes. Multò mi-

nùs

nùs verò ad ventum hìc respicimus, quo æstus Maris cùm ratione magnitudinis tùm temporis plurimum affici observatur; sed tantùm ejusmodi phænomena explicare hìc conabimur, quæ memoratis perturbationibus minimè sint obnoxia.

§. 100. Quod igitur ad primam classem attinet, præcipuum Phænomenum in hoc consistit, quòd ubique in amplissimo Oceano quotidie bini Maris Fluxus seu elevationes, binique Refluxus seu depressiones observentur, atque tempus inter binos Fluxus successivos circiter 12. h. 24′. deprehendatur. Huic verò Phænomeno, si ulli alii, per theoriam nostram plenissimè est satisfactum, ubi ostendimus maximam aquæ elevationem deberi transitui Lunæ per meridianum tam supra quàm infra Terram: ex quo cùm Luna unâ revolutione diurnâ bis ad ejusdem loci meridianum appellat intervallo temporis circiter 12. hor. 24′, necessariò sequitur unâ revolutione Lunæ circa Terram binos Fluxus tanto tempore à se invicem dissitos oriri debere, quemadmodum hoc ipsum calculus tam pro hypothesi aquæ inertiâ carentis, quàm admissâ inertiâ, clarissimè indicavit. Simul autem ex iisdem determinationibus intelligitur sub ipsis polis nullum omnino æstum dari diurnum, in regionibus verò à polis non procul remotis, ubi luminaria vel non oriuntur vel non occidunt; quotidie unum tantum Fluxum unicumque Refluxum contingere debere; quæ consequentia theoriæ, etsi observationibus nondum satis est comprobata, tamen quia ex iisdem principiis sequitur quæ institutis observationibus satisfaciant, nulli ampliùs dubio subjecta videtur. In locis autem æquatori propioribus, quibus quotidie bini Fluxus totidemque Refluxus eveniunt, momentum, quo aqua maximè deprimitur non satis exactè medium interjacere observatur inter Fluxuum momenta, sed mox priori mox posteriori est propius, quod Phænomenum cum nostrâ theoriâ apprimè congruit; ostendimus enim momentum Refluxûs non exactè tempori medio inter Fluxus respondere, nisi vel locus situs sit sub æquatore, vel Lunæ declinatio fuerit nulla, sed modò priori modò posteriori Fluxui esse propius.

§. 101. Secundum Phænomenum huc redit, ut ubique locorum Fluxus post transitum Lunæ per meridianum venire observetur, idque aliquot horarum spatio, in portubus versùs apertum Oceanum patentibus. Nam in regionibus quæ cum Oceano non liberrimè communicantur, sed ad quas aqua juxta littora deferri debet, multo tardiùs æstus advenit, quæ retardatio si ferè ad 12 horas ascendit, in causa esse solet, ut hujusmodi in locis Fluxus ante transitum Lunæ per meridianum venire videatur. Ita ad Portum Gratiæ videri posset Fluxus 3 horis Lunæ culminationem antecedere, cùm tamen, re benè consideratâ, à præcedente culminatione oriatur, atque adeo eam 9 ferè horis demum sequatur, uti apparebit si æstuum momenta, quæ successivè ad littora Britannia minoris

& Normanniæ obſervantur continuóque magis retardantur, attentiùs inſpiciantur. Deberet quidem ubique Fluxus in ipſos Lunæ tranſitus per meridianum incidere, imò quandoque ob Solem præcedere, non ſolum demtâ inertiâ, ſed etiam eâ poſitâ, ſi tantum aquæ motus verticalis ſpectetur; at ſi etiam motûs horizontalis ratio habeatur, tum dilucidè oſtendimus Fluxum perpetuò retardari, ac demum poſt Lunæ tranſitum per meridianum evenire debere. Tempus quidem hujus retardationis, cùm ſit admodum variabile pluribuſque circumſtantiis ſubjectum, non definivimus, interim tamen id ex §. 82. colligi poterit, remotis externis impedimentis: cùm enim invenerimus aquam propriâ vi gravitatis ſeſe in ſitum æquilibrii recipere tempore $\frac{12}{n}$ horarum, ac numerum n eſſe circiter 5 vel 6, manifeſtum eſt tanto etiam tempore opus eſſe, quo aqua eum ſitum quem vires intendunt, induat, ex quo Fluxus circiter 2 horas vel 2 $\frac{1}{2}$ hor. poſt tranſitum Lunæ per meridianum contingere debebit, id quod cum obſervationibus in Oceano libero inſtitutis egregiè convenit; hancque idcirco præcipuam hujus retardationis cauſam meritò aſſignamus.

§. 102. Tertium Phænomenon ſuppeditat æſtûs magnitudo, quæ autem tam diverſis locis quàm diverſis tempeſtatibus maximè eſt mutabilis. Interim tamen exceptis enormibus illis æſtubus, qui nonnullis in portubus obſervari ſolent, reliqui cum noſtrâ Theoriâ egregiè conſentiunt; inertiâ enim ſublatâ, invenimus ſub æquatore maximum æſtum fore per ſpatium circiter 4 pedum, ab inertia autem hoc intervallum augeri ita ut duplo, vel triplo, vel etiam quadruplo & plus fiat majus, prout valor ipſius g (vid. §. 82.) minor fuerit vel major, quippe qui à facultate Oceani ſeſe propriâ ſuâ vi in ſtatum æquilibrii reſtituendi pendet; ex quo ſub æquatore ſpatium per quod maximus æſtus agitatur ad 8., 12, 16 & plures pedes exſurgere poteſt. In regionibus autem ab æquatore remotis invenimus magnitudinem æſtûs tenere rationem duplicatam coſinuum elevationis poli, unde ſub elevatione poli 45°., magnitudo æſtûs circiter duplo erit minor quàm ſub ipſo æquatore; cujus veritas in locis à littoribus aliquot milliaria remotis per experientiam eximiè comprobatur. Deprehenditur enim ubique in locis à littoribus remotis æſtus multò minor quàm ad littora; cujus diſcriminis cauſa in ſequenti capite dilucidè indicabitur. Quinetiam in medio Mari plerumque æſtus adhuc minor obſervatur, quàm hæc regula requirit; id autem oſtendetur à non ſatis amplâ Oceani extenſione ſecundùm longitudinem proficiſci, quemadmodum in Oceano Atlantico qui versùs Occidentem littoribus Americæ; versùs Orientem verò, littoribus Africæ & Europæ terminatur, quæ amplitudo non eſt ſatis magna, ut integram æſtûs quantitatem ſuſcipere queat.

§. 103. Quartum Phænomenon varietates menstruas respicit, atque ostendit æstus, qui circa plenilunia & novilunia contingunt, inter reliquos ejusdem mensis esse maximos, æstus verò circa quadraturas luminarium minimos; quæ inæqualitas cum theoriâ nostrâ ad amussim quadrat. Cùm enim æstus Maris non solum ab eâ vi, quæ vortici Lunam ambienti competit, oriatur, sed etiam à vi Solem spectante pendeat, quæ ceteris paribus circiter quadruplo minor est vi Lunæ, manifestum est æstum Maris maximum esse debere, si ambæ vires inter se conspirent, atque aquam simul vel elevent vel deprimant, id quod accidere ostendimus tam pleniluniis quàm noviluniis. Deinde simili modo, quoniam istæ vires inter se maximè discrepant in quadraturis, quibus temporibus dum aqua à Lunâ maximè elevatur, simul à Sole maximè deprimitur ac viciffim, perspicuum est iisdem temporibus æstum minimum esse debere. Præterea verò ipsum discrimen cum theoriâ exactè convenit; in pluribus enim portubus æstus maximos & minimos ad calculum revocavimus, atque ex relatione eorum relationem inter vires Lunæ ac Solis investigavimus; hincque perpetuò eandem ferè rationem inter vires Solis ac Lunæ absolutas elicuimus, quemadmodum id fecit Newtonus ex observationibus Bristolii & Plymouthi, nos verò in Portu Gratiæ institutis, conclusionibus mirificè inter se congruentibus: qualis consensus profectò expectari non posset, si theoria veritati non esset consentanea. Neque etiam aliæ theoriæ adhuc productæ, cujusmodi sunt Galilæi, Wallisii atque Cartesii, qui causam in pressione Lunæ collocavit, huic phænomeno perfectè satisfaciunt, sed potiùs prorsùs evertuntur.

§. 104. Quintum Phænomenon in hoc consistat, quòd unius mensis intervallo maximi æstus non sint ii, qui novilunia ac plenilunia proximè insequuntur, sed sequentes tertii scilicet circiter vel quarti, similique intervallo æstus minimi demum post quadraturas contingunt. Hujus autem Phænomeni ratio in §. 97. fusiùs est exposita, ubi ostendimus, cùm æstus ante syzygias incidentes essent minores, maximam vim à Sole & Lunâ ortam non subitò æstum maximum producere valere, sed tantùm Mare ad eum statum solicitare. Cùm igitur post syzygias vis æstum efficiens sensibiliter non decrescat, æstus etiamnum post hoc tempus incrementa capiet, atque ideo demum post syzygias fiet maximus; similisque est ratio diminutionis æstuum, quæ etiamnum post quadraturas contingere debet, ita ut æstus minimi demum post quadraturas eveniant. Hujusmodi autem retardationes effectuum à viribus in mundo existentibus provenientium quotidie abundè experimur: ob similem enim rationem singulis diebus maximum calorem non in ipso meridie sentimus, etiamsi hoc tempore vis Solis calefaciens sine dubio sit maxima, sed demum aliquot horis post meridiem, atque propter eandem causam neque solstitii æstivi momento maximus calor annuus sentitur, neque tempore solstitii hyberni frigus summum, sed utrumque notabiliter tardiùs.

§. 105.

§. 105. Sextum Phænomenon in hoc ponimus, quòd momenta Fluxuum tempore ſyzygiarum multo ſtrictiùs ordinem tenere obſervantur, quàm circa quadraturas. Hìc verò ante omnia animadvertendum eſt præcipuam ſenſibilem anomaliam in momentis æſtuum inde originem trahere, quòd hæc momenta ex tempore ſolari atque à vero meridie ſeu tranſitu Solis per meridianum ſoleant computari, cùm ea potiùs à tranſitu Lunæ per meridianum pendeant. Quòd ſi autem ad has obſervationes tempus lunare à tranſitu Lunæ per meridianum computandum adhibeatur, irregularitates apparentes maximam partem evaneſcent, hoc verò multo magis in fluxubus circa ſyzygias quàm quadraturas: in quadraturis enim quoniam, dum Luna per meridianum tranſit, Sol non ſemper in horizonte verſatur, ſed vel ad horizontem demum accedit vel jam ab eo recedit, neceſſe eſt ut illo caſu Fluxus citiùs, hoc verò tardiùs contingat: quod diſcrimen cùm partim ab elevatione poli partim à declinatione luminarium pendeat, momenta Fluxuum in quadraturis magis irregularia reddit: interim tamen habitâ harum circumſtantiarum ratione ſatis propè definiri poteſt. Circa tempora Fluxuum autem, qui in noviluniis ac pleniluniis incidunt, hæc ſola correctio ſeu reductio ad tranſitum Lunæ per meridianum omnem ferè anomaliam tollit, quorſum ſpectat regula à celeb. Caſſino in Mem. 1710. tradita, quâ pro totidem horis, quibus plenilunium ſeu novilunium vel ante meridiem vel poſt incidit, totidem bina minuta ad tempus Fluxûs medium vel addere vel ab eo ſubtrahere jubet, quippe quæ ex motu Lunæ eſt petita. Interim tamen hâc correctione adhibitâ aliqua anomalia ſupereſſe deprehenditur, cujus autem ratio ex noſtrâ theoriâ ſponte ſequitur. Quando enim ſyzygia ante meridiem celebratur, tum dum Luna per meridianum tranſit, Sol jam ante eum eſt tranſgreſſus, atque ideo jam horizonti appropinquat, ex quo neceſſe eſt ut Fluxus citiùs eveniat, quàm prima regula ſola adhibita indicat. Atque etiam idem in tabulis Fluxuum Dunkerquæ & in Portu Gratiæ obſervatorum, Mem. 1710. inſertis, manifeſtò conſpicitur: quando enim novilunium pleniluniumve pluribus horis ante meridiem accidit, tum Fluxus citiùs adveniſſe obſervatur, quàm calculus Caſſinianus indicabat; contrà verò tardiùs ſi ſyzygiæ demum pluribus horis poſt meridiem inciderint, cujus majoris retardationis cauſa in Sole tum adhuc ab horizonte recedente eſt quærenda.

§. 106. Septimum Phænomenon ſuppeditat diverſa retardatio Fluxuum in ſyzygiis luminarium & quadraturis reſpectu appulsûs Lunæ ad meridianum; tardiùs ſcilicet ubique locorum Fluxus, qui in ſyzygiis contingunt, inſequuntur culminationem Lunæ, quàm ii, qui circa quadraturas veniunt. Hujus autem Phænomeni duplex cauſa poteſt aſſignari, quarum prima à ſolâ quantitate æſtuum petitur, quia enim æſtus ſyzygiarum multò ſunt majores quàm æſtus quadraturarum, conſentaneum vide-

videtur illos tardiùs venire quàm hos. Altera verò causa quæ hoc Phænomenon multò distinctiùs explicat, nullique dubio locum relinquit, nostræ theoriæ omnino est propria, priorique longè est præferenda. Ponamus enim t esse tempus, quo in noviluniis ac pleniluniis Fluxus post appulsum Lunæ ad meridianum venire solet; sequentibus igitur diebus hoc tempus t continuò diminuetur, quia tum Sol, dum Luna in meridiano versatur, Mare jam deprimit; quæ diminutio cùm duret ferè usque ad quadraturas, necesse est ut his temporibus Fluxus multò citiùs post culminationem Lunæ sequantur, viribusque sollicitantibus magis obtemperent, utì hoc fusiùs §. 91. explicavimus, unde tempus retardationis in quadraturis tantum erit $t - \theta$. Post quadraturas autem Sol exerit contrarium effectum, atque adventum Fluxûs continuò magis retardat, idque æquali modo, quo antè acceleraverat, ex quo usque ad sequentem syzygiam intervallum $t - \theta$ iterum ad t usque augebitur. Hujusque Phænomeni solius explicatio sufficere posset ad veritatem theoriæ nostræ evincendam, cùm id omnibus aliis theoriis explicatu sit insuperabile; neque à nemine adhuc saltem probabilis ejus causa sit assignata.

§. 107. Octavum Phænomenon petamus ex inæqualitate duorum Fluxuum sese immediatè insequentium, quorum alter transitui Lunæ superiori per meridianum respondet, alter inferiori, quæ inæqualitas maximè observatur in regionibus ab æquatore multum remotis, ac tum cum Lunæ declinatio est maxima. Theoria quidem declarat Lunam, etiamsi in ipso æquatore versetur, tamen majori vi gaudere ad Mare movendum, quando super horizonte meridianum attingit, quàm infra horizontem; at discrimen sub æquatore tam est exiguum, ut vix in sensus occurrere queat, integrum enim digitum non attingit (§. 41.); atque in regionibus ab æquatore remotis fit multò minus. Vera igitur hujus Phænomeni ratio in altitudine Lunæ meridianâ seu distantiâ ab horizonte continetur; hinc enim sequitur quò major fuerit differentia inter distantias Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit tum super horizonte tum sub horizonte, eò majorem esse debere differentiam inter binos Fluxus successivos, ex quo perspicuum est istam differentiam versùs polos continuò crescere debere, si quidem Luna habeat declinationem. Quòd si ergo Luna habuerit declinationem borealem, tum in regionibus septentrionalibus Fluxus erit major qui transitum Lunæ per meridianum superiorem sequitur, alter verò sequens, qui transitui inferiori respondet, minor. Contrà autem si Lunæ declinatio fuerit australis, appulsui Lunæ ad meridianum superiori Fluxus succedet minor, inferiori verò major; hancque differentiam Flamstedius observavit diligenter, nullumque est dubium, quin ea per copiosissimas observationes, quas Academia Celeberrima Regia Parisina collegit, omnino confirmetur. In hoc autem negotio indoles Fluxuum probè est inspicienda, quoniam aliquibus in por-

portibus tantopere retardantur, ut sequentibus Lunæ transitibus per meridianum sint propiores, quàm illi, cui suam originem debent; ita Dunkerquæ circa syzygias Fluxus circiter meridie observari solet, neque verò illi ipsi transitui Lunæ per meridianum est tribuendus qui eodem tempore fit, sed præcedenti, prouti successiva retardationis incrementa ad littora Galliæ & Belgii borealia evidentissimè testantur. Quare si verbi gratiâ Dunkerquæ quis hujusmodi observationes perlustrare voluerit, is quemque Fluxum non cum transitu Lunæ per meridianum proximo comparet, sed cum eo qui propemodum 12 horis antè contigit; alioquin enim contraria Phænomena esset deprehensurus.

§. 108. Commodus hìc nobis præbetur locus explicandi transitum à binis æstubus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares sitis eveniunt, ad singulos æstus, qui secundùm theoriam nostram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim theoria nostra monstrat, in zonis temperatis & torridâ quotidie duos Fluxus observari debere, in zonis frigidis autem unum tantum, transitio subitanea à binario ad unitatem maximè mirabilis ac paradoxa videri posset. Sed quia si Fluxus bini successivi inter se sunt inæquales, Refluxus aquæ seu maxima depressio Fluxui minori est vicinior, bini æstus quoque successivi ratione temporis inter se erunt inæquales, si quidem voce æstûs intelligamus motum aquæ à summâ elevatione ad imam depressionem usque, ac vicissim. Quò magis itaque ab æquatore versùs polos recedatur, eò major deprehendetur inter binos æstus successivos inæqualitas, cùm ratione magnitudinis tùm temporis, major enim diutiùs durabit quàm minor, ambo verò simul ubique absolventur tempore 12 horarum, cum 24' circiter: quòd si itaque in eas regiones usque perveniatur, in quibus Luna utrâque vice vel super horizonte vel sub horizonte meridianum attingit, æstus minor omnino evanescet, solusque major supererit, qui tempus 12 h. 24'. adimplebit. Ex quibus perspicuum est, si Luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æstuum successivorum ad polos accedendo continuò fieri majorem, atque tandem minorem omnino evanescere debere, quod cùm evenit, bini æstus in unum coalescunt.

§. 109. Explicatis anomaliis æstûs Maris menstruis, pervenimus ad anomalias annuas vel plusquam annuas, ac nonum quidem Phænomenon desumimus ex variatione æstûs, quæ à diversis Lunæ à Terra distantiis proficiscitur. Observantur enim æstus ubique majores ceteris paribus, in iisdem scilicet luminarium aspectibus iisdemque declinationibus, si Luna in suo perigæo versetur, minores verò, Lunâ in apogæo existente. Egregiè autem hæc conveniunt cum nostrâ theoriâ, quâ demonstravimus Lunæ vires ad Mare movendum decrescere in triplicatâ ratione distantiarum Lunæ à Terra: quòd si igitur Luna versetur in perigæo Fluxus debebunt esse majores, quàm si Luna apogæum occupat. Præterea etiam

tabula

tabula quam Celeb. Caſſini in Mem. 1713. pro diverſis Lunæ à Terrâ diſtantiis ex plurimis obſervationibus Breſtiæ inſtitutis collegit, ſatis accuratè cum theoriâ noſtrâ conſpirat, etiamſi enim pro Luna perigæa minorem elevationem aquæ tribuat, quàm iſta ratio requireret, tamen diſcrimen valde eſt exiguum: quin etiam facilè concedetur Lunam perigæam totum ſuum effectum non tam citò conſequi poſſe, quem conſequeretur, ſi Luna perpetuò in perigæo verſaretur. Aliter autem Luna apogæa eſt comparata, quæ ad diminuendum æſtum Maris tendit, cùm enim Mare ob inertiam & impedimenta ipſum ad diminutionem æſtûs ſit proclive, ſine ullâ reſiſtentiâ Luna in apogæo cònſtituta effectum ſuum exeret. Huc etiam pertinet, quod pariter Celeb. Caſſini ſe obſervaſſe teſtatur, ſimilem differentiam etſi multò minorem à variis Solis à Terrâ diſtantiis produci, id quod noſtræ theoriæ non ſolum eſt conſentaneum, ſed inde etiam ipſa quantitas hujus differentiæ poteſt definiri.

§. 110. Denique decimum Phænomenon ſeſe nobis contemplandum offert, quo vulgò ſtatui ſolet æſtus tam noviluniorum quàm pleniluniorum, qui contingunt circa æquinoctia, cæteris eſſe majores, etiamſi obſervationes hanc regulam non penitùs confirment; quamobrem videamus quomodo æſtus cæteris paribus comparatus eſſe debeat pro diverſis Lunæ declinationibus. Ac primò quidem ex noſtrâ theoriâ (§. 87.) æſtus dum Luna in æquatore verſatur, maximos eſſe non poſſe, niſi in locis ſub ipſo æquatore ſitis; atque eodem loco tabellam adjecimus, ex quâ patet, cuinam Lunæ declinationi maximi æſtus reſpondeant. Ita pro elevatione poli 50°, æſtus maximi incidunt Lunæ declinationi 27°, ſi quidem g ponatur $= \frac{2}{25}$; at poſito $g = \frac{1}{10}$, quod probabilius videtur, prodit Lunæ declinatio maximum æſtum producens circiter 16°, id quod mirificè convenit cum obſervationibus ad Littora Galliæ Septentrionalia inſtitutis, quibus conſtat maximos ſyzygiarum æſtus menſibus Novembri & Februario accidere ſolere, quibus temporibus Luna ferè aſſignatam obtinet declinationem. At quod fortè illi regulæ, quâ Lunæ in æquatore verſanti maximi æſtus adſcribi ſolet, anſam præbuiſſe videtur, eſt modus æſtuum quantitates definiendi peculiaris ac ſatis perverſus; cùm enim crederent plerique obſervatores cauſis alienis tribuendam eſſe inæqualitatem, quæ inter binos æſtus ſucceſſivos intercedat, veram aquæ elevationem accuratiùs definire ſunt arbitrari, ſi ſumerent medium inter binos Fluxus ſucceſſivos. Quòd ſi autem hoc modo quique æſtus æſtimentur, tum utique maximi æſtus in æquinoctia incidere obſervabuntur, id quod etiam noſtræ theoriæ maximè eſt conforme, exceptis tantum regionibus polis vicinioribus. Cùm enim poſitis ſinu elevationis poli $= P$, coſinu $= p$, ſinu declinationis Lunæ $= Q$, coſinu $= q$, major æſtus fiat per ſpatium $\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq + \frac{PQ(1-8g)^2}{1-2g}\right)$, minor verò per ſpatium $=$

$\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq-\frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, §. 86.) erit per hunc æſtum Maris menſurandi modum quantitas æſtûs $= \frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right) = \frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2-p^2Q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right)$; ex quâ expreſſione perſpicitur maximos æſtus ubique, ſi quidem modo recenſito menſurentur, Lunæ in ipſo æquatore degenti reſpondere, niſi ſit $\frac{(1-8g)^2P^2}{(1-2g)^2} > p^2$, hoc eſt niſi tangens elevationis poli major ſit quàm $\frac{1-2g}{1-8g}$: his ſcilicet regionibus etiam Luna declinans ab æquatore majores æſtus producet. At ſi ponatur $g=\frac{2}{25}$, prodit elevatio poli, ubi regula prolata fallere incipit, 66°; ſin autem ponatur $g=\frac{1}{58}$, fit elevatio poli major quàm 58°; at poſito $g=\frac{1}{10}$, provenit poli elevatio 76°. Cùm igitur in locis polis tam vicinis obſervationes inſtitui non ſoleant, ſatis tutò affirmare licet, maximos æſtus menſtruos accidere circa æquinoctia, ſi quidem quantitas æſtûs quotidie menſuretur per medium arithmeticum inter ſpatia, quæ duo æſtus ſucceſſivi conficiunt.

§. 111. Quid nunc aliud de theoriâ noſtrâ ſit ſentiendum, niſi eam veram & genuinam æſtûs Maris cauſam, qualis ab Illuſtriſſima Academia Regia in propoſitâ quæſtione deſideratur, in ſe complecti, non videmus? Non ſolum enim omnia Phænomena, quæ in æſtu Maris obſervantur, clarè & diſtinctè explicavimus, ſed etiam exiſtentiam actualem earum virium, quibus hos effectus adſcribimus evidentiſſimè demonſtravimus; ex quo efficitur cauſam à nobis aſſignatam, non tantum omnibus Phænomenis ſatisfacere, ſed etiam eſſe unicam quæ cum verâ conſiſtere queat. Quòd ſi enim quiſpiam alias vires excogitet, quibus æquè omnia Phænomena explicare poſſet, etiamſi hoc fieri poſſe minimè concedamus, ejus certè explicatio ſubitò concideret & everteretur à viribus noſtræ theoriæ, quas aliunde in mundo exiſtere abundè conſtat; quoniam ab illis viribus imaginariis hiſque realibus conjunctim effectus duplicatus conſequi deberet, quem experientia averſatur. Nunc igitur nobis ſummo jure aſſerere poſſe videmur, veram æſtûs Maris cauſam in duobus vorticibus eſſe poſitam, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam agitetur, atque uterque ejus ſit indolis, ut vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris utriuſque vorticis: quæ proprietas obtinetur, ſi celeritas materiæ ſubtilis gyrantis in quoque vortice teneat rationem reciprocam ſubduplicatam diſtantiarum. Neque verò hi duo vortices ad libitum ſunt excogitati, ſed ille qui Solem circumdat eſt is ipſe, qui omnes planetas in ſuis orbitis continet; alter verò Lunam circumdans, etſi ejus vis niſi in æſtu Maris non ſentitur, tamen ſine ullâ hæſitatione admitti poteſt, cùm certò conſtet

Ter-

Terram; Jovem ac Saturnum ſimilibus vorticibus eſſe cinctos, unde ejuſmodi vortices nulli omnino corpori mundano denegari poſſe videntur. Parciùs quidem hîc materiam de vorticibus tractavimus, etiamſi in illis veram æſtûs Maris cauſam ponamus; hoc autem de induſtriâ fecimus, cùm hoc argumentum jam toties ſit tractatum ac ferè exhauſtum; neque nobis perſuadere poſſumus, ſi hâc occaſione doctrinam de vorticibus etiam meliùs, quam etiamnum à quoquam eſt factum, expediremus, ob eam rem præmium nobis tributum iri.

CAPUT OCTAVUM.

De Æſtûs Maris perturbatione à Terris ac littoribus oriundâ.

§. 112. PERVENIMUS tandem ad ultimam noſtræ diſquiſitionis partem, quæ præcipua eſt, in quâ Theoriam expoſitam ad ſtatum telluris, in quo reverâ reperitur, debito modo accommodabimus. Hactenus enim, quò ardua iſta diſquiſitio facilior redderetur, ab omnibus circumſtantiis externis quibus effectus à viribus Solis ac Lunæ oriundis vel turbari vel determinatu difficiliores reddi poſſent, cogitationem abſtraximus. Primò ſcilicet non ſolum totam Terram ex aquâ conflatam poſuimus, ſed etiam inertiam aquæ mente ſuſtulimus, ut eò pauciores res in computum ducendæ ſupereſſent. Deinde inertiæ quidem habuimus rationem, ac præcedentes determinationes debito modo correximus; verùm totam Terram aquâ undiquaque circumfuſam aſſumſimus, ſeu etiamnum anomalias à Terris neglexìmus. Nunc itaque noſtra theoria eò eſt perducta, ut nihil ampliùs adjicere neceſſe foret, ſi quidem æſtus Maris à Terris littoribuſque ſenſibiliter non afficeretur; niſi fortè anomaliæ quædam à ventis oriundæ commemorari deberent, quæ autem motu aquæ perſpecto facilè adjudicantur, atque ad omnes theorias æquè pertinent. Quamobrem ultimum hoc caput deſtinavimus explicationi Phænomenorum quorumdam ſingularium, quorum cauſa non tam in ipsâ aquâ viribuſque eam ſollicitantibus, quàm in Terrâ continenti littoribuſque eſt quærenda: hac enim parte abſolutâ nihil ampliùs reſtare videtur, quod vel ad Theoriæ noſtræ confirmationem, vel ad omnium Phænomenorum adæquatam explicationem deſiderari queat. Quamvis enim Illuſtriſſima Academia totum hoc argumentum non penitùs exhauriri jubeat, cùm adhuc nonnullas quæſtiones de eodem in poſterum proponere conſtituiſſet, tamen quia hoc tempore vera cauſa phyſica deſideratur, veritatem noſtræ theoriæ non ſatis confirmari arbitramur, niſi ejus convenientiam cum omnibus Phænomenis dilucidè oſtenderemus, cùm ſi vel uni-

unicum Phænomenon refragaretur, eo ipso tota theoria subverteretur; quam ob causam prolixitatem nostræ tractationis, atque transgressionem limitum præscriptorum nobis sine difficultate condonatum iri confidimus.

§. 113. Primùm autem perspicuum est motum Maris horizontalem quo vel versùs orientem vel occidentem progreditur, ob Terram interpositam non solum perturbari, verùm etiam quandoque prorsus impediri debere. Suprà enim ostendimus, si tota Terra aquâ esset circumfusa, tum ubique ad Fluxum formandum aquam ab oriente advehi debere, ante refluxum autem versùs ortum defluere. Quòd si ergo Oceanus versùs orientem Terris terminetur, fieri omnino nequit tempore Fluxûs ad hæc littora aqua ab oriente affluat, quo ipso cursus aquæ naturalis penitùs impedietur. Quoniam autem vires Solis ac Lunæ nihilominùs his in regionibus Mare attollere conantur, effectum consequi non poterunt, nisi aqua ab Occidente afferatur: sic quando ad littora Europæ aqua à viribus Solis ac Lunæ elevatur, aqua ab Occidente eò deferatur necesse est, ab iis scilicet regionibus, ubi aqua eodem tempore deprimetur; quod idem fieri debet ad littora Africæ & Americæ occidentalia. Contrà verò ad littora Asiæ & Americæ orientalia aqua naturali motu feretur, atque in Fluxu ab oriente adveniet, in Refluxu verò versùs orientem recedet. Vires namque Solis ac Lunæ motum aquæ horizontalem non per se determinant, sed eâtenus tantum, quâtenus aliis in locis aquam attollunt, aliis verò eodem tempore deprimunt; atque aqua ob propriam gravitatem eum seligit motum, quo facillimè à locis quibus deprimitur, ad loca quibus attollitur promoveatur: quamobrem iste motus maximè à Terris oceanum includentibus determinetur necesse est. Hinc igitur perspectâ positione littorum cujusvis Maris facilè definiri poterit, à quanam plagâ aqua in Fluxu venire, quorsumque in Refluxu decedere debeat, si modò elevationes & depressiones aquæ per totum Mare attentè considerentur: tota enim hæc quæstio pertinebit ad hydrostaticam.

§. 114. Cùm igitur ad littora Europæ aqua elevari nequeat, nisi affluxus ab occidente fiat copiosus, ad littora quæ versùs occidentem respiciunt aqua directè ab occidente adveniet, quæ autem littora ad aliam plagam sunt disposita, aquæ cursus versùs orientem directus inflectetur juxta littora, priusquam eò pertingat, omnino uti inspectio mapparum docebit. Quoniam verò iste aquæ juxta littora Fluxus tantam celeritatem, quantam habet Luna, recipere nequit, necesse est, ut Fluxus ad littora magis ad orientem sita tardiùs advehatur. Hæc autem versùs littora orientaliora retardatio maximè perspicua est in portubus Galliæ, Belgii, Angliæ & Hiberniæ; cùm enim ad ostia fluviorum Garumnæ & Ligeris, quæ versùs Oceanum amplissimum patent, tempore pleniluniorum

niorum ac noviluniorum Fluxus adveniunt horâ tertiâ pomeridianâ, quæ retardatio naturalis censeri potest, neque littoribus adhuc turbata; hinc aqua demum ad littora Britanniæ minoris ac Normanniæ progreditur; atque idcirco his in regionibus Fluxus tardiùs evenire observantur. Sic ad Portum S. Malo tempore syzygiarum Fluxus demum horâ sextâ sequitur, ad ostia verò Sequanæ usque ad horam nonam retardatur: atque ita porro retardatio augetur, donec tandem in freto Gallico Dunkerquæ & Ostendæ mediâ nocte incidat. Ex hac verò retardatione innotescit celeritas aquæ, quâ juxta littora progreditur, eaque tanta deprehenditur quâ unâ horâ spatium circiter (†) 8. milliarium conficiat. Denique aqua tantam fere viam absolvere debet usque ad Dublinum, quantam ad fretum Gallicum, ex quo Fluxus etiam Dublini horâ circiter decimâ pomeridianâ observari solet. Atque simili modo retardatio Fluxuum ad littora aliarum regionum sine ullâ difficultate explicari poterit.

§. 115. Quod autem ad quantitatem æstûs Maris ad littora attinet; facilè intelligitur æstum Maris ad littora majorem esse debere, quàm in medio mari. Primò enim aqua cum impetu ad littora allidit, ex quo allapsu solo jam intumescentia oriri debet. Deinde quoniam aqua eâdem celeritate, quam habebat Oceano, ubi maxima est profunditas, progredi conatur, ad littora locaque vadosa vehementer inturgescet, tantum enim fere aquæ ad littora affertur, quantum sufficeret ad spatium, quod Terra occupat, inundandum. Tertiò iste aquæ affluxus in sinibus vadosis multò adhuc magis increscere debet, eò quòd aqua his in locis jam multum appulsa ad latera diffluere nequit, si quidem sinus directè versùs eam plagam pateat, unde aqua advehitur. Ex his igitur non solum ratio patet, cur aqua fere ubique ad littora ad multo majorem altitudinem elevetur, quàm in medio Mari, sed etiam cur Bristolii tam enormis Fluxus circa syzygias luminarium observetur; cùm enim in hâc regione littus sit valdè sinuosum ac vadosum, aqua maximâ vi appellitur, neque ob sinuositatem tam citò diffluere potest. Atque ex his principiis non erit difficile rationem inconsuetorum æstuum, qui passim in variis portubus animadvertuntur, indicare atque explicare; quamobrem hujus generis Phænomenis explicandis diutiùs non immoramur, cùm consideratio littorum & Fluxûs aquæ eò sponte quasi manuducat.

§. 116. Quamvis autem tam Affluxus aquæ ex Oceano Atlantico, quàm Refluxus per fretum Galliam ab Anglia dirimens, ingenti fiat celerita-

(†) Ita legitur in exemplari Parisino, procul dubio mendosè, sed locum restituere non sumus ausi; ab ostio Garumnæ ad Dublinum quingenta circiter Italica milliaria numerantur via rectissima, quæ horis 7 à fluxu percurruntur qui ideo 70 milliaria singulis horis ad minimum emetiretur, unde 80 milliaria pro 8 milliaribus scribenda conjectamur.

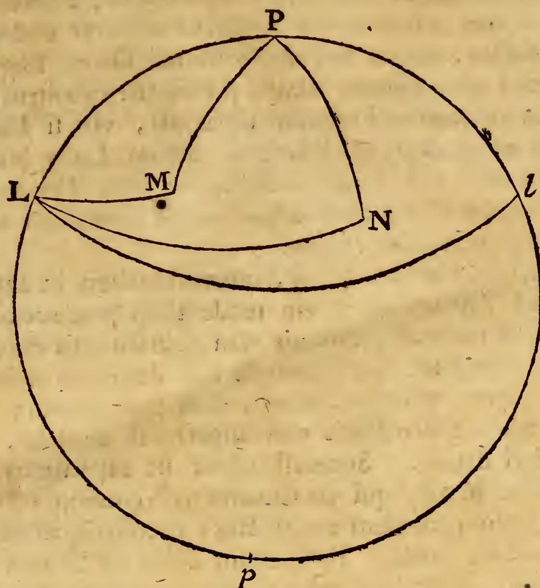
leritate, tamen cùm versùs Belgium fœderatum Mare mox vehementer dilatetur, ab isto alterno Fluxu ac Refluxu altitudo Maris in Oceano Germanico sensibiliter mutari nequit. Atque hanc ob causam statui oportet, in hoc Mari æstum proficisci maximam partem ab affluxu & refluxu aquæ circa Scotiam, ubi communicatio hujus Maris cum Oceano Atlantico multo major patet; quam sententiam magnopere confirmat ingens æstuum retardatio ad littora Belgii & Angliæ orientalia observata, ad Ostia scilicet Thamisis pertingit Fluxus elapsis jam duodecim horis post transitum Lunæ per meridianum, atque Londinum usque tribus ferè horis tardiùs defertur; quod Phænomenon consistere non posset si aqua per fretum Gallicum solùm moveretur, cùm jam in ipso freto duodecim horis retardetur Fluxus. Interim tamen negari non potest quin communicatio Maris Germanici cum Oceano Atlantico per fretum Gallicum æstum quoadmmodo afficiat, atque Fluxum qui circa Scotiam advehitur vel adjuvet vel turbet, prout hi ambo motus ad Mare elevandum ac deprimendum vel magis inter se conspirent vel minus. Simul autem hinc intelligitur æstum Maris ex Oceano Atlantico neque cum Mari Mediterraneo neque cum Mari Baltico communicari posse, cùm intervallo sex horarum per freta Herculea & Oresundica tantum aquæ in hæc maria neque affluere queat neque inde reffluere, ut sensibilis mutatio in altitudine aquæ oriri queat. Quamobrem in istiusmodi maribus quæ à vasto Oceano tantum angustis fretis separantur, æstus omnino nullus contingere potest, nisi forte talia maria Terris inclusa ipsa tam sint ampla, ut vires Solis ac Lunæ æstum peculiarem in iis producere queant; quâ de re mox videbimus.

§. 117. Quemadmodum autem vidimus in Mari Germanico duplicem æstum, quorum alter, qui quidem longè est minor, per fretum Gallicum, alter circa Scotiam advehitur ex eodem Oceano Atlantico: ita propter singularem littorum quorumdam situm mirabilia Phænomena in æstu Maris evenire possunt. Quòd si enim littus quodpiam ita fuerit comparatum, ut æstus in id duplici viâ vel ex eodem Oceano, vel ex diversis communicetur, ratione temporis, quo bini isti æstus adveniunt insignes discrepantiæ oriri poterunt. Nam si per utramque viam Fluxus eodem tempore advehatur, atque adeo simul Refluxus congruant, æstus multo majores existere debebunt. Sin autem eo tempore, quo per alteram viam Fluxus advenit, ex alterâ viâ Refluxus incidat, tum æstus omnino destruetur si quidem per utramque viam aqua æquali vel affluat vel defluat. Ad hoc verò non sufficit ambæ viæ sint æquales, sed etiam requiritur ut bini æstus successivi sint æquales, id quod evenit si Luna vel non habeat declinationem, vel littus in æquatore fuerit positum. Quòd si autem eadem duplici communicatione positâ, tam Luna habeat declinationem, quàm littus notabiliter ab æquatore sit motum, tum ob inæ-

inæqualitatem binorum æstuum sese insequentium, Fluxus majores ex alterâ viâ advenientes, superabunt Refluxus minores eodem tempore per alteram viam factos, atque hoc modo in tali littore singulis diebus non bini Fluxus, sed unus tantum accidet; hancque rationem allegat Newtonus æstûs illius singularis Tunquini observati, ubi si Luna in æquatore versatur nullus æstus deprehenditur, sin autem Luna habeat declinationem unicus tantum unâ Lunæ revolutione circa Terram. Nos autem mox hujus mirabilis Phænomeni aliam magis naturalem nostræque theoriæ conformem indicabimus causam.

§. 118. Hactenus æstum Maris, quemadmodum in amplissimo Oceano à viribus ad Lunam ac Solem tendentibus producatur, atque vario littorum situ cùm ratione quantitatis tùm retardationis diversimodè turbetur, sumus contemplati, neque necesse esse duximus ventorum Marisque cursuum propriorum rationem habere, cùm satis pronum sit perspicere, quomodo his rebus æstus Maris tam augeri vel diminui, quàm accelerari vel retardari debeat. Superest igitur ut exponamus, quomodo in satis amplo tractu Maris, qui ab Oceano vel omnino est sejunctus, vel per angustum tantum canalem conjunctus, peculiaris æstus à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Perspicuum enim est si talis tractus secundùm longitudinem ultra 90 gradus pateat, æstum pari modo generari debere, ac in amplissimo Oceano, qui totam tellurem ambire ponitur. Nam quoniam extensio tanta est, ut vires Lunæ & Solis in eo tractu simul maximam ac minimam aquæ altitudinem inducere queant, necesse est etiam, ut aqua alio in loco tantum elevetur, inque alio tantum deprimatur, quantum fieret, si iste tractus omnino non esset terminatus. At si iste tractus tam fuerit parvus ut singulæ partes æqualibus fere viribus simul vel attollantur vel deprimantur, nulla sensibilis mutatio oriri poterit. Aqua enim uno in loco attolli nequit nisi in alio subsidat & contrà, si quidem eadem aquæ copia in eo tractu perpetuò conservetur. Atque hæc est ratio ut in Mari Baltico, Caspio, Nigro, aliisque minoribus lacubus nullus omnino æstus deprehendatur.

§. 119. Quòd si autem istiusmodi Maris tractus tantum spatium occupet, ut vires attollentes & deprimentes in extremitatibus sensibiliter differant, tum necesse est ut non solum aqua in altero extremo elevetur in alteroque deprimatur, sed etiam ut differentia inter aquæ altitudines tanta sit, quanta in aperto Oceano eidem virium differentiæ respondet. Quamobrem definiri conveniet, quanta in diversis Terræ locis eodem tempore in altitudinibus aquæ à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Ne autem calculus nimium fiat prolixus, solam Lunæ vim in computum ducemus, quippe quæ vim Solis multum excedit; & quoniam effectu Lunæ cognito facile est Solis effectum æstimando vel adjicere vel auferre.



Repræsentet ergo $PLpl$ superficiem Terræ cujus poli sint P & p, atque M & N sint duo termini in eodem Maris tractu assumti, in quibus quantum Maris altitudo quovis tempore differat, sit investigandum. Repræsentet porro Ll parallelum, in quo Luna moveatur hoc tempore; sitque Luna in L; atque exprimet angulus LPM tempus, quod post Lunæ transitum per meridianum termini M est præterlapsum, angulus verò LPN tempus post transitum Lunæ per meridianum alterius termini N. Ductis autem circulis maximis PM & PN, erit arcus PM complementum latitudinis loci M, arcus PN verò loci N; angulus verò MPN dabit differentiam longitudinis locorum M & N; quæ proinde omnia ponuntur cognita.

§. 120. Ducantur jam ex loco Lunæ L ad terminos M & N circuli maximi LM & LN, exhibebuntque isti arcus complementa altitudinum, quibus hoc tempore Luna in locis M & N supra horizontem elevata conspicitur. Ponatur arcûs PL sinus $= q$, cosinus $= Q$, erit Q sinus declinationis borealis Lunæ, si quidem Q habeat valorem affirmativum, ac P polum borealem denotet. Deinde ponatur arcûs PM sinus $= p$, cosinus $= P$, erit P sinus elevationis poli pro loco M; similique modo sit arcûs PN sinus $= r$ & cosinus $= R$, ita ut R sit sinus elevationis poli loci N: denique sit anguli MPN sinus $= M$ & cosinus $= m$, anguli verò LPM sinus $= T$, cosinus $= t$; unde erit anguli LPN cosinus $= mt - MT$.

Ex

Ex his per trigonometriam sphæricam reperietur sinus altitudinis Lunæ supra horizontem loci M seu cosinus arcûs $LM = tpq + QP$: pro loco N verò erit altitudinis Lunæ sinus $= (mt - MT)\,qr + QR$. Quare si, ut suprà, vis absoluta ad Lunam urgens ponatur $= L$ & distantia Lunæ à Terra $= b$, erit altitudo ad quam aqua in M elevari deberet $= \frac{L(3(tpq + PQ)^2 - 1)}{2b^3}$, & altitudo ad quam aqua in N elevari deberet $= \frac{L(3((mt - MT)qr + QR)^2 - 1)}{2b^3}$, utroque casu supra libellam naturalem. Si ergo illa expressio hanc excedat, aqua in M altiùs erit elevata quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((tpq + PQ)^2 - ((mt - MT)qr + QR)^2)$, hæcque expressio, quando fiet negativa, indicabit, quantò aqua in N altiùs consistat quàm in M. In hoc verò negotio inertiam aquæ negligimus, quoniam tantum proximè Phænomena hujusmodi casibus oriunda indicare annitimur; si enim hanc materiam perfectè evolvere vellemus, integro tractatu foret opus.

§. 121. Ponamus tractum nostrum Maris ab oriente N versùs occidentem M sub eodem parallelo extendi, ita ut elevatio poli in locis M & N sit eadem; erit adeo $R = P$, & $r = p$. Transeat nunc Luna per meridianum loci M supra Terram ita ut sit $T = 0$, $t = 1$; hoc ergo tempore magis erit elevata in M quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((pq + PQ)^2 - (mpq + PQ)^2) = \frac{3L}{2b^3}(M^2p^2q^2 + 2(1 - m)pqPQ)$. At quando Luna per meridianum loci N supra Terram transit, aqua tantundem magis erit elevata in N quàm in M. Ex quo sequitur, dum Luna à meridiano loci N ad meridianum loci M progreditur, aquam in M sensim elevari per spatium $\frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq + 2(1 - m)PQ)$ interea verò in N tantundem subsidere. Sin autem Luna infra Terram à meridiano loci N ad meridianum loci M progrediatur, aqua in M elevabitur interea per spatium $= \frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq - 2(1 - m)PQ)$, per tantumque spatium aqua in N subsidet. Ponamus nunc angulum LPM esse 90 graduum, seu quæstionem institui, cùm Luna jam ante sex horas meridianum loci M sit transgressa, atque obtinebitur differentia inter aquæ altitudines in locis M & $N = \frac{3L}{2b^3}(P^2Q^2 - (PQ - Mpq)) = \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ - M^2pq)$. Sex autem horis, antequam Luna ad meridianum loci M appellit, aqua in N magis erit elevata quàm in M intervallo $= \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ + M^2pq)$. Sequuntur hæc si inertia aquæ negligatur; at inertiâ admissâ ex præcedentibus satis clarum est, cùm has differentias majores esse debere, tùm tempora mutationum tardiùs sequi debere.

§. 122. Quoniam verò in hoc Maris tractu perpetuò eadem aquæ quantitas contineri debet, necesse ut quantùm aquæ unâ parte supra libellam attollatur, tantundem ea in reliquâ parte infra libellam deprimatur. Quò igitur hinc altitudinem Maris quovis loco exactè determinemus, ponamus tractum nostrum secundùm longitudinem terminari binis meridianis PM & PN, secundùm latitudinem verò binis parallelis MN & mn, positâque Lunâ in L sit sinus $PL = q$, cosinus $= Q$; sinus $LPM = T$, cosinus $= t$. Porro sit sinus arcus $PM = p$, cosinus $= P$, sinus $Pm = r$, cosinus $= R$, atque anguli MPN sinus $= M$ & cosinus $= m$. Præterea sit elevatio in M dum Luna in L versatur, supra libellam $= \alpha$, ita ut hoc loco suprema aquæ superficies à centro Terræ distet intervallo $= 1 + \alpha$, unde cùm sinus altitudinis Lunæ in M sit $= tpq + PQ$; erit gravitatio totius columnæ aqueæ ab M ad centrum Terræ $=$
$$\frac{(1+\alpha)^{n+1}}{n+1} + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3} = \frac{1}{1+n} + \alpha + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3},$$
prouti suprà §. §. 43. & 44. demonstravimus. Consideretur jam locus quicunque X in nostro tractu, in quo aqua supra libellam sit elevata spatio $= \phi$; ac ducto per hunc locum meridiano PR, sit anguli LPR sinus $= X$, cosinus $= x$; arcûs PX sinus $= z$ & cosinus $= Z$, unde gravitatio columnæ aqueæ ex X ad centrum Terræ pertingentis erit $=$

I

$\frac{1}{1+n}+\phi+\frac{L(1-3(xqz+QZ)^2)}{2b^3}$. Cùm igitur hæc gravitatio æqualis eſſe debeat illi, orietur $\phi=\alpha+\frac{3L}{2b^3}((xqz+QZ)^2-(tpq+PQ)^2)$, ex quâ formulâ ſi modò conſtaret elevatio aquæ in M, ſimul innoteſceret elevatio vel depreſſio in quovis loco X.

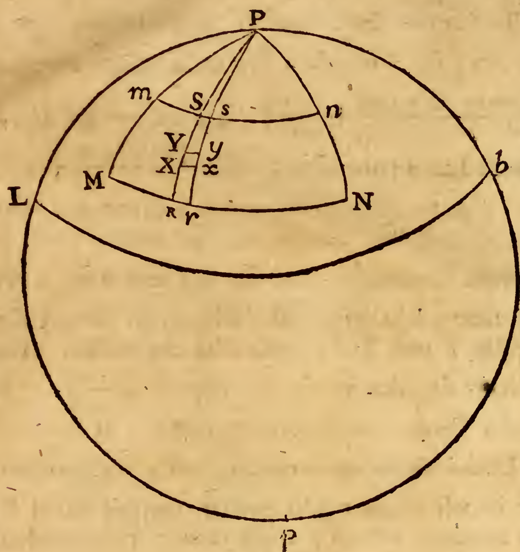
§. 123. Cùm ergo in X aqua ſupra libellam elevetur ſpatio ϕ; in elemento tractûs infinitè parvo $XYyx$, plus inerit aquæ, quàm in ſtatu naturali, & quidem quantitas $XY.\ Xx.\phi$, cujus elementi integrale per totum tractum ſumtum debet eſſe $=0$, ex quo valor ipſius α innoteſcet. Erit autem angulus $RPr=\frac{dY}{x}$, hincque arculus $Xx=\frac{z\,dX}{x}$, at elementum $XY=\frac{dZ}{z}$, ex quo infinitè parvum rectangulum $XYyx=\frac{dXdZ}{x}$, in quo ergo exceſſus aquæ ſupra ſtatum naturalem eſt $=\frac{\phi\,dXdZ}{x}=\frac{dX}{x}(\alpha dZ+\frac{3L\,dZ}{2b^3}((xqz+QZ)^2-(tpq+PQ)^2))$, quæ formula bis debet integrari. Ponatur primò X conſtans, & integratione abſolutâ reperietur in elemento $RSsr$ exceſſus aquæ ſupra ſtatum naturalem $=\frac{dX}{x}(\alpha(R-P)+\frac{3L}{2b^3}(q^2x^2(R-P)-\frac{x^2q^2}{3}(R^3-P^3)-\frac{2xQq}{3}(r^3-p^3)+\frac{Q^2}{3}(R^3-P^3)-(tpq+PQ)^2(R-P)))$. Integretur hæc formula denuo ut integrale ad totum tractum $MNnm$ extendatur, prodibitque incrementum aquæ, quod toti tractui acceſſiſſe oporteret, $=\alpha(R-P)A\text{ ſin. }M+\frac{3L}{2b^3}(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(Mm(1-2TT)-2M^2Tt)+\frac{2Qq(r^3-p^3)}{3}(T-Mt-mT)+\frac{q^2(R-P)}{2}A\text{ ſin. }M+\frac{(3Q^2-1)(R^3-P^3)}{6}A\text{ ſin. }M-(tpq+PQ)^2(R-P)A\text{ ſin. }M)$, quæ adeo quantitas debet eſſe $=0$: unde oritur $\alpha=\frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3}+\frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3}-\frac{3Lq^2}{4b^3}+\frac{3L}{2b^3(R-P)A\text{ ſin. }M}(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt-Mm(1-2TT))+\frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T-Mt-mT))$.

§. 124. Cognitâ igitur verâ elevatione aquæ in M ſupra libellam, quam antè poſuimus $=\alpha$, hinc intelligetur vera aquæ elevatio ſupra libellam in loco quocunque X. Ponatur enim ſinus anguli $MPX=S$ & coſinus $=s$, erit ſin. $LPR=X=Ts+tS$ & $x=ts-TS$, manentibusque arcûs PX ſinu $=z$ & coſinu $=Z$, erit elevatio aquæ in $X=\phi=\alpha+\frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz+QZ)^2-\frac{3L}{2b^3}(tpq+PQ)^2$; quare loco α valore invento ſubſtituto, reperietur aqua in X ſupra libellam attolli actu per ſpa-

spatium $= \frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz+QZ)^2 + \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3}$ $- \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A\,sin.\,M}\left(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt-Mm\right.$ $\left.(1-2TT)) + \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T-Mt-mT)\right)$. Quòd si ergo ponatur tractus noster ita augeri ut totam tellurem ambiat, orietur casus jam suprà tractatus; quoniam enim fit $MN = 360°$, seu A sin. $M = 2\pi$ denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $M = 0$ & $m = 1$: præterea verò quia M in polum australem p, m verò in borealem P incidit, erit $p = 0$, $P = -1$, $r = 0$ & $R = +1$: si hi valores substituantur, prodibit elevatio aquæ in $X = \frac{L}{2b^3}(3((ts-TS)qz+QZ)^2-1)$, quæ, expressio, quia $ts-TS$ denotat cosinum anguli LPX atque $(ts-TS)qz+QZ$ sinum altitudinis Lunæ supra horizontem in X, cum superioribus formulis exactissimè convenit: si quidem terminus $\frac{L}{b^4}$ negligatur. Hæc verò eadem ipsa expressio quoque emergit, si tantum alterum hemisphærium vel boreale vel australe ponatur aquâ totum circumfusum, manent enim omnia ut antè, nisi quòd fiat $p = 1$ & $P = 0$: utroque enim casu fit $R^2+PR+P^2 = 1$; ultimusque terminus ob $M = 0$ utroque casu evanescit.

§. 125. Ponamus nunc tractum Maris secundùm longitudinem MN usque ad 180 gradus extendi, erit $M = 0$ & $m = -1$ & A sin. $M = \pi$, denotat enim A sin. M semper arcum circuli, qui mensura est anguli MPN: hinc si brevitatis gratiâ ponatur sinus anguli, quo Luna in X supra horizontem elevata apparet, $= v$, erit aquæ elevatio in X supra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{L(1-3QQ)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lqq}{4b^3} + \frac{2LTQq(p^3-r^3)}{(R-P)b^3\pi}$. Ponamus porro integrum hemisphærium $LPlp$ aquâ esse circumfusum, fiet $p = 0$, $P = -1$, $r = 0$ & $R = 1$; unde elevatio aquæ in X erit $= \frac{L(3v^2-1)}{2b^3}$, omnino ac si tota Terra aquâ cincta esset, uti in præcedentibus capitibus posuimus, vel quod eodem redit, dummodo omnis aqua super Terra mutuam habeat communicationem satis amplam. Quòd si autem tractus noster Maris tantum ad æquatorem usque porrigatur à polo P, ita ut quartam superficiei terrestris partem solum obtegat, tum erit $p = 1$, $P = 0$, $r = 0$ & $R = 1$, hoc itaque casu aqua in X elevabitur ad altitudinem $= \frac{L(3v^2-1)}{2b^3} + \frac{2LTQq}{\pi b^3}$: ex quo perspicitur hoc casu elevationem in X majorem, quàm si tota Terra aquâ esset circumdata, si expressio TQq habeat valorem affirmativum, minorem verò si TQq habeat valorem negativum. Sed limites huic quæstioni præscripti non permittunt hinc plura consectaria deducere, cùm debita evolutio satis amplum tractatum requirat,

quirat, neque theoria ulteriori confirmatione indigeat. Quocirca coronidis loco duos tantum casus evolvemus, quorum altero latitudo tractûs ponetur infinitè parva, altero verò longitudo: quippe qui ad phænomena quædam singularia explicanda inservire poterunt.



§. 126. Ponamus igitur latitudinem Mm infinitè esse parvam, seu $R = P$ & $r = p$, reperietur aquæ in X elevatio supra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{3L(P^2 - q^2 - 3P^2Q^2)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,\text{sin.}\,M}\left(\frac{pq}{2}(2M^2Tt - Mm(1 - 2TT)) + 2PQ(T - Mt - mT)\right)$. Consideremus autem elevationem in M, ubi cùm sit $v = tpq + PQ$, erit ea $= \frac{3Lpq(2ttpq + 4tPQ - pq)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{sin.}\,M}(pq(2M^2Tt - Mm(1 - 2TT)) + 4PQ(T - Mt - mT))$. Transeat nunc Luna per meridianum loci M supra Terram, erit $T = 0$, & $t = 1$, atque elevatio in M prodibit $= \frac{3Lpq(pq + 4PQ)}{4b^3} \quad \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{sin.}\,M}(Mmpq + 4MPQ)$; at si per eundem meridianum infra Terram transeat, erit aquæ elevatio $= \frac{3Lpq(pq - 4PQ)}{4b^3} - \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{sin.}\,M}(Mmpq - 4MPQ)$. Quòd si autem Luna versùs ortum à meridiano distet angulo horario 90 graduum, seu circiter 6 horis ante appulsum Lunæ ad meridianum in M superio-

periorem, erit $T = -1$ & $t = 0$, unde elevatio erit $= \frac{-3Lp^2q^2}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,\text{ſin.}\,M}$. $(pqMm - 2PQ(1-m))$; ſex verò horis poſt tranſitum Lunæ per meridianum loci M versùs occaſum, erit altitudo aquæ in M ſupra libellam $= -\frac{3Lp^2q^2}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,\text{ſin.}\,M}(2pqMm - 2PQ(1+m))$.

§. 127. Tribuamus huic tractui longitudinem 90 graduum, ut ſit $M = 1$, $m = 0$, & A ſin. $M = \frac{\pi}{2}$, unde oritur elevatio aquæ in $M = \frac{3Lpq(2ttpq + 4tPQ - pq)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2\pi b^3}(2pqTt + 4PQ(T-t))$. Quæ ſi etiam declinatio Lunæ ponatur $= 0$, fiet $= \frac{3Lp^2q^2(2tt-1)}{4b^3} + \frac{3Lp^2q^2Tt}{\pi b^3}$ exiſtente $q = 1$, unde apparet maximam elevationem non accidere cùm Luna per meridianum loci M tranſit, ſed tardiùs, & quidem ſi dupli anguli LPM ſinus fuerit $= \frac{2}{\pi}$, hoc eſt ferè unâ horâ poſt tranſitum Lunæ per meridianum, hoc igitur caſu Fluxus in M unâ ferè horâ tardiùs obſervetur, quàm ſi tota Terra aquâ eſſet circumfuſa. Dum autem Luna per meridianum ſuperius tranſit, erit elevatio $= \frac{3Lpp}{4b^3}$, quæ etiam valet ſi Luna infra Terram meridianum attingat; at ſex horis vel antè vel poſt, quando Luna in horizonte verſatur, erit aquæ depreſſio $= \frac{-3Lpp}{4b^3}$. Unde intelligitur in tali Maris tractu pariter quotidie binos Fluxus totidemque Refluxus accidere debere, atque æſtum propemodùm fore ſimilem æſtui generali, niſi quòd majoribus anomaliis ſit obnoxius, præcipuè ſi Luna habeat declinationem.

§. 128. Hinc explicari poteſt ratio æſtûs, qui in Mari Mediterraneo obſervatur, & qui in ipſo hoc Mari generatur. Cùm enim longitudo hujus Maris ne 60 quidem gradus attingat, æſtus erunt multò minores; decreſcunt enim ſi cùm longitudo diminuatur, tum elevatio poli augeatur. Quòd ſi ergo in his formulis angulus MPN ponatur fere 60 graduum, atque elevatio poli debita introducatur, reperientur quidem æſtus bini quotidie evenire debere, qui autem futuri ſint multò minores, quàm in medio Mari, & pluribus anomaliis ſubjecti, quas quidem omnes ex formulis definire licebit. Quoniam ergo tam exigui æſtus à ventis & curſu aquæ, qui in hoc Mari notabilis deprehenditur, vehementer turbantur, ad pleraque Littora hujus Maris vix uſquam æſtus regularis obſervabitur. Excipi autem debet Mare Adriaticum, quod cùm ſinum formet amplum, advenientem aquam meliùs colliget, atque elevationem multò ſenſibiliorem parietur, à quo æſtus Maris Venetiis obſervatus originem habet. Tametſi enim Mare Mediterraneum non ſolum,

lum ſatis amplam habeat latitudinem, ſed etiam vehementer inæqualem, tamen ejuſmodi marium æſtus admodum exquiſitè ex præſenti caſu, quo latitudinem omnino negligimus, colligi poteſt, quia extenſio Maris in longitudinem præcipuam cauſam æſtuum binorum ſingulis diebus evenientium continet, neque extenſio latitudinis multum conferat.

§. 129. Ponamus nunc tractûs noſtri Maris longitudinem evaneſcere, totumque tractum in eodem meridiano Pp ab M uſque ad N extendi, ita ut ſit $M = 0$, $m = 1$; ſinus autem elevationis poli in M ſit $= P$, coſinus $= p$, in N verò ſit ſinus elevationis poli $= R$, coſinus $= r$. Ex his ſi Luna in L verſetur, ob A ſin. $M = M$, erit in M elevatio aquæ ſupra libellam $= \frac{3L(tpq + PQ)^2}{2b^3} + \frac{L(1 - 3Q^2)(P^2 + PR + R^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{L}{4b^3} (q^2(3 - P^2 - PR - RR)(2TT - 1) - \frac{4Qqt(p^3 - r^3)}{R - P}) = \frac{L}{2b^3}((ttqq - QQ)(R^2 + PR - 2P^2) + \frac{2Qqt(3PpR + r^3 - 3P^2p - p^3)}{R - P}$. Quòd ſi nunc ponatur alter terminus N ultra æquatorem versùs auſtrum ſitus, ita ut ſinus elevationis poli auſtralis in N duplo major ſit quàm ſinus elevationis borealis in M, ſeu $R = -2P$ & $r = \surd(1 - 4P^2)$, erit $R^2 + PR - 2P^2 = 0$, atque elevatio aquæ in M ſupra libellam erit $= \frac{LQqt}{3b^3P}$

$(9P^2p+p^3-r^3)$. Ex hâc igitur formulâ ſequitur, ſi Lunæ declinatio ſit nulla ſeu $Q=0$, tum nullum omnino æſtum in M obſervari debere. Quòd ſi autem Luna habeat borealem, tum ad tranſitum Lunæ per meridianum ſuperiorem aquam attolli ad ſpatium $=\frac{LQq}{2b^3p}(9P^2p+p^3-r^3)$; at dum Luna in alterutro circulo horario ſexto verſetur, tum aquam ad libellam naturalem fore conſtitutam; Lunâ autem infra horizontem ad meridianum appellente, aquam infra libellam depreſſum iri per ſpatium $=\frac{LQq}{2b^3p}(9P^2p+p^3-r^3)$; contrarium denique fore æſtum, ſi Luna habeat declinationem auſtralem. In tali igitur Maris tractu quotidie ſemel tantum aqua affluet, ſemelque refluet, ſi quidem Luna habeat declinationem; nam ſi Luna æquatorem occupat, æſtus omnino erit nullus.

§. 130. Ex hoc caſu aptiſſimè explicari poſſe videtur Phænomenon illud æſtûs ſingularis, qui in portu Tunquini ad Batsham obſervatur, ubi omninò ut in præſente caſu dum Luna in æquatore verſatur, Mare nullum æſtum ſentit, at dum Luna removetur ab æquatore vel versùs boream vel versùs auſtrum, quotidie aqua ſemel tantum affluit ſemelque refluit, prorſus ut calculus monſtravit; ſcilicet ſi Lunæ declinatio fuerit borealis, aqua versùs Lunæ occaſum, hoc eſt poſt tranſitum Lunæ per meridianum ſuper horizonte, affluit, versùs ortum verò defluit, quæ retardatio ab inertiâ aquæ & motu ad littora provenire intelligitur ut ſuprà. Contrà verò ſi Lunæ declinatio ſit auſtralis, aqua deprimitur Lunâ ad occaſum inclinante, Lunâ autem oriente, attollitur: quæ Phænomena apprimè conveniunt cum caſu modò expoſito. Eſt præterea elevatio poli Tunquini 20°, 50′, borealis, atque Mare utrinque cùm peninſulis tùm inſulis ab utroque Oceano Pacifico & Indico fere prorſus ſeparatur, ſaltem ut libera communicatio non adſit: præterea hic idem Maris tractus, qui versùs boream ad littora regni Tunquini terminatur extenditur ultra æquatorem ad gradus circiter 45, cujus latitudinis ſinus circiter duplo major eſt, quàm ſinus latitudinis borealis 20°, 51′: Quocirca ex his circumſtantiis per noſtram Theoriam eadem ipſa ſingularia Phænomena æſtûs Maris obſervari debent, quæ actu obſervantur: atque hoc modo ſi ullum adhuc dubium circa noſtram theoriam reliquum fuiſſet, id reſolutione hujus mirabilis Phænomeni funditùs ſublatum iri confidimus.

FINIS I. Part. TOMI III.









EX BIBLIOTECA
D. A. de VLLOA



PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUTORE ISAACO NEWTONO Eq. Aurato.

TOMI TERTII CONTINUATIO,

CONTINENS

LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

INTRODUCTIO AD LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

TRia ſunt in Lunæ Theoriâ ſpectanda, in quibus verſatur omnis quæſtio Aſtronomica quæ de ipſâ inſtitui poteſt; Primum ejus motus quâtenus è terrâ obſervatur; 2do. Figura Lunaris orbitæ à circulo plùs minuſve recedens & apſidum ejus poſitio; ac tertiò ejus orbitæ ad Eclipticam inclinatio.

Si extrà Solis actionem Luna motus ſuos ageret; Luna Ellipſim quamlibet circa Terram deſcribere poſſet in Plano quovis, & ea Ellipſis perpetuò eadem maneret conſtantemque angulum cum Ecliptica efficeret; Itaque tota Theoria Lunæ circa hæc verſaretur Elementa, Primò, ut ex tempore quod Luna conſumeret ut à quâdam ſtellâ diſcedens ad eamdem rediret, obtineatur duratio ejus menſis Periodici ſiderei ſicque motus ejus medius determinetur, unde facile obtinebitur via quam Luna dato tempore per eum motum medium emetiri poteſt, ita ut, datâ Epochâ, hoc eſt, dato loco Cœli in quo Luna aliquando obſervata fuiſſet, inde quem in locum migrare debuiſſet, dato tempore, per medii motus calculum inveniri poſſet.

Poſtea; locus Apogæi Lunæ, quod in Cœlis eidem puncto ſemper reſponderet, foret requirendus, tum excentricitas ejus orbitæ; ſic enim figura Ellipſeos quam Luna deſcribit obtineretur, & quia, citra Solis actionem, Luna moveretur ſecundùm Legem Keplerianam, hoc eſt, ita ut tempora quibus durantibus Luna moveretur, non quidem ſint proportionalia angulis è Terrâ ſpectatis, ſed areis deſcriptis, hinc fiet ut differentia loci Lunæ per motum medium computati ab ejus loco vero, obtineatur ex orbitæ Lunaris figurâ per Methodos notas, quæ differentia dicitur Æquatio Lunæ ſoluta, hoc eſt, æquatio à Sole non pendens, & intelligetur quibus in locis illa æquatio ſit adhibenda ex ſitu cognito Apogæi Lunæ, pendet enim omninò ea differentia ex ſitu Lunæ in Orbe ſuo reſpectu Apogæi ſui.

Tertiò. Quærendum foret obſervationibus, quibus in locis Luna

Eclipticam fecet, cui nempe Cœli loco refpondeant ejus Nodi, qui in hac hypothefi fixi forent, & quonam angulo Orbita Lunæ foret inclinata ad Eclipticam, unde, quoniam ea inclinatio conftans effet, diftantiâ Lunæ à plano Eclipticæ per perpendiculum menfurata, foret femper proportionata diftantiæ perpendiculari Lunæ à Linea nodorum, itaque ex cognito loco Lunæ & Nodorûm cognofci poterit quonam fub Angulo Luna ab Ecliptica diftare videatur ex ipfâ terrâ; & ad quodnam punctum Eclipticæ referri debeat.

Si itaque Lunæ motus citra actionem Solis confiderentur tabulæ Aftronomicæ Lunares hæc continere debebunt

1°. Epocham Loci Lunæ dato aliquo tempore; tum obfervationem loci Apogæi quod fixum maneret, & obfervationem loci Nodorum pariter fixorum.

Poftea continere debebunt tabulam motus medii, tum tabulam Æquationis Lunæ fecundum ejus diftantiam mediam ab Apogæo; tabulam latitudinis Lunæ fecundùm variam diftantiam Lunæ à Nodo & denique tabulam reductionis Lunæ ad Eclipticam, fecundùm eam diftantiam Lunæ à Nodo.

Poffunt his addi, tabula diftantiarum Lunæ à Terra fecundum ejus diftantiam ab ejus Apogæo, tabula Diametrorum ejus apparentium fecundùm eamdem diftantiam ab Apogæo, & denique Tabula Parallaxeos quâ deprimitur Luna refpectu fpectatoris in fuperficie telluris collocati, prout diverfa eft ejus à Terra diftantia, & prout altitudo fupra horizontem eft diverfa.

Talis foret tota de Lunâ Theoria, citra Solis actionem; fed jam à longo tempore intellexerunt Aftronomi Lunares motus à Lunæ fitu refpectu Solis plurimum turbari, unde varias correctiones, five Æquationes variis titulis concinnare funt conati.

Quam luculenter ex Gravitatis Theoriâ, hæc non modò explicentur fed etiam accurato calculo determinentur demonftrare aggreffus eft Newtonus, & eas omnes Æquationes quæ ex Sole pendent, calculis ex Theoriâ fuâ deductis ita feliciter ftatuit ut motus Lunæ ejufve Æquationes ex calculo repertæ in minuto fecundo aut propè cum iis quæ ab accuratioribus obfervatoribus dererminari potuerunt confentiant, quod autoritatem integram illi Theoriæ conciliat. Calculi autem illi, nec faciles funt, nec compendiofi, nec femper commodè ad fyntheticam formam reducendi; Quos Newtonus hâc ultimâ ratione Lectori fuo fiftere potuit eos enucleatè tradit, cæteros omittit & quod ex iis obtinetur ftrictim in Scholio indicat, & primo quales fint illæ æquationes juxta Aftronomorum obfervationes dicit & quibufnam Legibus fecundum ipfos

ipsos observatores sint adstrictæ, mox tradit quales æquationes ex suis calculis emergant & quænam sint earum Leges.

Ipsum tam observationibus ante ipsum institutis, quam observationibus Flamstedianis usum esse constat, imo & ipsum exinde Tabulas Lunares sibi construxisse liquet, ex quibus multa profert quarum pleraque in Rudolphinis, aut in Ludoviceis Tabulis facile non comperiuntur, sed quæ maximè consentiunt cum novis Ill. Cassini Tabulis, ita ut quo perfectiùs Coeli motus dignoscunt Astronomi eo propiùs ad Newtonianas Theorias accedere deprehendantur.

Ut itaque Solis actionis in Lunam & ejus orbitam habeatur ratio; Primum fiat abstractio excentricitatis Orbitæ tam Telluris quam Lunæ, deprehenditur quod ex Solis actione mensis Periodicus Lûnæ longior evadat & ejus Orbita ex circulari in Ellipsim mutetur cujus axes per Prop. XXVIII. sunt determinati.

Secundò, tam ex eâ figurâ quam Orbita Lunæ induit quam ex acceleratione Lunæ per eam partem actionis Solis quæ secundum Tangentem orbitæ Lunaris dirigitur, nascitur Variatio quam Tycho primus observavit, & maximam in Octantibus $40' \frac{1}{2}$ statuit, illam Ill. Cassinus facit $33'. 40''$. in Elementis Astronomiæ, eam verò ipse Newtonus in hypothesi orbitas Telluris & Lunæ esse circulares $35'. 10''$. calculavit Prop. XXIX.

Tertiò ex eâ Solis actione nascitur motus Apogæi Lunaris in consequentia, cujus motus fundamentum indicat Newtonus Prop. XLV. Lib. I.

Quartò inde deducitur motus medius nodorum Prop. XXXII. observationibus proximè congruus; Quinto denique Inclinationis Orbitæ Lunaris mutatio explicatur Prop. XXXIV. & XXXV.

Nunc verò adjungatur consideratio Excentricitatis Orbitæ Telluris, eâ fit ut actio Solis major sit cum terra est in Perihelio suo quam in Aphelio; Inde orientur correctiones variæ his omnibus Lunæ erroribus adjungendæ; Primùm cùm mensis Periodicus Lunæ per Actionem Solis longior evadat & motus ejus medius augeatur, id incrementum quando terra est in Perihelio majus est quam cum est in Aphelio, hinc ea tardatio inæqualiter in motum Lunæ distributa, efficit ut hoc nomine locus ejus per medium motum inventus ab ejus vero loco dissentiat, hinc itaque notis nostris ad initium Scholii ad calcem Prop. XXXV. adjecti quod ad totam Lunæ Theoriam pertinet incrementum medium motus medii ex actione Solis ortum assignamus, tum postea aperimus rationem quâ obtineri potest æquatio ceu correctio motus medii adhibenda propter inæqualem Terræ à Sole distantiam, quæ quidem æquatio continetur in eâ quam Ill. Cassinus, titulo *Primæ Æquationis Solaris*, tradit.

Eâ-

Eâdem ratiône, variationes motus Apogæi & motus nodorum ex situ diverso Terræ ad aphelium aut Perihelium suum ex utriusque motu medio dato in secundo Paragrapho derivare docetur.

His ex Excentricitate orbitæ Telluris deductis adjungatur consideratio Excentricitatis Orbitæ Lunaris, aut ejus inclinationis ad Eclipticam inde novæ irregularitates prioribus adnascuntur.

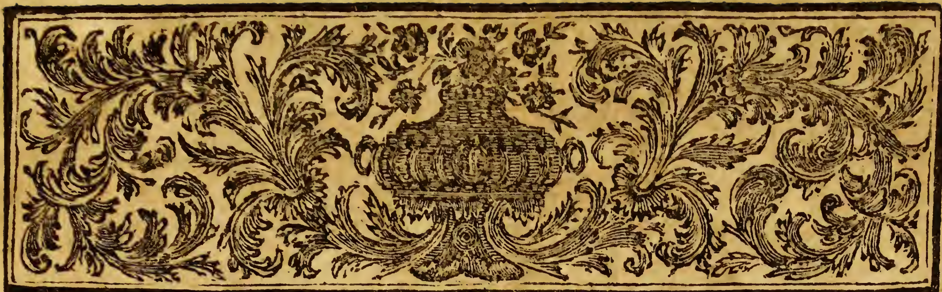
Primò mensis Periodicus paulo major fit cum Linea Apsidum per Solem transit quam cum ipsi est perpendicularis, hinc correctio nova Æquationi motus medii quæ in primo Scholii Paragrapho exponitur est facienda, hanc novam Æquationem Ill. Cassinus exhibet in Tabella cujus titulus est *secunda Æquatio Solaris* & tertio Paragrapho Scholii traditur.

Itidem si linea nodorum per Solem transeat paulo major erit Solis actio & correctio nova exinde nascetur eidem motui medio, hanc quarto Paragrapho Scholii indicat Newtonus.

Præterea excentricitas ipsa orbitæ Lunaris ex diverso situ Apogæi respectu Solis mutatur, nunc major nunc minor evadit idque etiam inæqualiter pro distantiâ telluris à Sole.

Rursus ipse motus Apogæi prout Apogæum diversimodè situm est respectu Solis mutatur, hinc Æquatio Apogæi nascitur eaque duplex; prima supponendo telluris à Sole distantiam constantem, altera verò pendet ex mutatione distantiæ telluris à Sole.

Hinc tandem cum orbitæ Lunaris forma, excentricitas & Apogæi positio mutetur, omninò mutantur correctiones illæ quæ deducebantur ex Lunæ excentricitate mediocri, quæ æquationem solutam constituebant; ultimo autem Scholii Paragrapho Newtonus docet quâ ratione novæ illæ correctiones sint instituendæ: Omnia verò in hoc Scholio sine demonstratione tradit nec indicato suorum calculorum artificio, ideoque nostri putavimus officii, eam indagare viam cui Newtonus in iis reperiendis insistere debuit, labore quidem non parvo, successu qualicumque, utinam Lectoribus non ingrato.

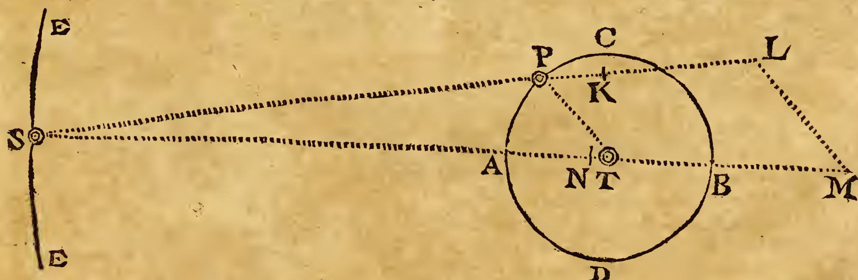


PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

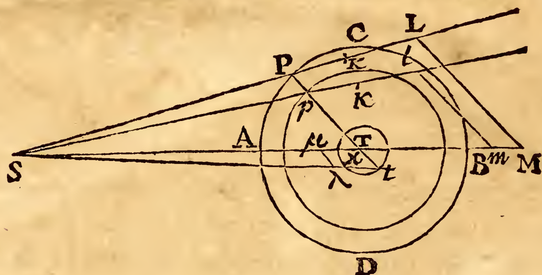
*Nvenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.*



Designet *S* solem, *T* terram, *P* lunam, *CADB* orbem lunæ. In *SP* capiatur *SK* æqualis *ST*; sitque *SL* ad *SK* in duplicatâ ratione *SK* ad *SP*, & ipsi *PT* agatur parallela *LM*; & si gravitas acceleratix terræ in solem exponatur per distan-

De Mundi Systemate.

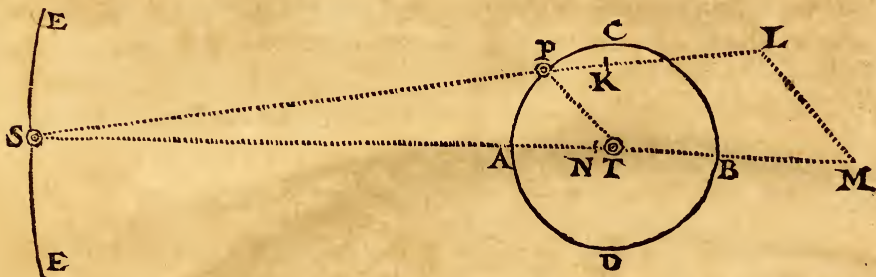
distantiam ST vel SK, erit SL gravitas acceleratrix lunæ in solem. Ea componitur ex partibus SM, LM, quarum LM & ipsius SM pars TM perturbat motum lunæ, ut in libri primi prop. LXVI. & ejus corollariis expositum est. (q) Quâtenus terra & luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quam motuum referre licet ad lunam, & summas virium per lineas ipsis analo-



109. (q) * *Quâtenus Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus consimilibus;* Designet ut prius S solem, sed sit T centrum commune gravitatis terræ & lunæ; sit itaque p luna & t terra circum commune gravitatis centrum revolventes, ita ut distantia p t sit æqualis P T, ductisque S p, S t, sumptisque in eis lineis productis si opus sit S k, S x æqualibus S T, secatisque S l & S λ ita ut sint ad S T in duplicatâ ratione S T ad S p & ad S t, actisque l m, λ μ Parallelis ad p t, si exponat S T vim acceleratricem centri communis gravitatis T in solem, exponent S l & S λ vires accelerantes lunam & terram in solem, & perturbabuntur utriusque motus respectu centri communis gravitatis per vires l m & λ μ, T m & T μ; Quæ vires consimiles sunt viribus L M & T M quibus lunam solam perturbari dictum fuit in suppositione terram esse immotam; nam ob maximam distantiam puncti S, lineæ P L, p l, T M, t λ pro parallelis sunt habendæ, ideoque figuræ T P L M, T p l m, T t λ μ pro Parallelogrammis sunt habendæ, quæ angulum æqualem in T habent, præterea latera P T, T M; p T, T m; T t, T μ, eamdem habent inter se rationem, demonstratur enim in notâ 500. lib. 1. (quæ ad majorem facilitatem repetitur in notâ (u) subsequente) esse P T ad T M, p T ad T m, T t ad T μ ut Radius ad triplum Cosinus anguli A T P qui Cosinus cum idem sit in tribus hisce casibus, latera Parallelogrammorum circa æqualem angulum posita erunt proportionalia, ea verò latera designant tam vires quibus Luna circa terram immotam revolvendo perturbatur quam eas quibus perturbarentur luna & terrâ circa centrum commune revolvendo, illæ *Vires ergo sunt consimiles.*

Sed summas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam. Quippe in observationibus motus Lunæ respectu terræ quasi hæc immota esset consideratur, tunc autem summæ virium acceleratricium, ex quibus velocitates respectivæ nascuntur ipsi tribui debent, *& summas virium per lineas*

analogas *TM* & *ML* designare. Vis *ML* in (r) mediocri suâ quantitate est ad vim centripetam, quâ luna in orbe suo circa terram quiescentem ad distantiam *PT* revolvi posset, in duplicatâ ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa solem (per corol. 17. prop. LXVI. lib. 1.) hoc est,



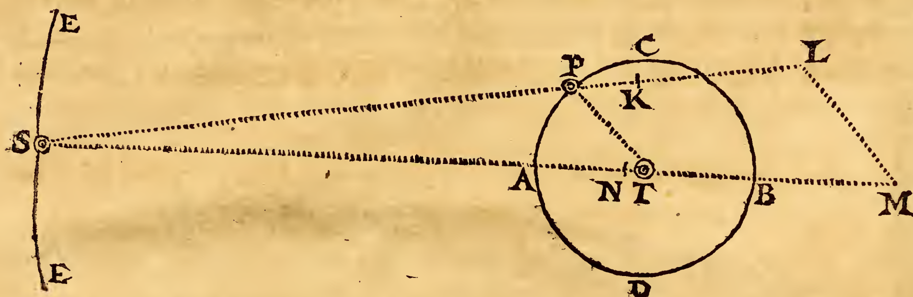
in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propositione quartâ quod, si terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium terræ

neas TM & ML ipsis analogas designare. Vires enim acceleratrices p T & T t simul junctæ æquales sunt soli vi PT & similem effectum edunt, admovent utique corpora p & t, secundum directionem p T t, si ergo vis acceleratrix P T summæ utriusque æqualis admoveat corpus P versus immotum T, planè idem erit effectus ex corpore t vel T spectatus: Vires MT, T μ divellunt corpora à se mutuo secundum directionem ST, idem verò præstat vis T M quæ summæ ambarum est æqualis, nam est pT : T t :: m T : T μ :: ergo pT:pT+Tt :: mT : mT+T μ & altermando p T : m T :: (PT : MT) :: p T + T t : m T + T μ. Sed est p T + T t = P T ergo etiam m T + T μ = M T.

(r) * *Vis ML in mediocri suâ quantitate &c.* Ob magnam Solis distantiam figurâ P T M L est parallelogrammum ideoque ML est proximè æqualis lineæ P T, ergo vis M L erit ad vim quâ Sol agit in punctum T, ut P T ad S K sive S T, sed vires centrales qualescumque sunt inter se directè ut Radii circulorum qui per eas describuntur & inversè ut quadrata temporum Periodicorum, ergo ea vis quâ sol agit in punctum T, est ad vim quâ Luna in orbe suo retinetur (posito illam revolvi circa terram quiescentem) ut S T ad P T directè & ut quadratum temporis Periodici Lunæ circa terram ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem; Ergo compositis rationibus, vis M L est ad vim quâ Luna in orbe suô retinetur ut quadratum temporis Periodici Lunæ ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem hoc est in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, 43' ad 365 dies, 6 hor. 9' quæ est duratio anni siderei. 1095

De Mundi Systemate.

terræ quamproximè. Et (s) vis quâ luna in orbem circa terram quiescentem, ad distantiam *PT* semidiametrorum terrestrium $60\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim, quâ eodem tempore ad distantiam



semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & (t) hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproximè. Ideoque vis mediocris *ML* est ad vim gravitatis in superficie terræ,

109. (s) * *Et vis quâ Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. revolvi posset est ad vim quâ ad distantiam 60 semid. revolvi posset eodem tempore ut $60\frac{1}{2}$ ad 60.* Vires enim centrales sunt ut distantiæ directè & tempora Periodica inversè (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) cum ergo hîc tempora Periodica æqualia ponantur, Vires Centrales sunt ut distantiæ. Newtonus autem loco distantiæ $60\frac{1}{2}$ semid. terræ quæ revera intercedit inter terram & lunam, assumit distantiam 60 semid. tantùm, quia in præcedente ratiocinio vim quâ Lunâ in orbe suo retinetur æstimaverat quasi terra immota esset & Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. à terrâ tempore 27. dier. 7 hor. 43. min. circa terram revolveretur; Verùm cùm terra reverâ circa centrum gravitatis commune Lunæ & Terræ revolvatur, ea vis quâ Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. tempore illo revolvi apparet, minor est ea quâ ad eamdem distantiam eodemque tempore circa terram immotam revolveretur, & est æqualis illi quâ, eodem quidem tempore Periodico, sed ad distantiam 60 semid. circa terram immotam revolveretur, ut constat ex Prop. LX. Lib. I. Eâ enim Propositione statuitur quod si duo corpora revolvantur circa centrum commune gravitatis, axis Ellipseos quam unum circa alterum motum describit est ad axem Ellipseos quam circa illud quiescens eodem tempore Periodico & eâdem vi describere posset, ut summa corporum amborum ad primam duarum medieproportionalium inter hanc summam & corpus alterum, quare cum Telluris corpus sit ad corpus Lunæ ut 42 ad 1, & prima duarum medieproportionalium inter 43 & 42 sit $42\frac{2}{3}$ sitque 43 ad $42\frac{2}{3}$ ut $60\frac{1}{2}$ ad 60 proximè, Vis quâ Luna in orbe suo retinetur, ea est quâ ad distantiam 60 semid. terræ eodem ipso tempore Periodico quod observatur circa terram immotam revolvi posset.

(t) * *Et hæc vis &c.* Per hujusce Libri Prop. IV.

terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6. Inde verò & ex proportione linearum *TM*, *ML*, datur etiam vis *TM* (u): & hæ ſunt vires ſolis quibus lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*

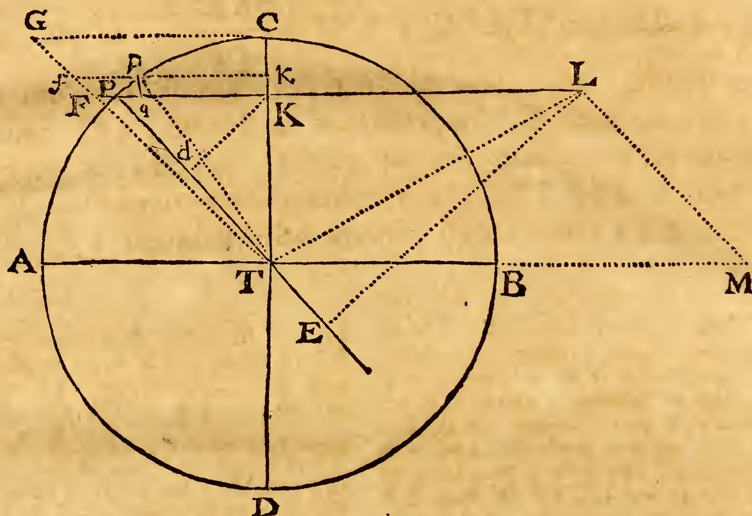
PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari deſcribit.

Diximus aream, quam luna radio ad terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quâtenus motus lunaris ab actione ſolis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hic inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, eâ ſolâ exceptâ, de quâ hic agitur. Ob ingentem verò ſolis diſtantiam, ponamus etiam lineas *SP*

(u) * *Datur etiam vis TM.* Ob parallelas PT, LM & ingentem puncti S diſtantiam, PL & TM ſunt parallelæ, & figura PTLM eſt parallelogrammum, ideoque TM ſumitur ut proxime æqualis PL; Eſt autem PL triplum Coſinus anguli ATP exiſtente TP ſive LM radio; Nam quia SK eſt æqualis ST, ſi centro S radio ST deſcribatur arcus TK, erunt ST & SK in eum arcum perpendiculares, ſed is arcus proxime coincidit cum rectâ TC perpendiculari lineæ ST in T (ob diſtantiam centri S) ergo punctum K in ea recta TC occurret & SK ſive PK illi rectæ 109.
TC erit perpendicularis, ideoque PK erit Coſinus Anguli ATP; ſed, per conſtructionem, eſt SP^2 ad $SK^2 - SP^2$ (ſive quia $SK = SP + PK$) ad $2SP \times PK + PK^2$ ut SK (ſive $SP + SK$) ad $SL - SK$ (ſive KL) ideoque eſt $KL = 2PK + \frac{3PK^2}{SP} + \frac{PK^3}{SP^2}$, ſed omittendi ſunt ultimi termini propter ingentem diviſorem SP, ergo eſt $KL = 2PK$, & $PK + KL$ ſive $PL = 3PK$. Q. E. D.

De Mundi Systemate. SP, ST ſibi invicem parallelas eſſe. (x) Hoc pacto vis LM reducetur ſemper ad mediocrem ſuam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires (per legum corol. 2.) componunt vim TL; & hæc vis, ſi in radium TP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires TE, EL, quarum TE, agendo ſemper ſecundum radium TP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ TPC radio illo TP



factam; & EL agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat lunam. Acceleratio illa lunæ, in tranſitu ipſius à quadraturâ C ad conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut (y) ipſa vis accelerans EL, (z) hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur

tempus

109. (x) * *Hoc pacto.* Vide notam (u) præcedentem.

(y) * *Ut ipſa vis accelerans* (13. lib. 1.).

(z) * *Hoc eſt ut* $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Nam Triangula PTK, PLE ſunt ſimilia propter angulum communem in P & angulos rectos K & E, ergo eſt $TP : TK :: PL : EL = \frac{PL \times TK}{TP}$, (ſed per notam u) eſt $PL = 3PK$ ergo eſt $EL = \frac{3PK \times TK}{TP}$.

tempus per motum medium lunarem, ([a]) vel (quod eodem fere recidit) per angulum CTP, vel etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipsi CT æqualis. Et diviso arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi possint, ductâque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipsis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit FK æqualis TK, & ([b]) Kk erit ad PK ut Pp ad Tp, ([c]) hoc est in datâ ratione, ([d]) ideoque $FK \times Kk$ seu area $FKkf$, erit ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id est, ut EL; & compositè, area tota $GCKF$ ut summa omnium virium EL tempore toto CP impressarum in lunam, ([e]) atque ideo etiam ut velocitas hâc summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP, seu incrementum momenti. ([f]) Vis quâ luna circa terram quiescentem ad distantiam TP, tempore

LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROB. VII.

110 (a) * *Quod eodem ferè recidit.* In hypothesi orbem Lunarem esse circularem, angulus CTP vel arcus CP forent proportionales tempori, semotâ consideratione perturbationis motus Lunæ ex Solis actione productæ; hæc vero perturbatio respectu ipsius motus Lunæ est exigua, itaque anguli CTP vel arcus CP tempori ferè proportionales censeri possunt.

(b) * *Kk erit ad PK ut Pp ad Tp* sive TP; Ex notissimâ circuli proprietate fluit hæc proportio, nam si ex puncto p ducatur lineola pq perpendicularis ad PK, ea erit parallela & æqualis lineæ Kk, formabiturque Triangulum fluxionale Ppq simile Triangulo PKT, nam cum anguli pPK & KPT rectum simul efficiant, & pariter anguli KPT & PTK, æquales sunt anguli pPK & PTK unde est pq sive Kk ad PK ut Pp ad TP.

(c) * *Hoc est in datâ ratione.* Ratio enim Pp ad Tp est data, quia singulæ partes Pp sumuntur æquales, sunt itaque singulæ in eâdem ratione ad radium TP.

(d) * *Ideoque $FK \times Kk$ seu area $FKkf$ ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$*; Cum ratio Kk ad PK sit data, data etiam erit ratio Kk ad $3PK$, & hæc ratio manebit etiamnum data si consequens $3PK$ per quantitatem constantem TP dividatur, erit ergo data ratio Kk ad $\frac{3PK}{TP}$, denique non mutabitur hæc ratio si ambo termini per quantitates æquales FK & TK multiplicentur, ergo ratio $Kk \times FK$ (seu areæ $FKkf$) ad $\frac{3PK \times TK}{TP}$ est etiam data, hoc est, est area $FKkf$ ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. 110.

(e) * *Atque ideo etiam ut velocitas* (13. lib. 1.).

(f) * *Vis quâ Lunâ circa terram ad distantiam TP tempore suo Periodico CADB revolvi posset efficeret ut corpus liberè cadendo tempore CT describeret longitudinem* $\frac{1}{2}CT$ &c. Si corpus gyretur in circulo per vim ad ejus centrum tendentem, primum uniformiter girabitur; tum, quadratum arcûs quovis tempore descripti erit æquale circuli Diametro ducto in altitudinem quam corpus liberè cadendo tempore eodem percurreret si uniformiter acce-

De Mundi Systemate. re suo periodico $CADB$ dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, quâ luna in orbe suo movetur. Patet hoc per corol. 9. prop. IV. lib. I. Cum autem perpendiculum Kd in TP demissum (g) sit ipsius EL pars tertia, & (h) ipsius TP seu ML in octantibus pars dimidia, vis EL in octantibus, (i) ubi maxima

110 acceleraretur per vim centripetam quâ circulus describitur.

Nam si sumatur arcus quam minimus altitudo quæ per vim centralem liberè percurreretur dum ille arcus quamminimus describeretur, foret ejus arcus minimi sinus versus; sed ex natura circuli, factum Diametri ducti in sinum versum arcûs, est æquale quadrato chordæ illius arcus, sive quadrato arcus ipsius si adeo sit exiguus ut pro suâ chordâ sumi possit.

Spatia verò liberè cadendo per vim uniformiter accelerantem descripta, sunt ut quadrata temporum, arcus verò interea percursi sunt ut tempora, quia corpus uniformi celeritate giratur, ergo spatium minimum per vim centripetam liberè descriptum est ad aliud quodvis spatium per eamdem vim centrifugam liberè descriptum (ideoque etiam facta horum spatiorum per Diametrum circuli) sunt ut quadrata arcuum correspondentibus temporibus descriptorum: sed prius factum est æquale quadrato arcus correspondentis, ergo & alterum factum erit æquale quadrato arcus correspondentis, hoc est altitudo quæcumque cadendo liberè descripta in Diametrum ducta efficit factum æquale quadrato arcus eodem tempore revolvendo uniformiter percursi.

Quod cum ita sit, cadat libere corpus per $\frac{1}{2}$ CT h. e. per radii semissem, ducaturque hæc longitudo per Diametrum seu 2 CT factum CT^2 sive quadratum ipsius radii æquale erit quadrato arcus eodem tempore descripti, erit ergo is arcus æqualis radio CT, sed velocitas acquisita liberè cadendo per Radii semissem $\frac{1}{2}$ CT talis est ut corpus movendo uniformiter eâ celeritate acquisitâ duplum ejus altitudinis Radium nempe integrum CT eodem tempore describere posset, quæ est ipsa longitudo arcus quam corpus uniformiter revolvens descripsisset eodem tempore, ergo velocitas acquisita lapsu per $\frac{1}{2}$ C T ea est quâ corpus in orbe suo revolvitur.

Ea denique longitudo $\frac{1}{2}$ CT percurretur tempore quod erit ad totum tempus Periodicum ut C T ad circumferentiam C A D B, nam tempora sunt ut arcus uniformiter descripti, sed tempus quo corpus per $\frac{1}{2}$ C T labitur est æquale tempori quo arcus æqualis C T percurritur ergo est illud tempus ad totum tempus Periodicum ut C T ad totam peripheriam C A D B.

(g) * *Kd sit ipsius EL pars tertia.* Ob Triangula similia P L E, P K d est E L ad K d ut P L ad P K, sed (per notam (u)) est P K tertia pars lineæ P L, est itaque pariter K d tertia pars lineæ E L.

(h) * *Kd ipsius TP seu ML in octantibus pars dimidia*; Nam in octantibus anguli K T d, P K d, K P d sunt omnes 45 grad. est itaque $Td = Kd = dP$ est ergo T d sive K d ipsius T P pars dimidia in octantibus.

111 (i) * *Ubi maxima est.* Ut inveniatur punctum in quod vis E L sive $\frac{3PK \times TK}{TP}$ est maxima, sit $TP = r$, $TK = x$, $PK = y$ erit $EL = \frac{3yx}{r}$ cujus fluxio est $\frac{3ydx + 3xdy}{r}$, maxima est ergo E L ubi hæc fluxio æquatur nihilo, ideoque ubi $ydx = -xdy$, sed cum in circulo sit

maxima est, superabit vim *ML* in (k) ratione 3 ad 2, ideoque erit ad vim illam, quâ luna tempore suo periodico circa terram quiescentem revolvi posset, (l) ut 100 ad $\frac{2}{3}\times 17872\frac{1}{2}$ LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROB. VII.

seu 11915, & tempore *CT* velocitatem generare deberet quæ (m) esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris, tempore autem *CPA* velocitatem majorem generaret in ratione *CA* ad *CT* seu *TP*. Expo-

Fit $y = \sqrt{rr - xx}$, & $dy = \frac{-xdx}{\sqrt{rr-xx}}$ unde substitutis valoribus æquatio $ydx = -xdy$ in hanc mutatur $dx\sqrt{rr-xx} = \frac{xxdx}{\sqrt{rr-xx}}$ & reductis terminis fit $rr = 2xx$, unde est $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ & $dy = -dx$, & $y = x$; Ideoque in Triangulo PTK angulus T debet esse 45 grad. & P debet esse in octante Circuli.

(k) * *In ratione 3 ad 2.* Est EL ad Kd ut 3 ad 1 (not. g) est Kd ad TP sive ML ut 1 ad 2 (not. h) ergo EL ad ML ut 3 ad 2, ex æquo.

(l) * *Ut* 100 *ad* $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$. Vis EL est ad vim ML ut 3 ad 2; vis ML est ad vim quâ Lunâ in orbe suo circa terram quiescentem revolvi posset tempore suo Periodico ut 1000 ad 178725 (Prop. XXV. hujusce) sive ut 100 ad 17872 $\frac{1}{2}$; Ergo compositis rationibus vis EL est ad eam vim quâ Luna revolvitur ut 100×3 ad 2×17872 $\frac{1}{2}$ sive ut 100 ad $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$ hoc est ad 11915, ideoque vis EL est $\frac{100}{11915}$ vis Lunæ.

(m) *Quæ esset pars* $\frac{100}{11915}$ *velocitatis Lunaris.* Patet ex notâ (*f*) vim quâ Lunâ revolvitur efficere ut corpus ab eâ vi uniformiter acceleratum cadendo tempo-ro

DE MUNDI SYSTEMATE. Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo (n) $\frac{1}{2} TP \times Pp$ æqualem. Et (o) velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CA$ & triangulum TCG, sive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per prop. IX. lib. V. elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunæ. (p) Huic lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, (q) addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, sum-

XII. re CT eam ipsam acquireret velocitatem quâ Luna revolvitur, vis ergo quæ vis Lunaris est pars $\frac{100}{11915}$ eodem tempore generaret velocitatem quæ velocitatis Lunaris foret pars $\frac{100}{11915}$.

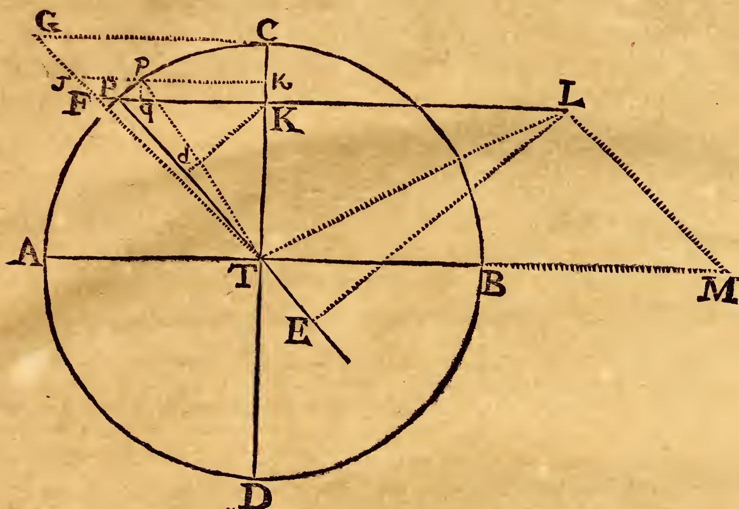
(n) * *Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream FK × Kk rectangulo ½ TP × Pp æqualem*, vis EL semper est proportionalis areæ $FK \times Kk$ ex demonstratis, sed in octantibus ubi ea vis est maxima est FK sive $TK = \frac{TP}{\sqrt{2}}$ & $Kk = \frac{Pp}{\sqrt{2}}$ ergo $FK \times Kk = \frac{TP \times Pp}{2}$.

(o) * *Et velocitas quam vis maxima tempore quovis CP generat ad velocitatem quam generant* vires veræ EL *eodem tempore agentes ut ½ TP × CP ad aream KCGF*; Velocitates genitæ sunt ut vires quibus generantur ductæ in tempus per quod generantur, cum itaque supponatur omnes arcus Pp temporibus quamproximè æqualibus describi, si ii arcus Pp æquales inter se sumantur (vid. not. a præced.) velocitates genitæ dum arcus Pp percurruntur sunt ut ipsæ vires sive ut areæ FKkf, ideoque summa velocitatum genitarum tempore CP, sive dum arcus CP describitur, est ut tota area KCGF, sed vis in octantibus sive velocitas quæ in octante generatur durante tempore Pp, est $\frac{TP \times Pp}{2}$, quia eo in loco is est valor areæ FKkf, qui valor est ipse valor areæ PTp, ergo si singulis momentis Pp similis velocitas generaretur, summa velocitatum genitarum tempore CP foret area CTP sive $\frac{1}{2} TP \times CP$, ergo velocitas quam vis maxima generat est ad eam quam vires veræ generant, tempore utrinque eodem CP, ut $\frac{1}{2} TP \times CP$ ad KCGF.

(p) *Huic Lunæ velocitati quæ areæ momento mediocri est analoga.* Areæ momentum mediocre illud est quod Luna dato exiguo tempore verreret si uniformi velocitate toto suo tempore ferretur, cumque Luna per vim EL certis in locis plus minusve acceleretur, areæ momentum, seu ea areæ particula quæ dato exiguo tempore describitur, nunc major nunc minor est; sed cum orbis Lunaris circularis censeatur, areæ momenta sunt ut arcus qui sunt eorum bases, cumque iisdem temporibus illa momenta illique arcus describantur, sunt ut velocitates quibus describuntur. Hinc pro arearum momentis ipsæ velocitatum rationes assumuntur.

(q) * *Addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius.* Hic assumit Newtonus velocitatem mediocrem eam nempe quâ orbita Lunaris tempore suo Periodi-

summa 11915+50 seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in syzygiâ *A*, ac differentia 11915−50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ tempo- LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROBL. VII.



ribus æqualibus in syzygiis & quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentorum differentiam 100 ut

(r) eo uniformiter describeretur esse mediam proportionalem Arithmeticè inter velocitatem minimam & maximam. Hanc tamen propositionem quasi evidentem assumere non licuit, si enim v. gr. diutius durarent parvæ velocitates quam magnæ, velocitas mediocris propior foret parvis velocitatibus quam magnis, hinc exponenda est prius ratio quâ crescunt illæ velocitates, ut possimus asserere mediocrem velocitatem Lunæ esse mediam Arithmeticè inter extremas. Quod quidem efficere conabimur Problemate huic propositioni mox subjungendo. III.

DE MUNDI SYSTEMATE. ut trapezium $FKCG$ ad triangulum TCG vel (r) quod perinde est, ut quadratum sinus PK ad quadratum radii TP, id (s) est, ut Pd ad TP) & summa exhibebit momentum areæ, ubi luna est in loco quovis intermedio P.

Hæc omnia ita se habent, ex hypothesi quod sol & terra quiescunt, & luna tempore synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus synodica lunaris verè sit dierum 29. hor. 12. & min. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadraturâ lunæ erit ad ejus momentum in syzygiâ ut 11023−50 ad 11023+50, seu 10973 ad 11073,

112. (r) * *Vel quod perinde est ut quadratum sinus PK ad quadratum radii TP* area TCG est aream TKF ut quad. TC ad quad. TK & dividendo TCG−TKF (sive FKCG) ad TCG ut TC^2-TK^2 (sive PK^2) ad TC^2.

(s) * *Id est ut Pd ad TP* est Pd ad PK ut PK ad TP propter similitudinem Triangulorum PKd, PTK, ergo per compositionem rationum est Pd ad TP ut PK^2 ad TP^2.

11073, & ad ejus momentum, ubi luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad $10973+Pd$, (t) existente videlicet TP æquali 100. LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROBL. VII.

Area igitur, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proximè ut summa numeri 219,46 & sinus versi duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturâ proximâ, in (u) circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi variatio in octantibus est magnitudinis mediocris. Sin (x) variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui sinus ille versus in eâdem ratione.

G C N L F P p k K d n A T B M

(t) * *Existente videlicet TP æquali* 100, sequitur ex præcedentibus quod illud quod debet addi ad momentum minimum 10973 est ad 100 ut est P d ad P T, si ergo P T sit æqualis numero 100 erit P d æqualis illi numero qui debet addi ad momenti minimi valorem.

(u) * *Ut summa numeri 219.46 & sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ in circulo cujus radius est unitas;* Areæ momentum in puncto P est ut $10973+Pd$, est autem P d dimidium sinus versus duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, nam dicatur N punctum in quo linea P K L secat circulum erit arcus P C N duplus distantiæ P C à quadraturâ proximâ ductaque N n perpendiculari in radium P T erit P n sinus versus duplicatæ illius distantiæ, sed cum N n & K d sint perpendiculares in eamdem lineam ideoque Parallelæ, & sit punctum K medium lineæ P N erit etiam d medium lineæ P n, eritque $Pd=\frac{1}{2}Pn$, sive erit P d dimidium sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, est ergo momentum areæ ut summa numeri $10973+\frac{1}{2}Pn$ existente Radio 100, seu ut hujus quantitatis duplum $21946+Pn$ ideoque si Radius sit 1 ut $219{,}46+Pn$.

(x) * 112. *Sin variatio ibi major sit &c.* Manente eâdem Hypothesi, Lunæ orbem esse circularem & Lunam aliam non pati irregularitatem præter eam quæ ab eâ parte actionis Solis nascitur quæ per lineam E L designatur, variatio Lunæ erit arcus interceptus inter locum in quo Luna esse deberet si velocitate suâ mediocri moveretur tempore dato C P, & locum in quo reverâ est tunc temporis, cujus quidem variationis conditiones ex Problemate sequenti exponere facile erit. 111.

De Mundi Systemate.

PROBLEMA.

112 Ex hypothesibus & demonstratis in Propositione hâc XXVI. exponere rationem secundum quam describuntur areæ CTPA momenta.

Designet recta CA (in 2da. figurâ) tempus quo arcus CA describitur, erigantur per singula puncta P rectæ PM perpendiculares in CA & proportionales velocitati tempore CP per vim EL genitæ; Per ea quæ in hâc Propositione demonstrantur independenter ab his, illæ velocitates in punctis P arcus CP sunt ut Trapezia FKCG correspondentia, illa vero Trapezia sunt ut sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, sive ut sinus versus arcus dupli CP, (ut mox in notis explicabitur) fiant ergo illæ perpendiculares PM æquales sinui verso arcus 2CP, ultima perpendicularis AH erit æqualis ipsi Diametro AB, quia est sinus versus dupli quadrantis; ducatur curva CMH per omnium perpendicularium vertices transiens, ducatur etiam AR perpendicularis ad CA, sitque AH ad AR ut velocitas ultimò acquisita in A ad velocitatem uniformem quâ Lunâ ferretur si vis EL, omninò non ageret, absolvaturque Parallelogrammum AREC, productâque lineâ MP usque ad lineam RE tota linea IM erit ut velocitas Lunæ tempore CP, & ducta linea quamproxima mpi erit area MPImpi ut area descripta tempore Pp, & tota area RECMH repræsentabit totam aream tempore CA descriptam; Denique secetur AH in X & ducatur XY parallela CA quæ secet curvam CMH in Z & ex puncto Z ducatur ordinata ZQ. Liquet quod si punctum X ita sit assumptum ut Parallelogrammum XREY sit æquale mixtilineo HARECMH, erit XR velocitas Lunæ mediocris, & CQ tempus quo Luna à quadraturâ profecta ad

ad eam velocitatem mediocrem perveniet, quod quidem ex ipsâ constructione liquet. Jam autem dico quod illud punctum X incidet in medio lineæ A H, ita ut hæc velocitas mediocris X R sit media proportionalis Arithmetica inter R A & R H & præterea quod punctum Q cadet in medio inter A & C ita ut ea celeritas mediocris in octante obtineatur, (saltem si medium arcus medio temporis respondeat quod proximè verum est juxta notam 110 præcedentem).

Ut obtineatur itaque area HAPCMH, dicatur v arcus C P & dicatur mv recta C P quæ arcui C P est proportionalis (saltem quam proximè per not. 110.) & P p sit $m\,dv$, sinus rectus P K arcus C P dicatur y, sinus verò totalis sit r. Ex notis Trigonometriæ Principiis sinus versus dupli arcus C P est $\frac{2yy}{r}$, ergo ordinata P M ei æqualis est $\frac{2yy}{r}$, & elementum areæ sive MPpm est $\frac{2yy}{r}\,m\,dv$, sed ex notâ proprietate circuli est $\sqrt{rr-yy}$ ad r ut dy ad dv est ergo $dv = \frac{r\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ itaque areæ elementum evadit $\frac{2myy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ conferatur illud elementum cum elemento areæ circuli radio T C descripti dicatur C K, z, K k, dz, Elementum P p k K est $y\,dz$, sed est T K ($\sqrt{rr-yy}$) ad P K (y) ut P q (dy) ad qp (dz) hinc $dz = \frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ & elementum areæ circuli fit $\frac{yy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ quod Elementum est ad Elementum correspondens areæ H A P C M H ut 1 ad $2m$, hinc tota hæc area est ad aream quadrantis T C P A ut $2m$ ad 1, sive si totus arcus C P A dicatur c & recta C P A dicatur mc, area H A P C M H erit mrc. Ergo si linea A R quæ designat velocitatem uniformem Lunæ cum nulla foret vis E L, dicatur l, area A R E C erit mlc & tota area H A R E C H erit $mlc + mrc$, sive æqualis Parallelogrammo cujus unum latus foret mc alterum $l+r$, sed R E ex constructione est æqualis mc, ergo si sumatur R X $= l+r$ Parallelogrammum XREZ erit æquale mixtilineo HARECMH, ideoque erit R X sive $l+r$ velocitas Lunæ mediocris, sed erat A H $= 2r$, ideoque R H $= l+2r$ est ergo RX ($l+r$) media proportionalis Arithmeticè inter R A (l) & R H ($l+2r$), ergo velocitas mediocris Lunæ est media proportionalis Arithmeticè inter minimam velocitatem Lunæ (l) & maximam ($l+2r$).

Liber Tertius. Prop. XXVI. Probl. VII.

Quoniam verò ordinata Z Q $=$ A X $= r$ est sinus versus arcus dupli C P, & est r sinus versus arcus quadrantalis, ergo in hoc casu C P ejus dimidius est octans circuli, in octante itaque obtinetur velocitas quæ est æqualis velocitati mediocri Lunæ. Quæ quidem in notâ superiore 111 demonstranda esse dixeramus. 112.

Ex hujus autem Problematis constructione liquet aream per velocitatem mediocrem Lunæ descriptam tempore C P, exprimi per aream Y E I V, & ejus valorem esse $mlv + mrv$, dum area verè per Lunam descripta exprimetur per spatium mixtilineum C E I M; spatium C E I P est mlv, spatium verò C P M, est ad aream C P K ut $2m$ ad 1; tota area C T P est $\frac{rv}{2}$, spatium P K T est $\frac{y \times KT}{2}$, ergo area C P K est $\frac{rv - y \times KT}{2}$, est itaque spatium CP M $= mrv - my \times$ KT & tota area C E I M est $mlv + mrv - my \times KT$; Unde liquet differentiam inter aream per velocitatem mediocrem descriptam & aream reverâ descriptam esse $my \times$ K T, quâ deficit area reverâ descripta, ab eâ quæ per mediocrem motum percursa censetur.

Hinc 1°. liquet variationem debere subtrahi ex motu medio à quadraturâ ad syzygiam, illam evanescere in syzygia A, quia illic $my \times KT = 0$, à syzygiâ variationem addi debere motui medio, ut patet ex figuræ continuatione.

2°. Ut

De Mundi Systemate.

113. 2°. Ut quantitas $mlc + mrc$ eſt ad Rectangulum y K × T K, ita eſt quadrans circuli C P A T ad aream quæ (propter variationem) detrahenda eſt ex areâ C T P motu mediocri deſcriptâ ſive, quoniam C P A T eſt dimidium facti radii in arcum C P A, & ea area detrahenda eſt etiam dimidium facti radii in arcum variationis, erit etiam ut $mlc + mrc$ ad $my \times$ T K ita arcus quadrantalis C P A ſive c ad arcum variationis qui itaque erit $\frac{y \times TK}{l + r}$ ſive $\frac{PK \times TK}{l + r}$.

3°. Quoniam quantitates $lc + rc$, & arcus quadrantalis C P A ſunt quantitates conſtantes, manifeſtum eſt quod variationes in omnibus punctis P, ſunt ut PK×TK, ſive ut factum ſinus arcus C P in ejus Coſinum.

4°. Rectangulum T K × P K eſt maximum ubi punctum P eſt in octante, quod demonſtratur eo modo quem in notâ 111. præcedente videre licet, hinc variatio maxima, eſt in octantibus, unde fluit hoc Paradoxum, ubi vis E L maxima eſt, illic maximè retardatur Luna reſpectu motus ſui medii.

5°. *Si variatio maxima mutetur, augeri debet vel minui ſinus ille verſus, qui velocitatem genitam in* ſingulis punctis exprimit *in eâdem ratione;* Nam velocitas quæ generatur exprimitur per aream C K F G (vide figuram textus) in octantibus autem punctum F coincidit cum puncto P, & area C K F G illic evadit æqualis areæ P K T, ergo velocitas in octantibus genita eſt ut T K per P K, ſed area quæ variationem illic exprimit eſt etiam ut T K per P K, (per hujuſce notæ corol. 3.) ergo velocitas in octantibus eſt ut ipſa variatio in octantibus, ſed velocitas in octanti-

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario lunæ invenire ipsius distantiam à terrâ.

(y) Area, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius lunæ & quadratum distantiæ lunæ à terrâ conjunctim; & propterea distantia lunæ à terrâ est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione areæ directè & subduplicatâ ratione motus horarii inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciprocè ut ipsius distantiâ à terrâ. (z) Tentent astronomi quam probè hæc regula cum phænomenis congruat.

Corol. 2. (a) Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri potest.

PRO-

octantibus est ad velocitatem in quovis alio puncto in ratione datâ Radii ad sinum versum duplicatæ distantiæ ejus dati puncti à quadraturâ proximâ, ergo hæc velocitas crescit ut velocitas in octantibus ideoque etiam ut variatio maxima, *ergo sinus ille versus* illi velocitati proportionalis debet augeri vel minui in eâdem ratione.

Verum ex actione TM aliam variationis portionem oriri ostenditur Prop. XXIX., illam autem portionem etiam futuram ut TK×PK per not. 114. mox adjiciendam constabit, ergo tota variatio erit ut TK×PK, sive, in octantibus, ut velocitas, quare manet hujus Corollarii veritas si agatur de totâ variatione.

(y) 113. *Area quam Luna singulis momentis describit est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ à terrâ.* Designet TPp aream descriptam à Lunâ quovis



tempusculo, sitque Pp arcus curvæ cujuslibet; centro T radio Tp describatur arcus circularis Pq qui pro rectâ perpendiculari in lineam TP assumi potest ideoque area à Lunâ descripta erit ut TP×pq, gradus autem, aut minuta in arcu pq contenta mensurabunt motum angularem Lunæ dato tempore qui æqualis est motui horario Lunæ, ideoque longitudo absoluta ejus arcus pq erit ut ejus radius TP & motus horarius Lunæ conjunctim hinc area TP×pq erit ut TP^2 & motus horarius Lunæ conjunctim. 113.

(z) * *Tentent Astronomi.* Observando nempe motum horarium Lunæ in variis temporibus ejus Periodi & simul angulum inter Solem & Lunam interceptum ut inde habeatur ejus distantia PTC à quadraturâ proximâ C, inde enim poterunt colligi numeri proportionales distantiis PT Lunæ à Terrâ, nam, per præced. Prop. area à Lunâ descripta est ut summa numeri 219.46 & sinus versi dupli anguli PTC quæ si dividatur per motum horarium qui observatione obtinetur, radix quadrata ejus quotientis erit ut distantiæ PT, & inversè ut Lunæ Diametri apparentes; Quare si hi etiam observati fuerint, collatio observationum cum numeris sic inventis Regulam Newtonianam illustrabit.

(a) * *Hinc etiam orbis Lunaris accuratiùs quam antehac definiri potest.* Orbis

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA IX.

Invenire diametros orbis in quo luna, ſine eccentricitate, moveri deberet.

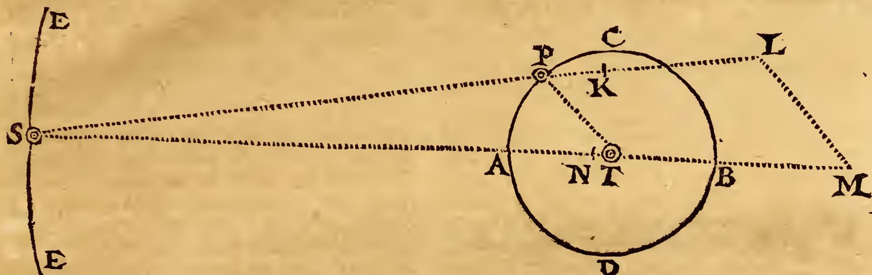
Curvatura trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. (b) Curvaturas linearum pono eſſe inter ſe in ultimâ proportione ſinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ipſius in terram ſupra (c) vim ſolarem $2\,PK$ quâ gravitas acceleratrix lunæ in ſolem ſuperat gravitatem acceleratricem terræ in ſolem vel

113. bis Lunaris figura definiri poteſt per obſervationes Diametrorum apparentium Lunæ in datis angulis à puncto quodam fixo, ſicque cum diſtantiæ Lunæ ſint his Diametris apparentibus reciprocæ, longitudines diſtantiis Lunæ proportionales in lateribus eorum angulorum ſecari poſſunt & per eas extremitates duci poteſt curva orbi Lunari ſimilis: Sed obſervatio Diametri cujuſlibet corporis lucidi eſt nimis lubrica ut ſatis tuta eſſe poſſit hæc Methodus, facilius tutiuſque obſervabuntur motus horarius Lunæ ejuſque diſtantia à quadraturâ proxima, hinc itaque accuratius cognita ratione diſtantiarum Lunæ à terrâ in datis angulis accuratius definietur quam antehac orbis Lunaris.

(b) *Curvaturas linearum* &c. Curvatura lineæ eſt ejus deflexio à Tangente, & æſtimari debet per Angulum inter Tangentem curvæ & curvam naſcentem interceptum; illi anguli ſunt ſemper quamminimi, ideoque, juxta principia Trigonometrica, ſuis ſinubus, ſuiſve Tangentibus ſunt proportionales, hinc Newtonus ponit curvaturas linearum eſſe in ultimâ proportione Tangentium angulorum contactus, ſi Tangentes illæ ad æquales radios referantur. Radii illi æquales ad quos referuntur Tangentes illæ, deſcriberentur per continuationem velocitatis corporis uniformis ſecundum Tangentem curvæ, ideoque quantulicùmque ſumantur tempora quibus deſcribentur erunt inversè ut illæ velocitates, Tangentes verò anguli contactus quæ ad illos radios æquales referuntur ſunt attractionis effectus ſiquidem ſupponitur illam attractionem agere ſecundum perpendiculum ad curvam, is verò attractionis effectus eſt ſemper ut ipſa vis & quadratum temporis per quod agere concipitur ſaltem ſi tempus exiguum intelligatur in quo attractio uniformiter ad modum gravitatis agere cenſenda ſit; Ergo illæ Tangentes ſunt ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè, & in eâdem ratione ſunt anguli contactus ſive curvaturæ linearum.

(c) *Attractio lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ſupra vim ſolarem 2 PK.* Ex iis quæ in Propoſitione XXV. demonſtrata ſunt, liquet per actionem Solis, Lunam à terrâ diſtrahi ubicumque ſita ſit per vim T M, ad illam verò attrahi per vim LM, vis T M ſive P L eſt ſemper æqualis 3 P K (vid. not. (u) ad Prop. XXV.) & eſt P L Coſinus anguli ATP qui

vel ab eâ ſuperatur. In (d) quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis lunæ in terram & vis ſolaris KT, quâ luna in terram trahitur. Et hæ (e) attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proximè; ſeu ut $178725\,N \times CTq - 2000\,ATq \times CT$ & $178725\,N \times ATq + 1000\,CTq \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix lunæ in terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis eſt PT vel TK & lunam trahit in terram, erit 1000, & vis mediocris TM in ſyzygiis erit



qui Coſinus in ſyzygiis eſt æqualis Radio, ita ut P T ſive L M eo in caſu ſit æqualis P K, ergo Luna attrahitur ad terram in ſyzygiis per vim gravitatis & per vim L M ſive P K, & diſtrahitur ab ea per vim 2PK, ſupereſt itaque attractioni Lunæ in terram in ſyzygiis exceſſus gravitatis ſupra vim Solarem 2 P K.

(d) *In quadraturis* autem evaneſcit vis T M, attractio ergo Lunæ in terram eſt ſumma ejus gravitatis & vis L M ſive C T ſive K T quia in quadraturis puncta K & C coincidunt.

(e) * *Et hæ attractiones ſi* $\frac{AT+CT}{2}$ *dicatur* N &c. Ex Propoſitione X X V. conſtat vim gravitatis quâ Luna retinetur in orbe ſuo in mediocri ſua diſtantia N eſſe ad vim ſolarem mediocrem T M ut 178725 ad 1000, ideoque ad vim 2 P K in ſyzygiis æqualem 2 T M ut 178725 ad 2000, ſed diſtantiis AT, CT inæqualibus evadentibus variant iſtæ vires, eſt enim vis gravitatis in diſtantia N ad vim gravitatis in diſtantia A T ut $\frac{1}{N^2}$ ad $\frac{1}{AT^2}$ ideoque ſi prior exprimatur per 178725 erit poſterior $\frac{178725\,N^2}{AT^2}$, & ſimili ratiocinio vis gravitatis in diſtantia C T erit $\frac{178725\,N^2}{CT^2}$; Vires verò Solares 2 P K, K T, creſcunt ut ipſæ diſtantiæ quare ſi vis 2 P K in diſtantia N ſit 2000 in diſtantiâ A T erit $\frac{2000AT}{N}$, & ſi vis T M in quadraturis ſit 1000 in eâ diſtantiâ N, erit ea vis in diſtantia

De Mundi Systemate.

erit 3000; de quâ, si vis mediocris ML subducatur, manebit vis 2000 quâ luna in syzygiis distrahitur à terrâ, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas (f) autem lunæ in syzygiis A & B est ad ipsius velocitatem in quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam luna radio ad terram ducto describit in syzygiis ad momentum ejusdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut $11073\,CT$ ad $10973\,AT$. (g) Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior semel directè, & fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\,ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\,ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\,ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\,CTqq \times AT$, i. (h) e. ut $2151969\,AT \times CT \times N - 24081\,AT\ cub.$ ad $2191371\,AT \times CT \times N + 12261\,CT\ cub.$

Quo-

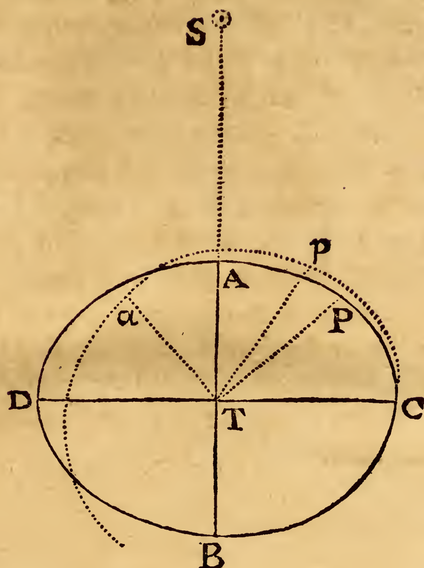
113. tantia CT, $\frac{1000\,CT}{N}$; hinc attractio in syzygiis fit $\frac{178725\,N^2}{N} - \frac{2000\,AT}{N}$, & in quadraturis $\frac{178725\,N^2}{CT^2} + \frac{1000\,CT}{N}$, sive omnia dividendo per N^2 est attractio in syzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000\,AT}{N^2 \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000\,CT}{N^2 \times N}$; quoniam verò N est medium Arithmeticum inter AT & CT quorum differentia est exigua, pro medio Geometrico inter eas quantitates proximè sumi potest, ita ut sit $N^2 = AT \times CT$, quo valore substituto loco N^2 fit attractio in syzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$ & reductione facta ad eosdem denominatores fiunt istæ quantitates ut $178725\,N \times CT^2 - 2000\,AT^2 \times CT$ ad $178725\,N \times AT^2 + 1000\,CT^2 \times AT$.

(f) * *Velocitas Lunæ* &c. Quoniam in syzygiis & quadraturis arcus quos Luna describit sunt perpendiculares radiis AT, CT, areæ momenta dato tempore illic descripta sunt ut illi arcus & Radii AT, CT conjunctim, ii arcus dato tempore descripti sunt ut velocitates, ergo velocitates in syzygiis & quadraturis sunt ut arearum descriptarum momenta & Radii inversè.

(g) * *Sumatur* ratio duplicata velocitatum *inversè & ratio* simplex attractionum *directè*, factâque multiplicatione ut fractiones deleantur *fiet curvatura orbis Lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis* &c.

(h) * *i. e. ut.* Dividendo per $AT \times CT$, numeros signo $\times$ conjunctos in se invicem multiplicando neglectisque quatuor ultimis productorum cifris.

Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice assumamus ellipsin $DBCA$, in cujus centro T terra collocetur, & cujus axis major DC quadraturis, minor AB syzygiis interjaceat. (i) Cum autem planum ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur, & trajectoria cujus curvaturam consideramus describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam luna in ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est figura Cpa, cujus puncta singula p inveniuntur capiendo punctum quodvis P in ellipsi, quod locum lunæ repræsentet, & ducendo Tp æqualem TP, eâ lege ut angulus PTp æqualis sit motui apparenti solis à tempore quadraturæ C confecto; vel (quod (l) eodem ferè recidit) ut angulus CTp sit ad angulum CTP ut tempus revolutionis synodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ seu $29^d.\ 12^h.\ 44'$, ad $27^d.\ 7^h.\ 43'$. Capiatur igitur angulus CTa in eâdem ratione ad angulum rectum CTA; & sit longitudo Ta æqualis longitudini TA; & erit a apsis ima & C apsis summa orbis hujus Cpa. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis Cpa in vertice a, & curvaturam circuli centro T intervallo TA descripti, sit ad differentiam inter curva-

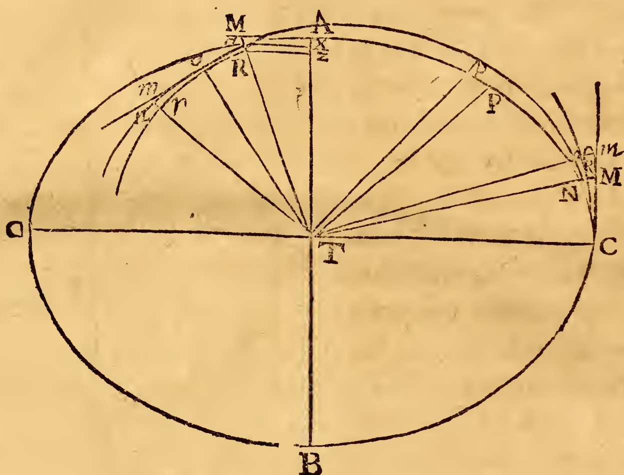


(i) * *Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur.* Axis enim minor hujus Ellipseos ad Solem perpetuò dirigitur, ideoque eodem motu quo sol circa terram revolvitur axis iste sive planum Ellipseos circa terram fertur.

(l) * *Quod eodem ferè recidit* quia Lunæ motus medius ab ipsius motu vero non multùm discrepat.

De Mundi Systemate.

vaturam ellipſeos in vertice *A* & curvaturam ejuſdem circuli; in (m) duplicatâ ratione anguli *CTP* ad angulum *CTp*; & (n) quod curvatura ellipſeos in *A* ſit ad curvaturam circuli illius,



113. (m) * *In duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp.* Centro T intervallo TA deſcribatur circuli arcus ARar, ſit arcus AR ad arcum ar in ratione datâ anguli CTP ad angulum CTp, ducantur Radii TR, Tr & producantur ita ut Tangentibus in A & a ductis occurrant in M & m, occurrant vero Ellipſi in N, & curvæ Cpa in n; erit NR = nr, quia ex conſtructione Tn ſumitur æqualis TN, & radii TR, Tr ſunt æquales; Evaneſcentibus autem arcubus ra & RA curvatura orbis Cpa in a erit ad curvaturam circuli radio TA deſcripti, ut mn ad mr, & ideo differentia inter curvaturam orbis Cpa in a & curvaturam circuli radio TA deſcripti eſt ad curvaturam ejuſdem circuli ut mr − mn ſive nr aut RN ad mr, ſimili modo patet quod curvatura circuli radio TA deſcripti eſt ad differentiam inter curvaturam Ellipſeos in vertice A & curvaturam ejuſdem circuli ut MR ad NR. Ideoque compoſitis rationibus differentia inter curvaturam orbis Cpa in a & curvaturam circuli radio TA deſcripti, eſt ad differentiam inter curvaturam Ellipſeos in A & curvaturam ejuſdem circuli ut MR ad mr, hoc eſt, (Cor. I. Lem. XI. Lib. I.) in ratione duplicatâ arcus RA ad arcum ra, ſive (per conſt.) in ratione duplicata anguli CTP ad angulum CTp.

(n) * *Et quod curvatura Ellipſeos in A &c.* Curvatura Ellipſeos in A eſt ad curvaturam circuli radio TA deſcripti in ratione MN ad MR; Ducatur verò NX tangenti parallela, & axi occurrens in X, & pariter RZ, erit per proprietatem Ellipſeos $AX \times XB$ ad NX^2 ut TA^2 ad TC, & per proprietatem circuli erit $AZ \times ZB = RZ^2$, ſed quia ſumuntur quantitates naſcentes eſt $AX = MN$, $AZ = MR$, $XB = AB = ZB$ & $NX = RZ$, quibus valoribus ſuo loco ſubſtitutis prima proportio evadit $MN \times AB : MR \times AB :: TA^2 : TC^2$ ideoque eſt MN ad MR, ſive curvatura Ellipſeos ad curvaturam circuli in duplicatâ ratione TA ad TC.

lius, in duplicatâ ratione *TA* ad *TC*; & (o) curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro *T* intervallo *TC* deſcripti, ut *TC* ad *TA*; (p) hujus autem curvatura ad curvaturam ellipſeos in *C*, in duplicatâ ratione *TA* ad *TC*; & (q) differentia inter curvaturam ellipſeos in vertice *C* & curvaturam circuli noviſſimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Cpa* in vertice *C* & curvaturam ejuſdem circuli, in duplicatâ ratione anguli *CTp* ad angulum *CTP*. Quæ quidem rationes ex ſinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His (r) autem inter ſe collatis, prodit curvatura figuræ

(o) * *Curvatura circuli* &c. Nam circulorum curvaturæ ſunt inversè ut eorum radii (not. 121. lib. 1.).

(p) * *Hujus autem curvatura*, poteſt demonſtrari eo ipſo modo quo demonſtravimus rationem curvaturæ Ellipſeos in A ad curvaturam circuli radio T A deſcripti (not. n).

(q) * *Et differentiam inter curvaturam Ellipſeos in vertice C* &c. Demonſtratio ferè eadem eſt ac in notâ (m): Centro C intervallo T C deſcribatur circuli arcus C R r, ſit arcus C R ad arcum C r, in ratione anguli C T P ad angulum C T p ducatur Tangens C M m, & Radii T R M, T r m quorum prior occurrat Ellipſi in N, poſterior curvæ C p a in n, erit N R = n r propter æquales TN, T n per curvæ conſt. & Radios æquales T R, T r; Evaneſcentibus arcubus C N, C n, curvatura Ellipſeos in C eſt ad curvaturam circuli radio T C deſcripti ut 113.
M N ad M R, ideoque curvaturarum Ellipſeos & circuli differentia eſt ad curvaturam circuli ut R N ad M R, ſimili modo curvatura circuli eſt ad curvaturam orbis C p a ut m r ad m n, ideoque curvatura circuli ad differentiam curvaturarum orbis C p a & circuli ut m r ad r n: itaque compoſitis rationibus erit curvaturarum Ellipſeos & circuli differentia ad curvaturarum orbis C p a & circuli differentiam ut m r ad M R hoc eſt in ratione duplicata arcus r C ad arcum R C, ſive in ratione duplicatâ anguli C T p ad angulum C T P.

(r) *His autem inter ſe collatis* &c. Ut pateat ordo quo iſtæ rationes componuntur, dicatur *s* tempus revolutionis Synodicæ, & *t* tempus revolutionis Periodicæ, eritque angulus C T P ad angulum C T p ut *t* ad *s*.

DE MUNDI SYSTEMATE.

guræ $C p a$ in a ad ipſius curvaturam in C, ut AT *cub.* $+ \frac{16824}{100000} CTq \times AT$ ad CT *cub.* $+ \frac{16824}{100000} ATq + CT$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum CTP & CTp applicatam ad quadratum anguli minoris CTP, ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum $27^d. 7^h. 43'$, & $29^d. 12^h. 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^d. 7^h. 43'$.

Igitur cum a deſignet ſyzygiam lunæ, & C ipſius quadraturam proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ orbis lunæ in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis, quam ſupra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062,79\ CTqq - 2151969\ N \times CT\,cub. + 368676\ N \times AT \times CTq + 36342\ ATq \times CTq - 362047\ N \times ATq \times CT + 2191371\ N \times AT\,cub + 4051,4\ ATqq = 0$. Hic pro terminorum AT & CT ſemiſumma N ſcri-

113. (1) Differentia curvaturarum orbis C p a in a & circuli radio T A deſcripti, eſt ad differentiam curvaturarum Ellipſeos in A & ejuſdem circuli ut tt ad ss (not. m).

(2) Curvatura Ellipſeos in A ad curvaturam circuli radio T A deſcripti ut TA^2 ad TC^2 (not. n).

(3) Hinc dividendo, differentia curvaturarum Ellipſeos in A & circuli eſt ad curvaturam ejuſdem circuli ut $TC^2 - TA^2$ ad TC^2: & per compoſitionem 1æ. & 3æ. proportionis

(4) Eſt differentia curvaturarum orbis C p a in a & circuli radio T A deſcripti ad curvaturam ejuſdem circuli ut $tt \times \overline{TA^2 - TC^2}$ ad $ss \times TC^2$,

(5) Hinc, convertendo curvatura orbis C p a in a ad curvaturam circuli radio T A deſcripti ut $ss\ TC^2 - tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$ ad $ss \times TC^2$.

(6) Curvatura circuli radio T A deſcripti, ad curvaturam circuli radio T C deſcripti ut T C ad T A.

(7) Curvatura circuli radio TC deſcripti ad curvaturam Ellipſeos in C ut TA^2 ad TC^2.

(8) Hinc, convertendo curvatura circuli radio T C deſcripti ad differentiam curvaturarum ejus circuli & Ellipſeos in C ut TA^2 ad $TC^2 - TA^2$.

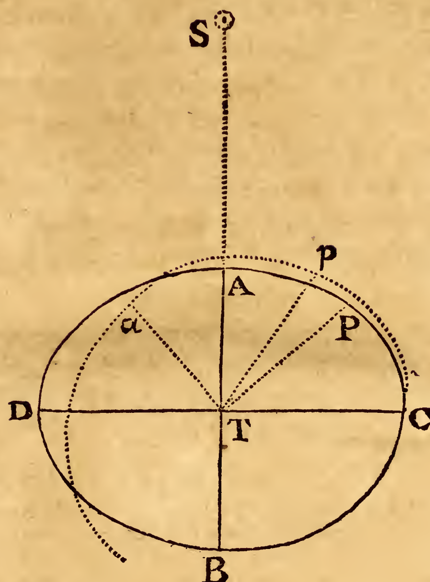
(9) Differentia curvaturarum ellipſeos in C & ejus circuli radio T C deſcripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C & ejuſdem circuli ut ss ad tt; & per compoſitionem 8æ.; & 9æ. proportionis eſt

(10) Curvatura circuli radio TC deſcripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C & ejuſdem circuli ut $TA^2 \times s^2$ ad $tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

(11) Et convertendo curvatura circuli radio T C deſcripti ad curvaturam figuræ C p a in C ut $TA \times s^2$ ad $TA^2 \times s^2 + tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

Hinc tandem ex æquo & per compoſitionem 5æ. 6æ. & hujus 11æ. proportionis, eſt curvatura orbis C p a in a, ad ejus curvaturam in C ut $\overline{s^2 \times TC^2 - tt \times \overline{TC^2 - TA^2}} \times TC$

ſcribo 1; & pro eorundem ſemidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: (ſ) quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſolutâ, obtinetur x æqualis 0,00719, & inde ſemidiameter CT fit 1,00719, & ſemidiameter AT 0,99281, qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proximè. (t) Eſt igitur diſtantia lunæ à terrâ in ſyzygiis ad ipſius diſtantiam in quadraturis (ſepoſitâ ſcilicet eccentricitatis conſideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.



PRO-

$\times TC \times TA^2 \times s^2$ ad $s^2 \times TC^2 \times TA \times (TA^2 \times s^2 + tt \times (TC^2 - TA^2))$ quæ diviſa per $s^2 \times TC \times TA$ fiunt ut $s^2 - tt \times TC^2 \times TA + t^2 \times TA^3$ ad $s^2 - tt \times TA^2 \times TC + tt \times TC^3$, omnibuſque diviſis per tt & inverſo terminorum ordine fiunt ut $TA^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TC^2 \times TA$ ad $TC^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TA^2 \times TC$. Q. E. I.

(ſ) *Quibus in æquatione ſcriptis.* Hæc æquatio fit $42456.19\, x^4 - 5082017.44\, x^3 + 148262.14\, x^2 - 12307251.44\, x + 88487.19 = 0$, ſed cum x debeat eſſe quantitas exigua omnes terminos præter duos ultimos negligit, & ex æquatione $12307251.44\, x = 88487.19$ valorem obtinet $x = \frac{88487.19}{12307251.44} = 0.00719$. 113.

(t) * *Eſt igitur diſtantia Lunæ à Terrâ &c.* Aſtronomis eſt cognitum, quod ſi diſtantia mediocris Lunæ à Terra incidat in tempus ſyzygiarum, ea diſtantia mediocris minor erit quam ſi incidat in tempus quadraturarum; Clar. Halleius ex obſervationibus Aſtronomicis deduxit diſtantiam mediocrem Lunæ à Terrâ in Syzygiis eſſe ad ipſius diſtantiam mediocrem in quadraturis ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$; quod ſi vel tantillùm propter obſervationum lubricitatem de hoc ultimo numero detrahatur facile accedit hæc ratio ad eam quam Newtonus deprehendit ſuo calculo.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem lunæ.

(u) Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam luna radio ad terram ducto describit. Si luna *P* in ellipsi *DBCA* circa terram in centro ellipseos quiescentem moveretur, & radio *TP* ad terram ducto describeret aream *CTP* tempori proportionalem; esset autem ellipseos semidiameter maxima *CT* ad semidiametrum minimam *TA* ut 70 ad 69: (x) foret tangens anguli *CTP* ad tangentem anguli motus medii à quadraturâ *C* com-

413. (u) * *Oritur hæc inæqualitas*, &c. Pergit Newtonus in hypothesi quod semotâ Solis actione orbis Lunæ circularis foret; in præcedenti verò Propositione, determinavit quamnam mutationem induceret illi circulo vis Solis, quâtenus ea ejus portio assumitur quæ ad centrum terræ spectat & cum gravitate Lunæ versus terram sociatur; itaque, sumpto novam figuram orbis Lunaris ad Ellipsim posse revocari, demonstrat in Prop. præcedente eam Ellipsim talem esse ut axis major sit ad minorem ut 70 ad 69; Motus autem Lunæ in tali Ellipsi debet fieri ita ut areæ descriptæ circa centrum terræ sint temporibus proportionales, quia vires quæ assumuntur ad id centrum diriguntur; cumque areæ illæ Ellipticæ, angulis in centro factis proportionales non sint, sequitur illos angulos in centro factos temporibus proportionales non esse, ideoque aliquid corrigendum esse motui medio Lunæ, in quo Anguli in centro terræ facti proportionales temporibus assumuntur, ut habeatur Lunæ motus Verus; & hæc correctio constituet partem variationis, quæ est, in hâc hypothesi, arcus interceptus inter locum medium Lunæ & locum ejus verum & hæc pars variationis *ex formâ ellipticâ* quam assumit *orbis Lunaris* per Solis actionem *oritur.*

Altera pars variationis oritur ex eâ actionis Solis parte quam consideravit Newtonus Prop. XXVI. & quâ fit ut ipsæ areæ à Lunâ descriptæ temporibus non sint proportionales, area itaque tempori proportionalis corrigenda est, idque detrahendum vel addendum quod debetur illi actioni, quodque per constructionem Probl. nostri n. 110. determinare facillimum erit, quam quidem constructionem non dedit Newtonus, quasi mediocribus uteretur quantitatibus ex æquo, ut aiunt, & bono assumptis, verum vix dubitandum quin ad hanc vel similem constructionem respexerit, ii enim non erant casus quibus hæc media sine demonstratione assumi possent à Viro summè accurato & perspicace.

(x) * *Foret Anguli Tangens.* Sit CADB ellipsis quam Luna describit, ita ut areæ circa centrum T sint temporibus proportionales, describatur circulus eodem centro, radio TC, in ejus circuli circumferentia moveatur Luna motu medio, sumaturque in eo circulo arcus CΠ tempori cuivis dato proportionalis, ducta ordinata ΠPK, dico quod area Elliptica TCP erit tempori proportionalis hoc est quod tota area Elliptica erit ad eum sectorem TCP ut est tempus Periodicum Lunæ ad tempus datum.

Est enim tota circuli circumferentia ad arcum CΠ, sive totus circulus ad aream CT

computati, ut ellipseos semidiameter *TA* ad ejusdem semidiametrum *TC* seu 69 ad 70. (y) Debet autem descriptio areæ *CTP*, in progressu lunæ à quadraturâ ad syzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in syzygiâ lunæ sit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio *P* supra momentum in quadraturâ sit ut quadratum sinus anguli *CTP*. Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli diminuatur in subduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073,

C T Π, ut tempus Periodicum totum ad tempus datum ex constructione, sed ex notâ circuli & Ellipseos proprietate, est tota area elliptica ad totam aream circuli ut T A ad C T, & pariter est sector CTP ad CT Π ut T A ad C T (nam Triangula Rectilinea TPK, T Π K sunt ut bases PK, Π K; areæ curvilineæ CPK, C Π K sunt etiam, ex notâ Ellipseos & circuli proprietate ut P K ad Π K, ergo toti sectores C T P, C T Π sunt ut P K ad Π K, quæ sunt ut T A ad C T,) ergo tota area Elliptica est ad aream circuli ut sector C T P ad C T Π, & alternando, tota area Elliptica ad sectorem C T P, ut est circuli area ad C T Π, seu ut est Tempus Periodicum, ad tempus datum.

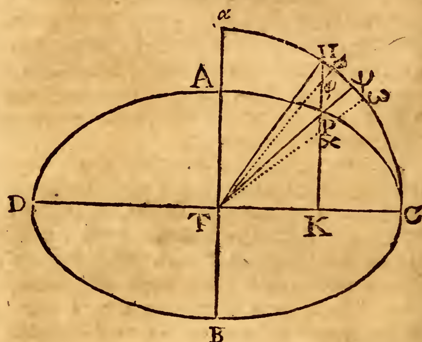
Si ergo area C T P sit tempori proportionalis, motus Lunæ qui à terrâ videri debuisset sub angulo C T Π si Luna motu medio fuisset lata, videbitur sub angulo C T P, & si linea T K pro radio assumatur erit K P tangens anguli C T P, &

K Π tangens Anguli C T Π, sed est P K ad Π K ut T A ad C T, ergo *tangens anguli CTP est ad tangentem anguli motus medii ut TA ad TC seu 69 ad 70.* 113.

(y) * *Debet autem descriptio areæ &c.* Manentibus iis omnibus quæ in notis 112. & 113., exposita fuerunt, arcus variationis erit $\frac{PK \times TK}{l+r}$ (per cor. 2. not. 113.) sumatur ergo in arcu C Π versus C arcus

De Mundi Systemate. 11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli *CTP* jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus *CTP* in octantibus, ubi motus medius est 45gr. invenietur 44gr. 27'. 28''. qui subductus de angulo motus medii 45gr. relinquit (z) variationem maximam 32'. 32''. Hæc ita se haberent si luna, pergendo à quadraturâ ad syzygiam, describeret angulum *CTA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum terræ, quo sol in consequentia motu apparente transfertur, luna, priusquam solem assequi-

114 $\Pi\varpi = \frac{PK \times TK}{l+r}$ sive (quia in hâc figura Π respondet litteræ P in not. 110 assumptæ) $= \frac{\Pi K \times TK}{l+r}$, ducatur ϖT quæ secet lineam ΠK in φ Triangulum Πϖφ simile erit Triangulo TKφ, sive propter exiguitatem anguli ΠTϖ Triangulum Πϖφ simile erit Triangulo TKΠ, hinc erit TK ad TΠ (*r*) sicut Πϖ $\left(\frac{\Pi K \times TK}{l+r}\right)$ ad Πφ quod erit itaque $\frac{r \times \Pi K}{l+r}$, ideoque erit Kφ ($= \Pi K - \Pi\varphi$) $= \frac{\overline{l+r} \times \Pi K - r \times \Pi K}{l+r} = \frac{l \times \Pi K}{l+r}$, unde habetur hæc proportio $l+r : l :: \Pi K : \varphi K$; si verò sumatur TK pro radio, erit ΠK Tangens motus medii & φK Tangens motus medii imminuti hac variationis portione; Debet minui in eadem ratione quam proximè, Tangens PK motus Lunæ in Ellipsi spectatæ aut saltem in ratione paulo minore; cum itaque $l+r$, sit medium Arithmeticum inter $l+2r$ sive 11073 & *l* sive 10973, & ratio medii Arithmetici ad minimum extremorum sit paulo major quam medii Geometrici ad eum extremum, satis accurate fieri dicit si sumatur Tangens PK ad Tangentem anguli motus veri Lunæ ut medium Geometricum inter 11073 & 10973 ad 10973, sive in subduplicatâ ratione 11073 ad 10973; quæ est æqualis rationi 69 ad 68,6877 cum ergò sit ΠK ad PK ut 70 ad 69, & cum sit PK ad Tangentem motus Lunæ ultimò correcti ut 69 ad 68.6877 erit ex æquo Tangens motus medii ad Tangentem motus veri ut 70 ad 68.6877. Q. E. D.



(z) 114. *Relinquit variationem maximam.* Ex Cor. 4. not. 113. arcum variationis quæ pendet ex inæqualitate momentorum areæ, maximum esse in octantibus constat; Eam autem variationis portionem quæ pendet ex formâ Ellipticâ orbis Lunaris etiam maximam esse in octantibus hoc modo patet, producatur TP in Ψ & cum arcus ΠΨ vix excedat semigradum ubi maximus est pro recta sumatur, erit Triangulus ΠΨP similis Triangulo TKP, sive TKΠ ideoque est TΠ ad TK ut ΠP ad ΠΨ qui erit ergo ubivis æqualis $\frac{\Pi P \times TK}{T\Pi}$, sed quoniam est ubivis 70 ad 69 ut ΠK ad PK, erit dividendo 70 ad 1 ut ΠK ad

quitur, describit angulum CTa angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris synodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id est, in ratione $29^d. 12^h. 44'$. ad $27^d. 7^h. 43'$. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eâdem ratione, & variatio maxima quæ secus esset $32'. 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'. 10''$.

Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantiâ solis à terrâ, (a) neglectis differentiis quæ à curvaturâ orbis magni majorique solis actione in lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, oriri possint. In (b) aliis distantiis solis à ter-

114.

ad II P ideoque est $IIP = \frac{IIK}{70}$ & arcus $II\Psi$ erit $\frac{IIK \times TK}{70 T II}$, jam autem demonstratum est nota 111. quod maximum hujus quantitatis $IIK \times TK$ est in octantibus, ergo arcus $II\Psi$ sive ea variationis portio quæ pendet ex formâ Ellipticâ orbis Lunaris est maxima in Octantibus sicut & altera portio, ergo Variatio tota est maxima in Octantibus.

(a) * *Neglectis differentiis quæ à curvatura orbis magni oriri possint.* Hactenus suppositum est, lineam DTC repræsentare orbis magni portionem, & fieri quadraturas in punctis D & C; quod quidem absolutè verum non est, quippe semi-Diameter orbis Lunaris sub Angulo 10 circiter minutorum à Sole videtur, unde arcus DC est 20' circiter & aliquam habet curvaturam, hinc revera utraque quadratura est circiter 20' propior conjunctioni quam oppositioni, quæ consideratio hic neglecta est.

Majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, si vis Solis in punctum T exprimatur per $\frac{1}{ST^2}$ erit vis in Lunam novam & falcatam ut $\frac{1}{(ST-TA)^2}$ & vis in Lunam plenam & gibbosam ut $\frac{1}{(ST+TA)^2}$ revocentur omnia ad communem denominationem erit vis in punctum T ut $\overline{ST-TA}^2 \times \overline{ST+TA}^2$ sive $ST^4 - 2ST^2 \times TA^2 + TA^4$, vis in Lunam novam $ST^4 + 2ST^3 \times TA + TA^2 \times ST^2$, vis in Lunam plenam $ST^4 - 2ST^3 \times TA + ST^2 \times TA^2$; Hinc excessus vis in Lunam novam supra vim mediocrem est $2ST^3 \times TA + 3ST^2 \times TA^2 - TA^4$; Et excessus vis mediocris supra vim in Lunam plenam est $2ST^3 \times TA - 3ST^2 \times TA^2 + TA^4$, qui quidem excessus differunt, & prior posteriorem superat quantitate $6ST^2 \times TA^2 - 2TA^4$; Verum propter magnitudinem lineæ ST præ linea TA, evanescit ferè hæc excessuum differentia respectu quantitatis communis $2ST^3 \times TA$, ideo pro æqualibus fuerunt habiti.

(b) *In aliis distantiis Solis à Terrâ.* Duplex est causa quæ errores ab actione Solis pendentes mutet, primum vis solis mediocris mutatur inversè ut quadrata distantiarum & præterea cum Sol celerior vel tardior fiat prout propior est vel remotior à Terra, Luna è converso ipsum tardius vel celerius attingit, unde mensis Synodicus in Perigæo Solis fit longior quam idem mensis Synodicus in Apogæo; ex hac ultimâ causâ, si sola consideretur, fiet ut variatio maxima in ratione duplicatâ temporis revolutionis Synodicæ crescat, quod quidem separatim demonstrandum de utrâque variationis portione $II\Psi$ & $\Psi\omega$; Et quidem in octantibus cum Triangulum $IIP\Psi$ sit Rectangulum Isosceles, est $II\Psi = \frac{IIP}{\sqrt{2}}$, est verò $IIP = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$, nam ex naturâ circuli & Ellipseos

DE MUNDI SYSTEMATE. râ, variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis synodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, & triplicatâ ratione distantiæ solis à terrâ inversè. (c) Ideoque in apogæo solis, variatio maxima est 33'. 14'', & in ejus perigæo 37'. 11'', si modo eccentricitas solis sit ad orbis magni semidiametrum transversam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000.

Hac-

114. est αT ad AT ut ΠK ad PK & dividendo αT ad αA ut ΠK ad $\Pi P = \frac{\alpha A \times \Pi K}{\alpha T}$ sed in octante est $\Pi K = \frac{\alpha T}{\sqrt{2}}$ ergo $\Pi P = \frac{\alpha A \times \alpha T}{\alpha T \sqrt{2}} = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$ hinc $\Pi \Psi = \frac{\alpha A}{2}$, est autem αA effectus virium Solis Lunam retrahentium à suo circulo, durante quartâ parte temporis revolutionis Synodicæ Lunæ, ergo si id tempus crescat manentibus iisdem viribus similiter agentibus, effectus totus αA erit ut quadratum temporis per quod illæ vires egerunt per Cor. I. Lem. X. lib. I. ideoque ΠΨ crescit secundum quadrata temporum.

Idem demonstrabitur de portione variationis Ψω quæ pendet ex acceleratione descriptionis areæ; Quippe manentibus omnibus ut in not. 111. & fig. 3ª. recta CA majus tempus designare censeatur, & partes Pp tempuscula in eadem ratione longiora, lineæ PM designant velocitates genitas durante momento Pp, si ergo id momentum crescat viribus generatricibus iisdem manentibus, velocitates genitæ PM crescent in proportione temporis, & quia PpM m designat spatiolum illâ velocitate percursum, crescuntque & PM & Pp in ratione temporum, crescet PMmp in ratione duplicatâ temporum, cumque singula elementa curvæ in eâ proportione crescant, & tota area CAH, & ei æqualis CAXY, ejusque dimidia CQZY in eâdem proportione crescent; ex quâ si detrahatur CQZ quod in eâdem proportione crevit, reliquum CZY quod areæ variationi maximæ ΨTω est proportionale crescet etiam in eâdem duplicatâ ratione temporum, manente itaque radio Tω, ipse arcus Ψω crescet in duplicatâ ratione temporum.

Hinc cum ΠΨ crescat in duplicatâ ratione temporum tum etiam Ψω, summa itaque Πω sive tota variatio crescet in eâdem duplicatâ temporum ratione.

Dico præterea quod si spectetur imminutio actionis Solis propter auctam distantiam variatio maxima decrescet in ratione triplicatâ distantiarum, nam designetur vis mediocris Solis per $\frac{1}{SK^2}$, est ex constructione SK ad TM ut vis Solis sive ut $\frac{1}{SK^2}$ ad vim TM ergo ea vis TM est ut $\frac{TM}{SK^3}$ manente ergo TM quæ est æqualis PT; vis TM ex actione Solis pendens decrescit ut distantiarum cubus augetur, Manente ergo tempore, sed vi mutatâ secundum rationem triplicatam, eadem ferè ratione ac prius ostendetur utramque variationis maximæ partem ΠΨω & Ψω forè inversè in ratione triplicatâ distantiarum Solis; *Hincque in variis Solis à terrâ distantiis quæ in* datis anni temporibus recurrunt *variationes maximæ erunt inter se in ratione duplicatâ durationis mensis Synodici eo tempore, & triplicatâ inversè distantiæ solis à terrâ.*

(c) * *Ideoque* &c. Ex his & præcedentibus facile intelligitur Newtoni calculus, si prius hæc Principia revocentur.

1°. Si dicatur *m* distantia mediocris Solis, sit ± *e* excessus vel defectus ejus distantiæ à mediocri distantiâ in loco quovis dato; denique dicatur *s* solis motus horarius mediocris, dico quod solis motus

Hactenus variationem investigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique luna in octantibus suis semper est in mediocri suâ distantiâ à terrâ. Si luna propter eccentricitatem suam, magis vel minus distat à terrâ quam si locaretur in hoc orbe, variatio LIBER TERTIUS. PROP. XXIX. PROBL. X.

tus horarius in loco quovis suæ orbitæ exprimetur per quantitatem $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e}^2}$.

Sit enim T Terra; P, Sol; T P p area horæ tempore descripta, ejus areæ valor ubivis erit semper idem, sit p q arcus radio T p descriptus, qui ob exiguitatem sumi potest ut ipsum perpendiculum in basim PT demissum, ideoque ob areas ubivis æquales is arcus erit ubivis inversè ut basis T P, sed numerus graduum ejus arcus p q est directè ut is ipse arcus & inversè ut ejus radius T p sive T P, ergo numerus graduum ejus arcus p q est in ratione duplicatâ inversa radii T P, is verò numerus exprimit motum Solis horarium, ergo Solis motus horarius, est inversè ut quadratum radii T P; cum ergo in distantiâ mediocri est T P = m, in quâvis aliâ distantiâ est T P = $m \pm e$, ergo est $\frac{1}{m^2}$ ad $\frac{1}{(m \pm e)^2}$ ut s ad $\frac{s m^2}{(m \pm e)^2}$ quod exprimit motum horarium Solis in quâvis distantiâ T P.



In distantiâ mediocri evanescit quantitas $\pm e$ ideoque motus horarius illic evadit $\frac{m^2 s}{m^2} = s$ secundum hypothesim.

2°. Posito Lunam semper moveri motu suo horario mediocri, qui dicatur l, sitque p ejus tempus Periodicum inter fixas, Duratio mensis Synodici quovis in loco orbitæ telluris circa Solem, exprimetur per quantitatem $\frac{\overline{m \pm e}^2 \times l p}{\overline{m \pm e}^2 l - m^2 s}$ sive divisâ hâc quantitate per constantem $\frac{l p}{m^2}$ fiet mensis Synodicus ut $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l - s \pm \frac{2 l e}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ 114.

Nam dicatur x numerus graduum quem Sol emetitur durante quovis mense Synodico, numerus graduum quem Luna eodem tempore emetietur erit $360 + x$, erit ergo motus horarius Lunæ l ad motum horarium Solis $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e}^2}$ ut $360 + x$ ad x, & dividendo $m^2 l \pm 2mel + e^2 - m^2 s$ ad $m^2 s$ ut 360 ad x, itaque erit $x = \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$. Hinc cùm Lunâ percurrat 360 gr. tempore p, absolvet $360^{gr.} + \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 - m^2 s}$ tempore $p + \frac{m^2 s p}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$ sive reductione facta, tempore $\frac{m^2 l p \pm 2 m e l p + e^2 l p - m^2 s p + m^2 s p}{m^2 \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$ sive $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{l p}{m^2}$ quæ quantitas divisa per constantem $\frac{l p}{m^2}$, relinquit quantitatem $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ quæ erit ut duratio mensis Synodici in distantiâ quavis $m \pm e$. Q. E. D.

In distantia mediocri evanescente quantitate $\pm e$ mensis Synodicus erit $\frac{m^2 l p}{m^2 l - m^2 s} = \frac{l p}{l - s}$ & erit ad menses Synodicos in aliis

DE MUNDI SYSTEMATE. tio paulo major esse potest vel paulo minor quam pro regulâ hic allatâ: sed excessum vel defectum ab astronomis per phænomena determinandum relinquo.

114. aliis quibusvis distantiis ut $\frac{m^2}{l-s}$ ad $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$.

3°. Variatio maxima erit ubivis ut $\frac{m \pm e}{\overline{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}^2}$: Nam, ex hâc ipsâ Propositione variatio maxima est directè ut quadratum temporis Synodici & inversè ut cubus distantiæ sive in ratione compositâ quantitatum $\frac{\overline{m \pm e}^4}{\overline{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}^2}$ & $\frac{1}{\overline{m \pm e}^3}$ ideoque ut $\frac{m \pm e}{\overline{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}^2}$.

Coroll. In distantiâ mediocri variatio maxima exprimitur per quantitatem $\frac{m}{\overline{l-s}^2}$ & eam superius determinavit Newtonus ferè 35″ 10‴ sive 2110‴; Hinc itaque ut habeatur variatio maxima in quovis orbitæ Solaris puncto fiat ut $\frac{m}{\overline{l-s}^2}$ ad $\frac{m \pm e}{\overline{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}^2}$ ita 2110‴ ad variationem maximam quæsitam, quæ itaque erit $\frac{\overline{l-s}^2}{\overline{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}^2} \times \frac{m \pm e}{m} \times 2110'''$, (sive accuratius $\times$ 2109‴.8.)

Ratio autem motus horarii Lunæ l ad motum horarium Solis s obtinetur ex tempore Periodico utriusque inter stellas fixas, itaque cum tempus Periodicum Lunæ sit 27^d. 7^h. 43′ & annus sidereus Solis 365^d. 6^h. 9′ & velocitates mediocres sive motus horarii mediocres sint inversè ut ista tempora Periodica erit l ad s ut 1,081 ad 0.81 ideoque erit $l-s=1$, & Variationis maximæ expressio fiet $\frac{1}{\overline{1 \pm \frac{2.162\,e}{m} + \frac{1.081\,e^2}{m^2}}^2} \times \frac{m \pm e}{m} \times$ 2109.8‴. Cumque m sit 1000 & in Apogæo $\frac{m+e}{m}$ sit 1.016 $\frac{15}{16}$ in Perigæo vero sit $\frac{m-e}{m} = .983\frac{15}{16}$ hæc ducta in 2109.8‴ efficiunt in Apogæo 2145.5‴ & in Perigæo 2074‴, sed cum sit $e = 16\frac{15}{16}$ quantitas $\frac{2.162\,e}{m}$ evadit .036618875 & $\frac{1.081\,e}{m^2}$ est .00031027. Unde quantitas $1 + \frac{2.162e^2}{m} + \frac{1.081\,e^2}{m^2}$ fit 1,03665 & $1 - \frac{2.162e}{m} + \frac{1.081e^2}{m^2}$ fit .9637.

Dividatur ergo bis 2145′.5‴ per 1.037 quotiens dabit variationem maximam in Apogæo 1994‴ sive 33″. 14‴, & dividatur bis 2074‴ per .964 quotiens dabit variationem maximam in Perigæo quam proximè 2231 sive 37″ 11‴.

PRO-

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe circulari.

Designet S solem, T terram, P lunam, NPn orbem lunæ, Npn (d) vestigium orbis in plano eclipticæ; N, n nodos, $nTNm$ lineam nodorum infinitè productam; PI, PK perpendicula demissa in lineas ST, Qq; Pp perpendiculum demissum in planum eclipticæ; A, B syzygias lunæ in plano eclipticæ; AZ perpendiculum in lineam nodorum Nn; Q, q quadraturas lunæ in plano eclipticæ, & pK perpendiculum in lineam

Qq

(d) * *Vestigium orbis in plano Eclipticæ.* Hoc est orbis genitus demittendo ex singulis punctis orbitæ Lunaris perpendicula ad planum Eclipticæ.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Q q quadraturis interjacentem. Vis ſolis ad perturbandum motum (per prop. xxv.) duplex eſt, altera lineæ *L M* in ſchemate propoſitionis illius, altera lineæ *MT* proportionalis. Et luna vi priore in terram, poſteriore in ſolem ſecundum lineam rectæ *ST* à terrâ ad ſolem ductæ parallelam trahitur. Vis prior *L M* agit ſecundum planum orbis lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior *MT* quâ planum orbis lunaris perturbatur eadem (e) eſt cum vi 3 *P K* vel 3 *IT*. Et (f) hæc vis (per prop. xxv.) eſt ad vim

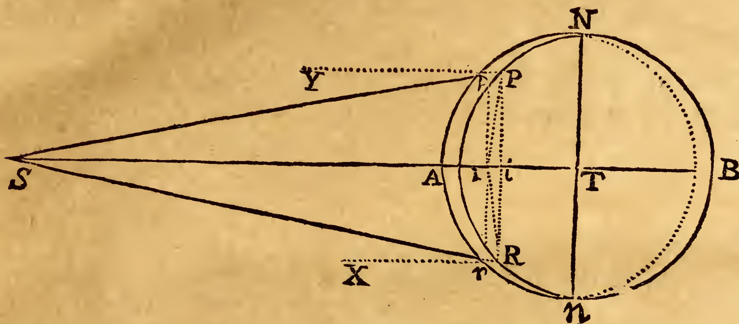
114. (e) * *Eadem eſt cum vi* 3 *PK* (Prop. XXV. not. u).

(f) * *Et hæc vis eſt ad vim qua Lunâ in circulo circa terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet.* Vis T M T eſt ad vim M L ut eſt 3 P K ſive 3 I T ad Radium, (Prop. XXVI. not. x); vis M L eſt ad vim quâ Luna circa terram tempore ſuo Periodico revolvi poſſet ut 1 ad 178.725 (Prop. XXV. not. r). Ergo, ex æquo, & conjunctis rationibus, eſt vis M T ad vim quâ Luna circa terram tempore ſuo Periodico revolvi poſſet ut eſt 3 I T ad Radium circuli multiplicatum per 178.725.

quâ lunâ in circulo circa terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut $3\,IT$ ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut IT ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo, & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à lunâ ad solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à terrâ ad solem ducitur, (g) propterea quod inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantùm auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.

Designet



(g) * *Propterea quod Inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus quantùm auget in aliis.* Exempli gratiâ, sint nodi in quadraturis, spectet urque Luna in punctis P & R æqualiter à quadraturis N & n distantibus & vis obliqua Solis SP, SR in ipsam agere concipiatur, quæ in duas dividatur, unam Parallelam lineæ ST, secundum directiones PY, RX agentem, alteram huic perpendicularem secundum directiones PI, RI; de effectu vis secundum directiones PY, RX agentis in hoc Problemate actum est; directiones verò PI, RI sese mutuo compensant; dividatur enim rursus vis PI, RI in duas vires unam Pi, Ri secundum planum orbitæ Lunaris agentem ideoque nodorum positionem non turbantem, alteram Pp, Rr ipsi perpendicularem; hæc nodorum positionem, planique inclinationem afficiet, sed cum de plani inclinatione hic non agatur, manere plani inclinationem fingatur, itaque vis Pp, Rr dum admovet puncta P & R ad Eclipticam efficit ut nodis viciniores videantur seu ut nodi versus puncta illa moveri censeantur, ideoque actio in punctum P efficit ut nodus N in consequentia feratur & actio in punctum R efficit ut nodus n in antecedentia fertur, ideoque, Solis actio obliqua in punctum P motum retrogressivum nodi natum ex vi PY parallela lineæ ST tantùm minuit quantùm eadem actio obliqua in punctum R auget eum motum retrogressivum natum ex vi RX. 114.

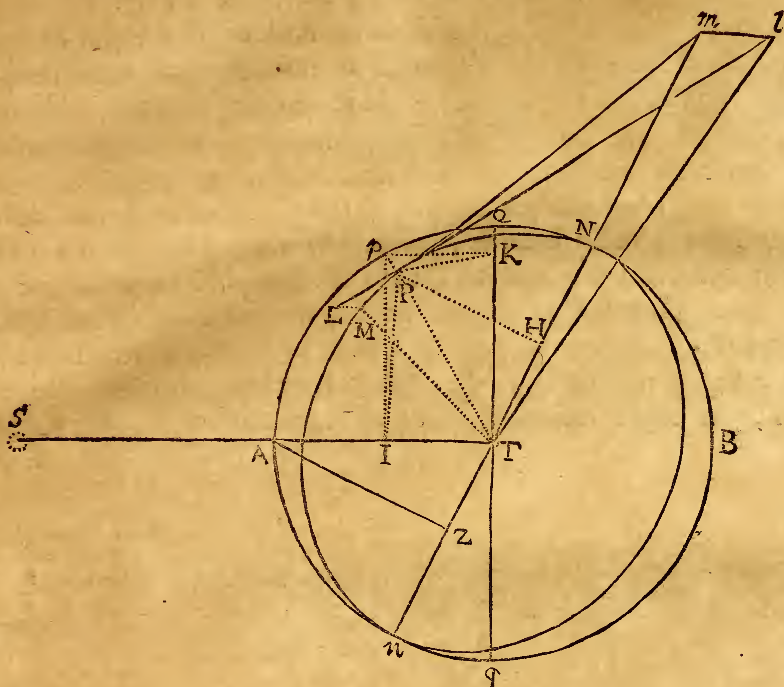
DE MUNDI SYSTEMATE.

Designet jam *PM* arcum, quem luna dato tempore quam minimo describit, & *ML* lineolam cujus dimidium luna, impellente vi præfatâ 3 *IT*, eodem tempore describere posset. (h) Jungantur *PL*, *MP*, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi secent planum eclipticæ; inque *Tm* demittatur perpendiculum *PH*. Et quoniam recta *ML* parallela est plano eclipticæ, ideoque cum rectâ *ml* quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi *LMPml*; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula *LMP*, *lmP*. Jam cum *MPm* sit in plano orbis, in quo luna in loco *P* movebatur, incidet punctum *m* in lineam *Nn* per orbis illius nodos *N*, *n* ductam. Et quoniam vis quâ dimidium lineolæ *LM* generatur, si tota simul & semel in loco *P* impressa esset, generaret lineam illam totam; & efficeret ut luna moveretur in arcu, cujus chorda esset *LP*, atque ideo transferret lunam de plano *MPmT* in planum *LPlT*; motus angularis nodorum à vi illâ genitus, æqualis erit angulo *mTl*. Est

114. (h) * *Et ML lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi 3 IT* describeret tempore quo Luna arcum PM percurreret; Assumit utique Newtonus ut rei conceptus facilior fiat, actiones omnes vis 3 IT quæ exercitæ fuerunt dum arcus PM percurritur *simul & semel in loco P impressas esse*, sicque motum Lunæ ex P motæ, esse compositum ex velocitate acquisitâ secundum Tangentem, & ex velocitate ultimo genitâ per actionem vis 3 IT agentem tempore æquali illi quo describitur arcus PM, ita ut Luna sequatur Diagonalem Parallelogrammi cujus unum latus sit PM alterum vero Parallelum & æquale lineæ LM; cum autem vis 3 IT exiguo temporis intervallo sensibiliter non mutetur, toto tempore quo describeretur lineola PM ea vis pro uniformi adsumi potest, hinc via quæ describitur per velocitatem uniformiter crescentem ab eâ vi 3 IT genitam est dimidia ejus viæ quæ describeretur per ultimam velocitatem in fine temporis PM genitam, & uniformem manentem toto tempore PM, quod eâdem ratione probari potest ac probatum fuit de gravitatis actione n. 30. Lib. I.

Quod si quis objiciat hinc fieri ut punctum L male repræsentet locum Lunæ, & locum ejus veriorem fore in medio inter M & L, respondemus solutionem hujus Problematis ex eâ positione Lunæ neutiquam pendere, hæc enim solutio duabus constat partibus, priori statuitur ratio motus nodorum in quibusvis punctis P orbitæ Lunaris, & hæc ratio eadem est sive ubique sumatur tota ML aut ubique ejus dimidium, dimidia enim sunt totis proportionalia; In secunda solutionis parte determinatur quantitas motus nodorum in syzygiis ipsis, respectu motus Lunæ in suâ orbita, & in hâc determinatione nihil deducitur ex magnitudine lineæ LM, sed tota hæc solutionis pars pendet ex proportione ipsius vis 3 IT ad vim centripetam Lunæ, unde nullus error metuendus est in hoc calculo ex hâc falsâ suppositione Lunam in puncto L versari cum in medio inter L & M collocanda fuisset.

Est autem ml ad mP ut ML ad MP, ideoque cum MP ob datum tempus data sit, est ml ut rectangulum $ML \times mP$, id est, (i) ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, si (k) mo- LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.



do angulus TMl rectus sit, est ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id est (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideo-

(i) * *Ut Rectangulam* $IT \times mP$. Linea ML est duplum viæ quæ dato tempore per actionem 3 IT percurritur, vis illa 3 IT dato illo tempore uniformis manere censetur, itaque in diversis punctis P, viæ eodem dato tempore per actiones 3 IT percursæ sunt ut illæ vires 3 IT, sive ut IT, ergo ML ejus viæ duplum est etiam ut IT, & MI $\times mP$ est ut $IT \times mP$.

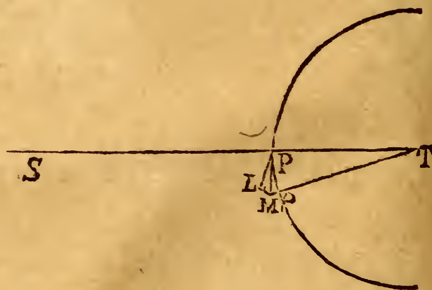
(k) * *Si modo angulus* Tml *sit rectus* cum angulus mTl sit admodum exiguus, si angulus Tml sit rectus, usurpari poterit recta ml pro arcu circuli cujus radius est Tm ideoque (154. lib. 1.) angulus mTl est ut $\frac{ml}{Tm}$. 114.

De Mundi Systemate.

que ob datam TP, ut $IT \times PH$. Quod si angulus Tml, seu STN obliquus sit, (l) erit angulus mTl adhuc minor, in ratione sinus anguli STN ad radium, seu AZ ad AT. Est igitur velocitas nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, nodis in quadraturis & luna in syzygiâ existentibus, recti sint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in casu, angulus mPl est ad angulum PTM, quem luna eodem tempore motu suo apparente circa terram describit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis est angulo LPM, id est, angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem sola vis præfata solaris $3IT$, si tum cessaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare posset; (m) & angulus PTM æqualis est angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem vis illa, quâ luna in orbe suo retinetur, si tum cessaret vis solaris $3IT$, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo

114. (l) * *Erit angulus mTl, in ratione sinus anguli STN ad radium* in Triangulo Tml, est sinus anguli mTl ad sinum Anguli Tml ut latus ml ad latus Tl; Sed propter exiguitatem lateris ml respectu lateris Tl, ratio ml ad Tl eadem semper manere censetur qualiscumque sit angulus Tml, manentibus lineis ml & Tm; in angulo enim maximo linea Tl evadit $Tm + ml$, in minimo $Tm - ml$, est verò ml quantitas evanescens respectu Tm, hinc illius incrementi aut decrementi ml ratio nulla est habenda; Itaque manente quantitate ml qualiscumque sit angulus Tml, ratio ml ad Tl eadem est, itaque etiam manet ratio sinus anguli mTl ad sinum anguli Tml, sive etiam, cum anguli minimi, sint ut eorum sinus, anguli mTl in variâ inclinatione lineæ datæ ml ad lineam datam Tm sunt inter se ut sinus Angulorum Tml, est ergo angulus mTl, in quâvis magnitudine anguli Tml ad eum angulum mTl quando angulus Tml est rectus ut sinus anguli Tml (vel, ut sinus anguli ITn ipsi æqualis ob parallelas ST, ml) ad sinum anguli recti, hoc est ut sinus anguli STN qui idem est cum sinu anguli STn ad Radium. Q. E. O.



(m) * *Et angulus PTM æqualis est angulo deflexionis.* Angulus MPp est angulus deflexionis de quo nunc agitur Triangula verò MPp, MPT sunt similia ob angulum communem PMT, & angulos rectos TPM & PpM, hinc anguli residui PTM, MPp sunt æquales.

LIBER TERTIUS PROP. XXX. PROB. XI.

(n) Ergo cum motus medius horarius lunæ reſpectu fixarum ſit $32'.\ 56''.\ 27'''.\ 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius nodi in hoc caſu erit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (ſeu diſtantiarum lunæ à quadraturâ, lunæ à nodo, & nodi à ſole) ad cubum radii.

(n) * *Ergo* &c. Iſti anguli deflexionis debent eſſe ut vires illas deflexiones producentes, in hoc enim caſu, utrâque vis agit perpendiculariter ad Tangentem PM hinc lineolæ Mp, ML per eas vires genitæ tempore eodem, eo nempe quo percurretur Tangentis portio PM, debent eſſe ut ipſæ illæ vires; eæ verò lineolæ ſumpto PM pro radio ſunt Tangentes angulorum deflexionis pPM, MPL, & anguli quam minimi ſunt ut ipſorum Tangentes, ergo anguli illi deflexionis ſunt ut vires illas producentes, motus autem horarii lunæ & nodorum ſunt ipſi anguli PTM & mTl, qui ſunt ex demonſtratis æquales angulis deflexionum MPp, MPL, ergo motus horarii ſunt ut vires illas deflexiones producentes. Q. E. O. 114.

DE MUNDI SYSTEMATE.

(o) Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum singulis mensibus feruntur in antecedentia.

Co-

114. (o) * *Et quoties signum alicujus Anguli de affirmativo* &c. Angulos Q T P & NTP, positivos vocat Newtonus, quando punctum P est in consequentia respectu punctorum Q vel N ad quæ referuntur, hoc est Angulus Q T P est positivus quoties arcus Q P, ab ultimâ quadraturâ Q numeratus in consequentia non excedit 180gr. negativus verò cum arcus Q P excedit 180gr.; angulus N T P pariter est positivus cum arcus N P à nodo ascendente in consequentia numeratus non excedit 180gr. negativus verò est cum is arcus N P excedit 180gr. Quando enim arcus Q P, N P excedunt 180gr. tunc anguli Q T P, N T P non amplius numerantur secundum Lunæ directionem, seu secundum viam quam Luna est emensa, sed secundum viam quæ ipsi describenda superest ut ad puncta Q & N redeat, hinc illi anguli negativi dicuntur, eorum respectu qui secundum viam à Lunâ descriptam mensurantur.

Angulus verò S T N positivus dicitur quando arcus A N à loco conjunctionis Lunæ cum Sole usque ad nodum contra ordinem signorum numeratus, est minor 180gr., negativus verò dicitur cum excedit 180gr., quia, cum nodi moveantur contra ordinem signorum sive in antecedentia, angulus S T N primo casu exprimit viam nodi à syzygia, secundo casu viam quam emetiri debet ut ad syzygiam redeat.

Probandum autem 1°. quod si tres illi Anguli Q T P, N T P, S T N sint positivi motus nodorum est regressivus: 2°. Quod si unus eorum sit negativus reliqui positivi motus nodorum est progressivus. 3°. Quod si unus eorum sit positivus duo negativi, motus nodorum est regressivus. 4°. Denique quod si omnes sint negativi motus nodorum iterum sit progressivus, sic enim *quoties signum alicujus anguli de affirmativo in negativum deque affirmativo in negativum mutatur debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari.*

Art. 1. Si tres Anguli sint Positivi nodorum motus erit regressivus.

In hoc casu, Arcus A N contra ordinem signorum sumptus non excedit semicirculum ideoque punctum N erit in semicirculo A Q B; Præterea arcus Q P secundum ordinem signorum sumptus, 180gr. non excedit, erit itaque punctum P in semicirculo Q A q; Denique arcus N P semicirculo major esse non debet, sed potest vel quadrante minor vel quadrante major, sit N P quadrante minor ut in figurâ Textus, in quâ reliquæ hujus casus conditiones occurrunt, ex ipsâ hujusce propositionis constructione liquet quod ductâ M L quæ exprimit actionem Solis, productâ M P quæ lineæ nodorum occurrit in m, productâ L P quæ occurrit plano Eclipticæ in l, ita ut m l sit parallela lineæ M L, cum L sit versus Solem respectu puncti M & lineæ M P m, L P l sese decussent punctum l erit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus A T l major erit quam angulus A T m ergo nodus promotus est contra ordinem signorum, hoc est ejus motus est regressivus.

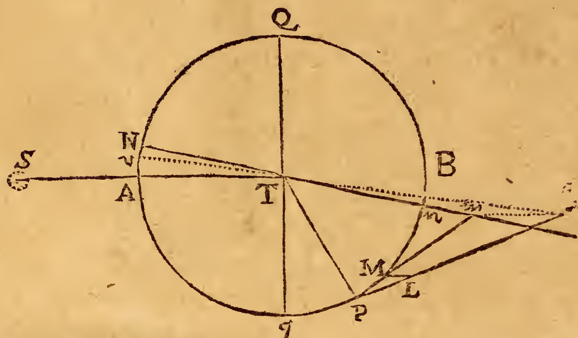
Sit

Sit NP quadrante major, tum lineæ PM, PL non amplius erunt retroproducendæ ut cum lineâ TN concurrant, ſed antrorſum productæ concurrent cum ejus productione Tn, & quoniam ſeſe non decuſſant, manebit punctum l propius Soli quam punctum m, & angulus ATl minor erit angulo ATm, ideoque productâ lineâ lT in V, angulus ATV complementum ad duos rectos anguli ATl, major erit angulo ATN complemento ad duos rectos anguli ATm, ergo nodus N promotus eſt contra ordinem ſignorum ut prius; Ergo ubicumque ſit punctum P ſi tres anguli QTP, NTP, STN ſint poſitivi motus nodi eſt regreſſivus. 114.

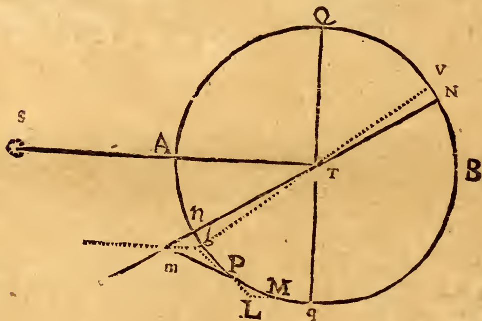
Art. 2. Mutetur horum Angulorum quivis ex poſitivo in negativum manentibus poſitivis angulis duobus reliquis motus nodorum ex regreſſivo progreſſivus fiet.

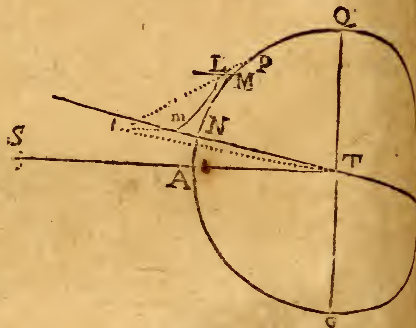
Caſ. 1. Fiat angulus QTP negativus, hoc eſt, punctum P ſit in ſemicirculo QBq, manente poſitivo angulo STN ita ut N ſit in ſemicirculo AQB, & pariter manente poſitivo angulo NTP; obſervandum quod lineolâ ML in ſemicirculo QBq poſitionem habet oppoſitam illi quam habebat in ſemicirculo QAq ut conſtat ex Prop. LXVI. lib. 1. ita ut punctum L ſit à Sole remotius quam punctum M; Itaque ſi PN ſit minor quadrante, lineæ LP retroproducendæ erunt, & punctum l erit propius Soli quam punctum m; ideoque angulus ATl minor erit angulo ATm, ergo (cum diminuatur angulus AIN qui ſumitur contra ordinem ſignorum) nodus ſecundum ordinem ſignorum eſt promotus ejuſque motus progreſſivus eſt.

DE MUNDI SYSTEMATE.



114. Si verò NP sit major quadrante antrorsum productis lineis PM, PL punctum l manebit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus ATl major erit angulo ATm, productâ itaque lT in V, angulus lTV anguli ATl complementum minor erit angulo ATN, nodus ergo ab N versus A in consequentia processerit itaque motus nodi est ut prius progressivus.





Cas. 2. Sit angulus NTP negativus; hoc est sit punctum N in consequentia respectu puncti P, sit vero QTP positivus hoc est sit punctum P in semicirculo QAq & pariter sit STN positivus ita ut N sit in semicirculo AQB, si NP (secundum consequentia) sit minor tribus quadrantibus, P distabit à puncto n minus quadrante, ideoque retroproductis lineis MP, LP in m & l, cum L sit soli propius quam M, erit l à sole remotius quam m, ideoque angulus ATl major erit angulo ATm, & angulus ATV prioris complementum minor erit angulo ATN qui est anguli ATm complementum; processit ergo nodus ab N versus A, motus ergo nodi est progressivus.

Si NP sit major tribus quadrantibus, P minus quadrante à puncto N distabit, cumque N sit in consequentia respectu puncti P ut & puncta M & L antrorsum producendæ sunt lineæ PM, PL ut plano Eclipticæ occurrant in m & l, & cum L sit Soli vicinius quam M pariter l erit Soli vicinius quam m, hinc angulus ATl minor erit angulo ATN, nodus ergo ab N versus A processit & motus nodi est progressivus.

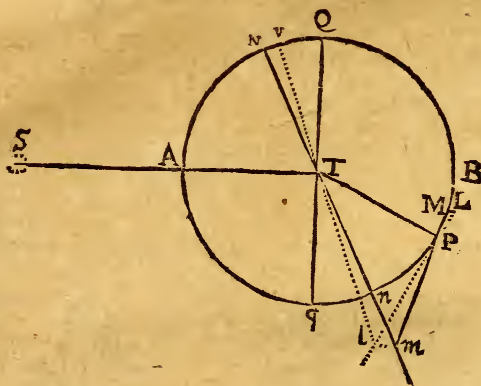
Cas. 3. Sit angulus STN negativus positivis existentibus angulis QTP, NTP. Sit NP minor quadrante, retroproducendæ sunt lineæ PM, PL ideoque l erit remotior à Sole, quam m; & angulus

lus ATI major erit quam ATm; vel ATN, cum ergo N sit in consequentia respectu puncti A, quia angulus STN est negativus, punctum I magis adhuc in consequentia processerit, motus ergo nodi erit progressivus. Sit NP major quadrante, antrorsum producendæ erunt lineæ PM, PL ut cum Ecliptica concurrant, à parte nodi n ideoque L erit propius Soli quam m, & angulus ATI minor erit angulo ATn; ideoque angulus ATV major erit quam ATN, ergo processit nodus ex N in V, secundum consequentia.

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.

Art. 3. Sint duo ex tribus Angulis QTP, NTP, STN negativi, tertius positivus, motus nodorum ex progressivo regressivus fiet.

114



Casus 1us. Sint QTP & NTP negativi, solus STN sit positivus, distet P à nodo N minus tribus quadrantibus, sive minus quadrante à puncto n, idque in consequentia, retro producendæ erunt lineæ PM, PL, ut PM lineæ nodorum occurrat in m, & LP in l vicinius Soli, hinc ATl minor erit ATm & ideo ATV major quam ATN sed punctum N est in antecedentia respectu puncti A, ergo V est in antecedentia respectu puncti N, ergo nodus regreditur; Distet P ab N plus tribus quadrantibus, antrorsum producendæ sunt lineæ PM, PL ut occurrant lineæ nodorum & l manebit à Sole remotius quam m & angulus ATl major erit angulo ATN regreditur ergo Nodus.

Cas. 2. Sint QTP & STN negativi, solus vero NTP positivus, sit NP minor quadrante, retroproductis lineis, cum L sit remotius à Sole quam M, erit l ob decussationem linearum propius Soli & angulus ATl sive ATV minor angulo ATN, sed quia hic angulus est negativus, complementa ad quatuor rectos erunt sumenda, & arcus AQPV major erit arcu AQPN ergo nodus regreditur.

De Mundi Systemate.

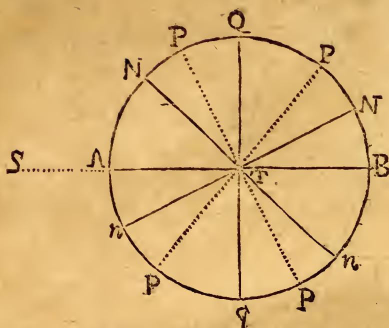
114. Sit N P major quadrante, lineis P M, P L productis occurrent Eclipticæ à parte puncti n, & propter angulum Q T P negativum cum P sit in semicirculo q B Q erit l ut & L remotius à Sole quam m & M, ideo angulus A T n minor est angulo A T l & complementum prioris anguli A T N major est angulo A T V, sed A est in antecedentia respectu puncti N, ergo etiam V est in antecedentia respectu puncti N regreditur ergo nodus.

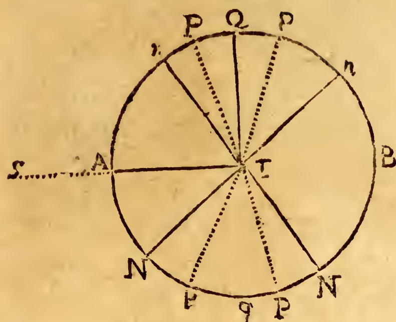
Cas. 3. Sint S T N & N T P negativi, Q T P vero positivus, punctum L est ubivis propius Soli quam M, si P minus tribus quadrantibus distet ab N retro producendæ sunt lineæ P M, P L, à parte puncti n & erit A T l majus quam A T n, sed quia S T N est negativus, n est in semicirculo superiori A Q B, & n est in antecedentia respectu A, ideoque l est in antecedentia respectu n, ut etiam V respectu N, regreditur ergo nodus; sit N P tribus quadrantibus major, lineæ P M, P L antrorsum sunt producendæ, l erit propius soli quam m & A T l sive A T V minor quam A T N, sed quia A T N est negativus, ideoque A est in Antecedentia respectu puncti N erit etiam V in Antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Art. 4. Si tres anguli Q T P, N T P, S T N sint negativi motus ex regressivo progressivus fiet; ut Hypothesis hujus articuli obtineat, oportet ut nodus N & Luna P sit in quadrante q B; nam cum angulus Q T P sit negativus, P debet esse in semicirculo q B Q; cum S T N sit negativus, N debet esse in semicirculo A q B, & cum N T P sit negativus N debet esse in consequentia respectu P; ergo, N non potest versari in quadrante A q, nec P in quadrante B Q: Antrorsum ergo erunt producendæ lineæ P M, P L ut Eclipticæ occurrant, erit l remotius à Sole quam m, & angulus A T V major angulo A T N, sed hic angulus est negativus, sive est N in consequentia respectu A, erit ergo etiam V in consequentia respectu puncti N, nodus itaque progreditur.

His positis dico, quod motus nodi progressivus evadit dum Luna versatur inter alterutrum nodum & quadraturam ipsi proximam; quadraturam nodo proximam vocat Newtonus, si quadraturæ à nodo distantia quadrante major non sit.

Sit





Sit enim angulus A T N positivus, quoniam Luna sive punctum P est inter puncta Q & N vel q & n ex Hypothesi, alteruter ex angulis Q T P, N T P erit positivus alter negativus; nam sit N vel n in semicirculo Q B q, tum quia P est inter Q vel q & N vel n, erit P in eodem semicirculo Q B q, ideoque angulus QTP erit negativus, sed angulus NTP erit positivus, nam quia P est inter N & Q aut q & n, & Q est in consequentia respectu N, erit etiam P in consequentia respectu puncti N, & pariter dum n versatur in semicirculo Q B q, n est in consequentia respectu puncti q & arcus N q in consequentia sumptus nec non arcus NP singuli minores erunt arcu N n sive minores semicirculo, ergo utroque casu angulus NTP erit positivus.

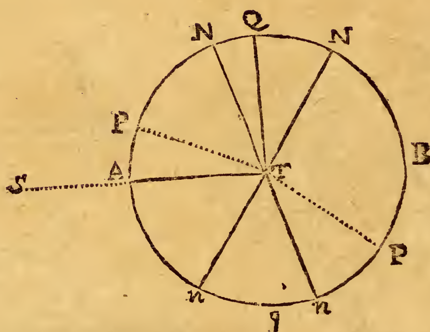
Manente ATN positivo sint N vel n in semicirculo Q A q, tum quia P est inter Q & N aut n & q, erit etiam P in semicirculo Q A q, ideoque angulus QTP erit positivus, sed angulus N T P erit negativus, nam quia Q est in antecedentia respectu puncti N, P inter Q & N positum erit in antecedentia respectu N; & in casu quo P foret inter n & q quia q est in hac Hypothesi in consequentia respectu n, P foret etiam in consequentia respectu n, ideoque plus semicirculo à puncto N distaret utroque ergo casu angulus NTP negativus foret,

Sit angulus A T N negativus, sitque N in quadrante q A, vel n in quadrante A Q, & Lunâ P inter N & q vel n & Q, liquet angulum Q T P fore positivum, quia est P in semicirculo Q A q; angulus autem N T P erit etiam positivus, nam sit N in quadrante q A, q est in consequentia respectu N, ergo P quod est inter N & q est etiam in consequentia respectu N; sit n in quadrante A Q, cum n sit in consequentia respectu Q, erit etiam in consequentia respectu P; hinc arcus N P in consequentia minor erit semi-circulo, utroque ergo casu angulus NTP est positivus. 114.

Itaque si angulus ATN sive STN sit positivus, ubivis sit N in semicirculo AQB & si angulus STN sit negativus sed ita ut sit N in quadrante q A, quando Luna erit posita inter Nodum utrumvis N vel n, & quadraturam proximam unus è tribus angulis duntaxat erit negativus duo reliqui erunt positivi, itaque per articulum 2um, motus nodi progressivus erit.

Existente verò angulo STN negativo, & N in quadrante q B vel n in quadrante BQ Luna verò posita inter utrumvis nodum & quadraturam proximam reliqui duo anguli Q T P, NTP negativi erunt; liquet enim facile punctum P in hâc hypothesi versari in semicirculo q BQ ideoque angulum Q T P esse negativum, prætereà quia q est in antecedentia respectu N ex hypothesi, P est etiam in antecedentia respectu N, & quia Q est in consequentia respectu n, erit etiam P in consequentia respectu n, ideoque punctum N plus semicirculo à puncto P distabit, itaque sive sit P inter q & N sive inter n & Q in semicirculo q BQ tres anguli erunt negativi, sed per

De Mundi Systemate.



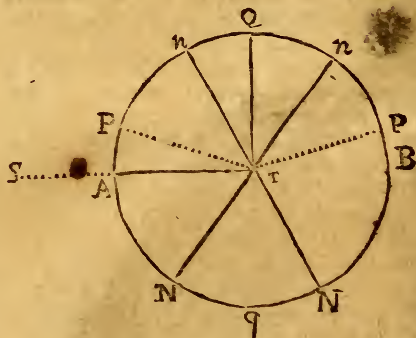
114. Art. 4. eo casu motus nodi est progressivus; Ergo in omni casu, si Luna sit inter nodum & quadraturam proximam nodi progrediuntur.

In omnibus aliis casibus motus nodi est regressivus; Nam quando omnes anguli sunt positivi, vel quando duo anguli sunt negativi & tertius positivus motus nodi regressivus est per Art. 1. & 3., alterutrum autem evenire necesse est cum P non est inter nodum & quadraturam proximam; Hoc enim posito, sit ut prius angulus STN positivus & N in quadrante QTA, & P ubivis inter N & remotiorem quadraturam q, vel inter n & remotiorem quadraturam Q; si P sit inter N & q angulus QTP est positivus siquidem P est in semicirculo QAq, & quia N est nunc inter P & Q, & N est in consequentia respectu Q, erit P in consequentia respectu N ergo angulus NTP est positivus; si P sit inter n & Q angulus QTP est negativus, sed & pariter angulus NTP, nam cum P sit in consequentia respectu n plus semicirculo à puncto N distabit.

Sit N ubivis in quadrante BTQ, & P inter Q & n vel inter q & N primo casu omnes angulos fore positivos, altero angulos QTP & NTP fore negativos ut in præcedenti demonstrabitur.

Denique angulus STN sit negativus, & P non sit inter quadraturam & nodum sed alibi ubivis, alteruter ex angulis QTP, NTP positivus erit negativus alter; sit N in quadrante ATq & P in arcu QAN (quadrante major) erit QTP positivus & NTP negativus, siquidem P est in antecedentia respectu N, sit P in arcu qBn erit QTP negativus, sed NTP positivus nam arcus NP in consequentia sumptus semicirculo minor erit.

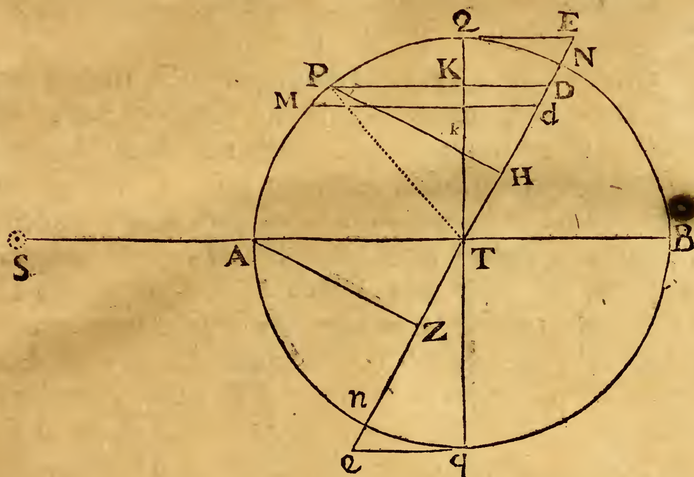
Sit N in quadrante qTB, si P sit in arcu nq, angulus QTP positivus est sed angulus NTP negativus quia arcus Nn+nP semicirculo major est, si P sit in arcu NQ angulus QTP est quidem negativus, sed quia P est in consequentia respectu N minusque semicirculo distat, ergo angulus NTP est positivus; Hinc ubivis sit P si modo non sit inter nodum & quadraturam proximam, vel omnes anguli



erunt Positivi, vel duo simul negativi alter verò positivus.

Cum ergo arcus inter N vel n & quadraturam proximam, numquam excedat quadrantem, eoque sit sæpe minor; è contra verò, arcus inter N vel n & quadratu-

Corol. I. Hinc si à dati arcus quam minimi PM terminis P & M ad lineam quadraturas jungentem Qq demittantur perpendicula PK, Mk, eademque producantur donec secent lineam nodorum Nn in D & d; erit motus horarius nodorum



ut area $MPDd$ & quadratum lineæ AZ conjunctim. Sunto enim PK, PH & AZ prædicti tres sinus. Nempe PK sinus distantiæ lunæ à quadraturâ, PH sinus distantiæ lunæ à nodo, & AZ sinus distantiæ nodi à sole: & erit velocitas nodi ut con-

draturam remotiorem numquam fit minor quadrante & sæpe eo major, majori parte revolutionis Lunæ, Nodi regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus nodi feruntur in Antecedentia.

Potuissent Articuli 4. supra demonstrati, ex solâ vi signorum Algebricorum deduci, eamque demonstrationis speciem adhibere videtur Newtonus; at alicui negotium facessere potuissent horum signorum mutationes in angulis spectatæ, in quibus cum angulus ad semicirculum crevit & maximus fit, mox negativus evadit, quod sane non evenisset si viæ descriptæ, non verò anguli considerati fuissent; Juvant Algebricæ illæ consequentiæ, in retegendis prompte Propositionibus iisque ad generalissimas expressiones revocandis, sed in nonnullis quæstionibus ad certitudinem plenam idearumque claritatem requiritur ut, per casuum enumerationem, illæ Algebricæ consequentiæ, velut ad lapidem Lydium explorentur. Cæterum, quamvis figuras unicuique casui proprias non delineaverimus, facile erit ex iis quæ sculptæ sunt, figuras deficientes imaginari aut describere. 114.

De Mundi Systemate.

contentum $PK \times PH \times AZ$. Est (p) autem PT ad PK ut PM ad Kk, ideoque ob datas PT & PM est Kk ipsi PK proportionalis. Est & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id est, ut area $PDdM$ & AZ *qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 2. In datâ quâvis nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in syzygiis lunæ, ideoque est ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut quadratum sinus distantiæ nodorum à syzygiis ad quadratum radii, sive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam si luna uniformi cum motu perambulet semicirculum QAq, summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna pergit à Q ad M, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore luna attingit punctum n, summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD describit, dein lunâ pergente ab n ad q, linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, subduci debet de areâ priore, & cum æqualis sit areæ QEN, relinquet semicirculum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore luna circulum describit est area circuli totius. At area $PDdM$, ubi luna versatur in syzygiis, est rectangulum sub arcu PM & radio PT; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentiâ totâ & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in syzygiis lunaribus, spatium duplo majus describerent quam reverâ describunt; & propterea motus mediocris quocum, si

114. (p) * *Est autem PT ad PK ut PM ad Kk* ex notissimâ circuli proprietate Radium esse ad ordinatam ut est fluxio arcus ad fluxionem abscissæ.

si uniformiter continuarctur, spatium à se inæquabili cum motu reverâ confectum describere possent, est semissis motus quem habent in syzygiis lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si nodi in quadraturis versantur, sit $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc casu erit $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. Et (q) cum motus horarius nodorum semper sit ut *AZ qu.* &

LIBER TERTIUS PROP. XXX. PROBL. XI.

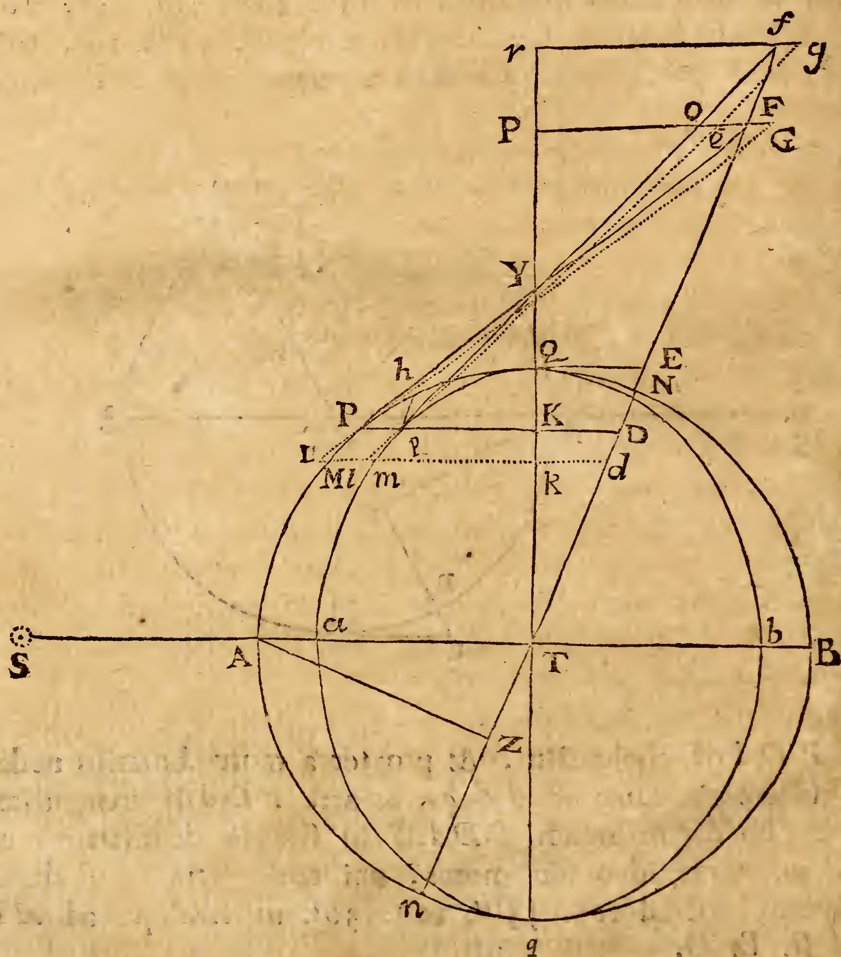
area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in syzygiis lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id est (ob datam aream *PDdM* in syzygiis descriptam) ut *AZ qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas versantur, erit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* *Q. E. D.*

(q) * *Et cum motus horarius nodorum sit &c.* per Corollarium præcedentem.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe elliptico (r).



Designet *Qpmaq* ellipsin, axe majore *Qq*, minore *ab* descriptam, *QAqB* circulum circumscriptum, *T* terram in utriusque centro communi, *S* solem, *p* lunam in ellipsi motam, & *pm*

114. (r) * *In orbe Elliptico* illo nempe orbe in quem figura circularis orbitæ Lunaris mutatur per actionem Solis, quique axem habet majorem ad axem minorem in ratione 70. ad 69. per Prop. XXVIII. hujusce.

pm arcum quem datâ temporis particulâ quam minimâ deſcribit, *N* & *n* nodos linea *Nn* junctos, *pK* & *mk* perpendicula in axem *Qq* demiſſa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in *P* & *M*, & lineæ nodorum in *D* & *d*. (ſ) Et ſi luna, radio ad terram ducto, aream deſcribat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipſi ut area *pDdm* & *AZq* conjunctim.

Nam ſi *PF* tangat circulum in *P*, & producta occurrat *TN* in *F* & *pf* tangat ellipſin in *p* & producta occurrat eidem *TN* in *f*, (t) conveniant autem hæ tangentes in axe *TQ* ad *Y*; & ſi *ML* deſignet ſpatium quod luna in circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum *PM*, urgente & impellente vi prædictâ 3 *IT*, ſeu 3 *PK* motu tranſverſo deſcribere poſſet, & *ml* deſignet ſpatium quod luna in ellipſi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi 3 *IT* ſeu 3 *pK*, deſcribere poſſet; & producantur *LP* & *lp* donec occurrant plano eclipticæ in *G* & *g*; & jungantur *FG* & *fg*, quarum *FG* producta ſecet *pf*,

(ſ) * *Et ſi Luna radio ad terram ducto deſcribat aream tempori proportionalem* &c. Liquet ex Propoſ. XXVIII. Lunam hanc Ellipſim de quâ agitur ita non deſcribere ut areæ ſint temporibus proportionales, ſed hæc Hypotheſis ad ſolutionem hujus Problematis erat neceſſaria, ut ſcilicet Luna poſſit fingi verſari in puncto p ordinatæ P K eodem tempore quo ſi circulum deſcriberet in ejus extremitate P verſata eſſet, quod tunc tantùm obtineret ſi hæc Ellipſis ita deſcribatur ut areæ ſint proportionales temporibus; Notum enim eſt areas Ellipticas T p Q proportionales fore areis T P Q, areas T P Q proportionales eſſe arcubus P Q, arcus verò P Q proportionales temporibus, ſi quidem Luna citra Solis actionem in circulo lata, uniformiter moveretur.

Verum hæc falſa Hypotheſis corrigitur in eâ ſolutionis hujus Problematis parte quæ poſt Corollarium adjicitur.

(t) * *Conveniant autem hæ Tangentes in axe* T Q *ad Y.* Liquet ex not. 257. Lib. I. Quod ſi duæ curvæ communem axem habentes, ſint tales ut ipſarum ordinatæ datam inter ſe rationem ſervent, & in ſummo ordinatarum correſpondentium ducantur Tangentes, illæ Tangentes in eodem axeos puncto concurrunt; Nam cum ordinatæ datam rationem ſervent (ex Hypoth.) oportet ut ipſarum fluxiones eamdem etiam ſervent rationem ita ut ratio fluxionis ordinatæ ad ordinatam ipſam, eadem ſit in utrâque curvâ. Eſt verò ſemper fluxio ordinatæ ad ordinatam ut fluxio abſciſſæ ad ſubtangentem, ergo in hâc Hypotheſi, ratio fluxionis abſciſſæ ad ſubtangentem eſt etiam eadem in utraque curva, ſed fluxio abſciſſæ ipſa eſt eadem pro utrâque curvâ, ergo etiam ſubtangens eadem eſt, hinc itaque Tangentes in extremitatibus ordinatarum correſpondentium ductæ in eodem puncto axem attingunt quando utriuſque curvæ ordinatæ ad eadem axeos puncta pertinentes, conſtantem rationem ſervant: Notum autem eſt, ex not. 247. Lib. I, Quod ſi circulus deſcribatur ſuper axim Ellipſeos, ordinatæ circuli & Ellipſeos erunt inter ſe in ratione datâ axeos communis circulo & Ellipſi ad alterum axem, ſive eſſe P K ad p K ut A T ad a T, hinc ergo Tangentes in punctis P & p ductæ axi occurrent in eodem puncto Y. 114.

De Mundi Syſtemate.

pg & TQ in c, e & R reſpectivè, & fg producta ſecet TQ in r. Quoniam vis $3\,IT$ ſeu $3\,PK$ in circulo eſt ad vim $3\,IT$ ſeu $3\,pK$ in ellipſi, ut PK ad pK, ſeu AT ad aT; erit ſpatium ML vi priore genitum, ad ſpatium ml vi poſteriore genitum, ut PK ad pK, id eſt, ob ſimiles figuras $PYKp$ & $FYRc$, ut FR ad cR. Eſt autem ML ad FG (ob ſimilia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc eſt (ob parallelas Lk, PK, GL) ut pl ad pe, id eſt (ob ſimilia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inversè ut LM eſt ad lm, ſeu FR ad cR, ita eſt FG ad ce. Et propterea ſi fg eſſet ad ce ut fY ad cY, id eſt, ut fr ad cR (hoc eſt, ut fr ad FR

& FR ad cR conjunctim, id est, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; atque ideo anguli, quos FG & fg subtenderent ad terram T, (u) æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente propositione exposuimus) sunt motus nodorum, quo tempore luna in circulo arcum PM, in ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus nodorum in circulo & ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut fY ad cY, id est, si fg æqualis esset $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verùm ob similia triangula fgp, cep, est fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & (x) propterea angulus, quem fg reverâ subtendit, est ad angulum priorem quem FG subtendit, hoc est, motus nodorum in ellipsi ad motum nodorum in circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu $\frac{ce \times fY}{cY}$, id est, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, seu fp ad fY & cY ad cp, hoc est, si ph ipsi TN parallela occurrat FP in h, ut Fh ad FY & FY ad FP; hoc est, ut Fh ad FP seu Dp ad DP, (y) ideoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum (per corol. 1. prop. XXX.) area posterior & AZq conjunctim proportionalia sint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior & AZq conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipsi. *Q. E. D.*

Co-

(u) * *Atque ideo anguli quos* FG *&* fg *subtenderent ad terram* T *æquarentur inter se*, nam cum lineæ FG & fg sint inter se Parallelæ & proportionales lineis TF, Tf, recta TG producta transibit etiam per g, ideoque per eundem angulum videbuntur lineæ FG & fg ex terrâ T.

(x) * *Et propterea angulus quem* fg *reverâ subtendit est ad angulum priorem ut hæc* fg *ad priorem* fg. Cum enim linea fg sit minima, respectu lineæ Tg linea Tg eadem manere censenda est in utrâque magnitudine lineæ fg hic assumpta; sed in Triangulo utroque Tfg. Sinus anguli f est ad lineam Tg, ut sinus anguli fTg ad lineam fg; ergo cum maneat angulus f, & linea Tg; ratio sinus anguli fTg ad lineam fg erit data, sive quia anguli minimi sunt ut sui sinus, erit angulus quem fg reverâ subtendit ad angulum quem ficta fg subtendebat, ut vera fg ad fictam fg. 114

(y) * *Ideoque ut area* Dpmd *ad aream* DPMd nempe propter communem altitudinem Kk, nam Trapezia pDdl, PDdL, pro Parallelogrammis assumi possunt quæ sunt ut Bases Dp, DP, & altitudines Kk conjunctim.

De Mundi Systemate.

Corol. Quare cum, in datâ nodorum positione, summa omnium arearum $p D d m$, quo tempore luna pergit à quadraturâ ad locum quemvis m, sit area $m p Q E d$, quæ ad ellipseos tangentem $Q E$ terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, sit area ellipseos totius: motus mediocris nodorum in ellipsi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipsis ad circulum; id est, ut $T a$ ad $T A$, seu 69 ad 70. Et propterea, cum (per corol. 2. prop. XXX) motus mediocris horarius nodorum in circulo sit ad 16″. 53‴. 16^iv. 36^v. ut $A Z$ *qu.* ad $A T$ *qu.* si capiatur angulus 16″. 21‴. 3^iv. 30^v. ad angulum 16″. 35‴. 16^iv. 36^v. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipsi ad 16″. 21‴. 3^iv. 30^v. ut $A P q$ ad $A T q$; hoc est, ut quadratum sinus distantiæ nodi à sole ad quadratum radii.

(z) Cæterum luna, radio ad terram ducto, aream velocius describit in syzygiis quam in quadraturis, & eo nomine tempus in syzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & unà cum tempore motus nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis lunæ ad ejus momentum in syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in octantibus est ad excessum in syzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus lunæ in singulis orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad excessum temporis in quadraturis, ac defectum in syzygiis, ab hâc causâ oriundum, ut 11023 ad 50 quam proximè. (a) Pergendo autem à quadraturis ad syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in quadraturis, sit ut quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturis quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque

que

114. (z) * *Cæterum Luna*, &c. Hæc omnia ex Prop. 26. hujusce deducuntur. Vide not. r Prop. 26. & locum ad quem refertur.

(a) * *Pergendo autem à quadraturis.*

que & momentum mediocre in octantibus, est ut differentia inter quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturis & quadratum sinus graduum 45, seu semissem quadrati radii; & incrementum temporis in locis singulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & syzygias, est in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore luna percurrit singulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. Est enim (b) motus iste, dum luna percurrit *PM* (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* est in duplicatâ ratione temporis. Quare (c) motus nodorum in syzygiis, eo tempore confectus quo luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque (d) decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100

LIBER TERTIUS. PROP. XXXI. PROB. XII.

(b) * *Est enim motus iste (cæteris paribus) ut ML, & ML est in duplicatâ ratione temporis*, motus nodorum generatur per actionem vis Solaris 3IT quæ uniformis manere censetur dum describitur arcus PM, hinc crescit LM in duplicatâ ratione temporis Lem. X. Lib I., expressit autem Newtonus motum nodorum, fingendo in puncto ipso P, à Sole simul & semel eam actionem imprimi quæ toto tempore quo arcus PM describitur ab ipso exercita fuisset, & lineam LM esse spatium quod velocitate ita productâ ipso eo tempore quo arcus PM percurritur describeretur, hinc itaque constat eam lineam fore in duplicatâ ratione temporis, (vid. not. 28. & 30. lib. 1.) hæc autem linea LM est proportionalis verò effectui actionis Solis (vid. not. h Prop. XXX. hujusce).

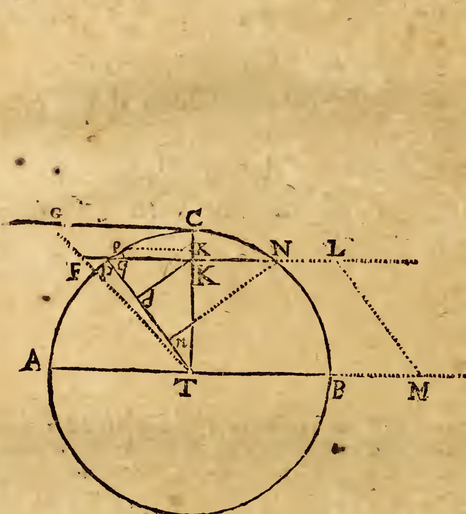
(c) * *Quare motus nodorum.* Momentum areæ in syzygiis sive velocitas Lunæ in syzygiis est ad velocitatem mediocrem in octantibus ut 11073 ad 11023 ergo tempus quo Luna æquales arcus PM describet in syzygiis est ad tempus 114
quo eos arcus PM describere censebatur velocitate mediocri ut 11023 ad 11073, motus ergo nodorum in syzygiis fit minor quàm adsumptus fuerat in ratione duplicatâ numerorum 11023 & 11073.

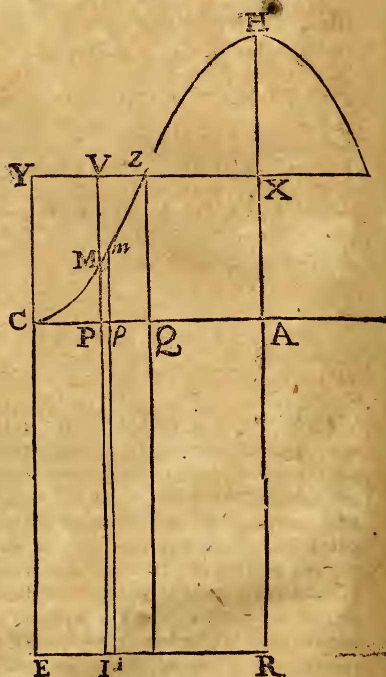
(d) * *Estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum totum ut 100 ad 11073.* Motus reliquus est ad motum totum ut $\overline{11023}^2$ ad $\overline{11073}^2$ sive ut $\overline{11073-50}^2$ ad $\overline{11073}^2$; sive priorem quantitatem ad quadratum evehendo secundum formulam vulgarem dignitatum ut $\overline{11073}^2 - 2\times 50\times 11073 + \overline{50}^2$ ad $\overline{11073}^2$ negligatur terminus $\overline{50}^2$, cæterorum enim respectu evanescit fiet motus reliquus ad totum ut $\overline{11073}^2 - 2\times 50\times 11073$ ad $\overline{11073}^2$, & dividendo per 11073, ut $11073 - 2\times 50$ ad 11073.

Est ergo differentia motûs reliqui & motus totius h. e. motûs decrementum ad motum totum, ut 2×50 sive 100 ad 11073, ideoque etiam est motus decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973.

DE MUNDI SYSTEMATE.

100 ad 11073 quam proximè. (e) Decrementum autem in locis inter octantes & syzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, est quam proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in syzygiis & differentia inter quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturâ & semissem quadrati radii ad semissem quadrati radii conjunctim. Unde





114. (e) * *Decrementum inter octantes & syzygias & incrementum inter octantes & quadraturas est quam proximè &c.* Resumptis iis quæ in Prop. XXVI. not. 112. sunt dicta, designet CP distantiam Lunæ à quadraturâ, lineâ IM exprimet ejus velocitatem & IV exprimet velocitatem mediocrem, idcircò tempus quo describitur arcus PM hâc velocitate IM, est ad tempus quo velocitate mediocri IV describeretur, ut IV ad IM, ideoque motus nodorum verus foret ad eorum motum si Luna mediocri suâ velocitate ferretur ut $\overline{IV}^2$ ad $\overline{IM}^2$ sive ut IV^2 ad $\overline{IV \pm VM}^2$ aut ut IV^2 ad $IV^2 \pm 2IV \times VM + VM^2$ & neglectâ quantitate $\overline{VM}^2$ divisisque terminis per IV ut IV ad $IV \pm 2\,VM$; & convertendo differentia motus veri nodorum & motus inventi, est ad motum inventum ut $\pm 2\,VM$ ad $IV \pm 2\,VM$, hinc illa differentia, sive incrementum aut

LIBER TERTIUS. PROP. XXXI. PROBL. XII.

(f) Unde ſi nodi in quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde diſtantia, & alia duo à ſyzygiâ & quadraturâ iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter ſyzygiam & octantem, ſub-

aut decrementum motus nodorum eſt ſemper æquale motui nodorum qualis inventus fuerat ducto in $2\,VM$ & diviſo per $JV \pm VM$, ideoque cum $JV \pm 2\,VM$ pro conſtanti aſſumi poſſit quia $2\,VM$ ferè evaneſcit reſpectu quantitatis JV, eſt illud incrementum aut decrementum ut motus nodorum qualis inventus fuerat & VM conjunctim; eſt verò VM differentia inter ZQ & MP, & ſunt ZQ & MP ut quadrata ſinuum arcuum CQ & CP, arcus verò CQ eſt $45^{gr.}$ ex demonſtratis ad Prop. XXVI. & quadratum ejus ſinus eſt ſemiſſis quadrati radii; CP verò eſt diſtantia Lunæ à quadraturâ; Ergo, incrementum aut decrementum motus nodorum eſt ut motus nodorum qualis inventus fuerat & differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſem quadrati radii conjunctim: In ſyzygiis quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ à quadratura eſt ipſum quadratum radii, unde differentia quadrati ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſis quadrati radii, eſt in hoc caſu ipſe ſemiſſis quadrati radii, hinc erit decrementum aut incrementum motus nodorum in loco quovis ad decrementum ejus motus in ſyzygiis ut ſunt motus nodorum iis in locis ad motum nodorum in ſyzygiis (quales citra hanc correctionem inventi fuerant,) & ut differentiæ quadratorum ſinuum diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſis quadrati radii ad eum ſemiſſem quadrati radii conjunctim. Q. E. O.

(f) * *Unde ſi nodi &c.* Verſentur nodi in Quadraturis, capiantur loca F & E ab octante M hinc inde æqualiter diſtantia, & alia duo D & G à ſyzygiâ A & quadraturâ N diſtantia intervallis D A, G N quæ æqualia ſint inter ſe, & eadem ac intervalla M E, M F, ſumantur decrementa motus nodorum in punctis E & D & ex ſumma eorum decrementorum ſubducatur ſumma incrementorum in punctis G & F, & reſiduum erit ipſum decrementum in ſyzygia A. 114.

Etenim, per præcedentia, decrementa ſive incrementa; ſunt ut motus totus nodorum & differentia quadrati ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſis radii conjunctim; eſt verò motus totus nodorum, ut contentum ſub ſinubus diſtantiarum Lunæ à quadraturâ, Lunæ à nodo, & nodi à Sole (per Prop. XXX.) ſinus autem diſtantiæ nodi à Sole, in hoc caſu eſt ipſe Radius, eſtque conſtans pro omnibus incrementis decrementiſque aſſumendis, diſtantia verò Lunæ à nodo eadem eſt ac diſtantia Lunæ à quadraturâ, cum nodi ſint in quadraturis; Ergo motus totus nodorum eſt ut quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ, & decrementa ſive incrementa ſunt ut contentum ſub quadrato ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſub differentiâ ejuſdem quadrati & ſemiſſis radii.

Dicatur itaque Radius r, ſinus arcus N G dicatur s, erit incrementum motus nodorum in G ut $ss \times \frac{1}{2}rr - ss$ ſive $\frac{1}{2}r^2 s^2 - s^4$.

Ut obtineatur incrementum motus nodorum in F, obſervandum, quod ſiquidem arcus F M eſt æqualis arcui N G cujus ſinus eſt s, & N F + F M eſt æqualis octanti cujus ſinus eſt $r\sqrt{\frac{1}{2}}$ & per Principia Trigonometrica, ſinus arcus qui eſt differentia duorum arcuum quorum ſinus ſunt dati, eſt æqualis differentiæ factorum

ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in ſyzygiâ: uti rationem ineunti facile conſtabit. (g) Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in ſyzygia. Motus totus horarius nodorum in ſyzygiis, ubi luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur, erat $32''. 42'''. 7^{iv}$. Et decrementum motus nodorum, quo tempore luna jam velocior deſcribit idem ſpa-

§ 34. ctorum ſinûs majoris arcus per coſinum minoris & ſinus minoris arcus per coſinum majoris, diviſæ per Radium, hinc ſinus arcus F N eſt æqualis $\frac{r\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\overline{rr-ss}} - sr\sqrt{\frac{1}{2}}}{r} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\overline{rr-ss}} - s\sqrt{\frac{1}{2}}$, itaque incrementum nodorum in F erit $\frac{1}{2} \times \overline{rr-ss-s\sqrt{rr-ss}} + \frac{ss}{2} \times \overline{\frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}rr - ss + s\sqrt{rr-ss} - \frac{ss}{2}}$ ſive deletis terminis æqualibus & oppoſitis $\overline{\frac{1}{2}rr - s\sqrt{rr-ss}} \times \overline{s\sqrt{rr-ss}}$, & multiplicatione factâ $\frac{1}{2}r^2 s\sqrt{\overline{rr-ss}} - r^2 s^2 + s^4$. Ideoque ſumma incrementorum in G & F eſt $\frac{1}{2}r^2 s\sqrt{\overline{rr-ss}} - \frac{1}{2}r^2 s^2$.

Sinus autem in E & D ſunt coſinus arcuum F & G, ergo quadratum ſinus arcus N E eſt $rr - \frac{1}{2} \times \overline{rr-ss+s\sqrt{rr-ss}} - \frac{1}{2}ss = \frac{1}{2}rr + s\sqrt{\overline{rr-ss}}$; Ideoque decrementum motus nodorum in E eſt $\overline{\frac{1}{2}rr + s\sqrt{rr-ss}} \times \overline{\frac{1}{2}rr + s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}rr} = \frac{1}{2}r^2 s\sqrt{\overline{rr-ss}} + r^2 ss - s^4$.

Quadratum ſinus arcus N D eſt $rr-ss$, ideoque decrementum motus nodorum in D eſt $\overline{rr-ss} \times \overline{rr-ss-\frac{1}{2}rr} = \frac{1}{2}r^4 - \frac{3}{2}r^2 s^2 + s^4$; Sicque ſumma decrementorum eſt $\frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{2}r^2 s\sqrt{\overline{rr-ss}} - \frac{1}{2}r^2 s^2$.

Denique in ipsâ ſyzygiâ quadratum ſinus arcus ND eſt rr, ideoque decrementum motus nodorum in ſyzygia eſt $r^2 \times \overline{r^2 - \frac{1}{2}r^2} = \frac{1}{2}r^4$.

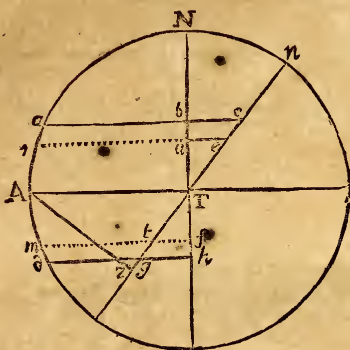
Si ergo ex ſumma decrementorum quæ inventa eſt $\frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{2}r^2 s\sqrt{\overline{rr-ss}} - \frac{1}{2}r^2 s^2$ detrahatur ſumma incrementorum quæ inventa eſt $\frac{1}{2}r^2 s\sqrt{\overline{rr-ss}} - \frac{1}{2}r^2 s^2$ decrementorum reſiduum eſt ipſum $\frac{1}{2}r^4$ quod decrementum motus nodorum in ſyzygia exprimet. Q. E. D.

(g) * *Proindeque decrementum mediocre* &c. In toto arcu N A, puncta aſſumantur quam proxima quotquot lubebit quæ quaternatim ſumantur, ita ut quatuor quæ ſimul aſſumuntur ita diſponantur ut duo ab octante æqualiter diſtent hinc inde & alia duo tantumdem à ſyzygia & quadratura diſtent; Decrementum motus nodorum in duobus punctis quæ ſunt inter ſyzygiam & octantem ſuperat incrementum ejus motus in aliis duobus punctis quantitate æquali decremento in ipsâ ſyzygiâ; ſi itaque motus mediocris aſſumendus ſit, id decrementum quadrifariam dividi debet & de motu mediocri ſingula quarta pars detrahi debet, ſic enim motus mediocris ille æquipollebit motui vero peracto in illis quatuor punctis ſimul ſumptis; ille decrementi exceſſus idem eſt pro quibuſvis punctis ita quaternatim ſumptis itaque motus mediocris nodorum in omnibus punctis adjectâ conſideratione inæqualitatis motus Lunæ ex actione Solis ortæ erit motus mediocris nodorum prius inventus, multatus quartâ parte illius decrementi.

Cum

spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideoque decrementum illud est $17'''. 43^{iv}. 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''. 25^{iv}. 48^{v}$ motui horario mediocri superius invento $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$ subducta, relinquit $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$ motum mediocrem horarium correctum. LIBER TERTIUS. PROP. XXXI. PROBL. XII.

(h) Si nodi versantur extra quadraturas, & spectentur loca bina à syzygiis hinc inde æqualiter distantia; summa motuum nodorum, ubi luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi luna in iisdem locis & nodi in quadraturis versantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et (i) decrementa motuum, à cau-

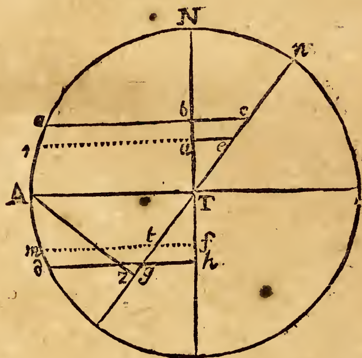


Cum ergo ille excessus decrementorum super incrementa sit ipsum decrementum motus in syzygiâ seorsim consideratâ, & id decrementum in syzygiâ seorsim inventum sit, *decrementum mediocre quod de nodorum motu mediocri subduci debet est pars quarta decrementi in syzygiâ.* 114

(h) * *Si nodi versantur extra quadraturas* putà in locis n *& spectentur loca bina a & d à syzygiâ A hinc inde distantia* erit motus nodorum in loco *a* ut Elementum *acer* & quadratum lineæ AZ conjunctim (cor. 1. prop. 30.); similiter motus nodorum in loco *d* erit ut elementum *mtgd* & quadratum lineæ AZ conjunctim; si verò nodi versentur in quadraturis erit (ibid.) summa motuum in binis locis *a* & *d* ut $abru + mfdh$, vel $2abrv$ & quadratum radii AT conjunctim; sed ob æqualia intervalla Tb, Th summa arearum $acer + mtgd = 2abru$. Quare summa motuum nodorum ubi Luna versatur in locis *a*, *d* nodis existentibus extra quadraturas, erit ad summam motuum ubi Luna in iisdem locis & nodi in quadraturis versantur ut $2abru \times AZ^2$ ad $2abru \times AT^2$ hoc est ut AZ^2 ad AT^2.

(i) * *Et decrementa motuum* in loco *a* quando nodi sunt extra quadraturas, & quando nodi sunt in quadraturis, sunt ut ipsi motus; Nam cum arcus *ar* in utroque casu æquali tempore percurratur, differentia ejus temporis à tempore mediocri utrinque eadem erit, ac per consequens error nodi, à loco in quo eo tempore medio-

De Mundi Systemate. causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum situ, ad $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}.$ ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id est, ut quadratum sinus distantiæ nodorum à syzygiis ad quadratum radii.



114. mediocri procedere debuisset, est ut ejus motus horarius in eo loco; ergo decrementum motus nodi in *a* ubi nodi sunt in quadraturis est ad decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas versantur ut $abru \times AT^2$ ad $acer \times AZ^2$, & pariter decrementum motus nodi in *d* ubi nodi sunt in quadraturis est ad decrementum motus in *d* cum nodi sunt extra quadraturas, ut $mfhd \times AT^2$ ad $mtgd \times AZ^2$; decrementa autem motus in *a* & *d* æqualia sunt quando nodi sunt in quadraturis, ob æquales distantias à syzygiâ, & $mfhd = abru$; hinc decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas versantur est ad $acer \times AZ^2$ ut decrementum motus in *d* cum nodi extra quadraturas versantur est ad $mtgd \times AZ^2$, & etiam ut decrementum in *a*, aut *d* cum nodi sunt in quadraturis ad $abru \times AT^2$; Ergo summa decrementorum in *a* & *d* cum nodi sunt extra quadraturas est ad $acer + mtgd \times AZ^2$ ut summa decrementorum in *a* & *d* cum nodi sunt in quadraturis ad $2\,abru \times AT^2$, sed $acer + mtgd = 2\,abru$ per notam præcedentem, ergo, summa decrementorum in binis locis à syzygiis hinc inde æqualiter distantibus cum nodi sunt extra quadraturas est ad summam decrementorum in iisdem locis cum nodi sunt in syzygiis, ut AZ^2 ad AT^2, cum ergo summæ motuum ipsorum in eâ sint ratione, reliqui motus erunt in eâ ipsâ ratione ideoque & motus mediocres; *Est itaque &c.*

PRO

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROBL. XIII.

Invenire motum medium nodorum lunæ.

Motus medius annuus est summa motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum versari in *N*, & singulis horis completis retrahi in locum suum priorem, ut non obstante motu suo proprio, datum semper servet situm ad stellas fixas. Interea verò solem *S*, per motum terræ, progredi a nodo, & cursum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad solem semper ducta, intersectione sui & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo describit: & motus horarius mediocris (per jam ostensa) erit ut *AZq*, id est (ob [1] proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum sub *AZ* & *ZY*, hoc est, ut area *AZYa*. Et summa omnium horariorum motuum mediocrium

(1) * *Ob proportionales AZ, ZY* est enim TA : Aa :: AZ : ZY, ideoque ob constantes TA & Aa, quantitates AZ, ZY ubique eamdem habent inter se rationem, ducatur utraque in AZ facta AZ×AZ, & ZY×AZ datam rationem ubique habebunt, erit itaque *AZq ut rectangulum sub AZ & ZY.* II 43.

De Mundi Systemate.

crium ab initio, ut ſumma omnium arearum *aYZA*, id eſt, ut area *NAZ*. Eſt (m) autem maxima *AZYa* æqualis rectangulo ſub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio, id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, (n) erat $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. hor. 6, min. 9. fit $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. eſt motus medius nodorum circulo toti reſpondens. Et motus nodorum, quo tempore ſol pergit ab *N* ad *A* eſt ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. ut area *NAZ* ad circulum totum.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quod nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut ſol anno toto completo ad nodum eundem redeat à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verùm per motum nodi fit ut ſol citius ad nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. (o) Cum ſol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$, ſeu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis *N* ſit ad ipſius motum mediocrem in quadraturis ſuis, ut *AZq* ad *ATq*: erit motus ſolis ad motum nodi in *N*, ut 360 *ATq* ad 39,6355 *AZq*; id

114. (m) * *Eſt autem maxima AZYa* &c. Nam quando TA eſt perpendicularis in Nn, AZ evadit TA & ZY evadit æqualis Aa, ſicque AZY = AT × Aa, in omnibus autem aliis punctis TA eſt major quam AZ, & Aa major quam ZY, maxima itaque AZYa eſt *æqualis rectangulo ſub arcu Aa & radio circuli.*

(n) * *Erat* $16''\ 16'''\ 37^{iv}\ 42^{v}$, is enim erat motus horarius mediocris, cum nodi erant in Quadraturis, per Prop. præced. ideoque in hâc Propoſ. cum SAT eſt perpendicularis in Nn.

(o) * *Cum Sol* &c. Velocitas ſolis eſt ad velocitatem nodi cum nodi ſunt in quadraturis ut 360^{d}. quæ eſt via ſolis toto anno ad 39. 38′. 7″. 50‴ ſeu 39.6355 gradus quos nodus toto anno conficeret, ſi toto anno maximâ ſua celeritate moveretur; Velocitas nodi cum nodi ſunt in quadraturis, eſt ad nodi velocitatem cum nodi diſtant à Sole arcu AN ut AT*q* ad AZ*q* per Prop. præced. Ergo ex æquo & compoſitis rationibus, velocitas ſolis eſt ad velocitatem nodi cum nodi diſtant à Sole arcu AN ut 360 AT*q* ad 39.6355 AZ*q*; id eſt, dividendo 360 per 39.6355 ut 9.0827667 AT*q* ad AZ*q*. Sed dividendo 360 per $39^{gr}. 38'\ 7''\ 50'''$ prodit numerus 9.0827646 loco hujuſce 9.0827667 collocandus.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROBL. XIII.

id est, ut 9,0827646 ATq ad AZq. Unde si circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa, tempus quo sol percurrat particulam Aa, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus unà cum nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0827646 ATq ad 9,0827646 $ATq + AZq$. Nam tempus est reciprocè ut velocitas quâ particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum solis & nodi. Igitur si tempus, quo sol sine motu nodi percurreret arcum NA, exponatur per sectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum Aa, exponatur per sectoris particulam ATa; & (perpendiculo aY in Nn demisso) si in AZ capiatur dZ, ejus longitudinis (p) ut sit rectangulum dZ in ZY ad sectoris parti-

(p) * *Ut sit Rectangulum dZ in ZY ad sectoris particulam ATa.* Sectoris particula ATa est semper æqualis dimidio Rectanguli AT in Aa, est verò ZY ad Aa ut AZ ad AT, ducantur antecedentes in dZ & consequentes in $\frac{1}{2}$ AT erit rectangulum dZ in ZY ad $\frac{1}{2}$ AT × Aa sive ad sectoris particulam ATa ut dZ in AZ ad $\frac{1}{2}$ ATq. sive ut dZ in 2AZ ad ATq, sed sumitur esse dZ in ZY ad ATa ut AZq ad 9.0827646 ATq + AZq ergo etiam dZ in 2AZ est ad ATq ut AZq ad 9.0827646 ATq + AZq & vicissim dZ in 2AZ est ad AZq ut ATq ad 9.0827646 ATq + AZq & dividendo duos priores terminos per 2AZ est dZ ad $\frac{1}{2}$ AZ ut ATq ad 9.0827646 ATq + AZq. 114

De Mundi Systemate.

particulam ATa ut AZq ad 9,0827646 $ATq+AZq$, id est, ut sit dZ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut ATq ad 9,0827646 $ATq+AZq$; (q) rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d (r) tangit curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA per-

114. (q) * *Rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum*; Nam, ex superioribus, tempus quo sol percurrit arcum Aa sine motu nodi, est ad tempus quo sol à nodo discedet eo arcu Aa si (ipse nodus moveatur) ut 9.0827646 $ATq+AZq$ ad 9.0827646 ATq; hinc convertendo, differentia eorum temporum est ad prius tempus ut AZq ad 9.0827646 $ATq+AZq$, sed, ex hypothesi, sectoris particula ATa designat prius tempus, ea ergo quantitas $dZ \times ZY$ quæ est ad ATa ut AZq ad 9.0827646 $ATq+AZq$ *exprimet decrementum temporis ex motu nodi oriundum.*

(r) * *Et si punctum d tangit curvam NdGn.* Numerus 360 designetur per a numerus 39.6355 dicatur b, ideoque 9.0827646 sit $\frac{a}{b}$, AT dicatur r, & AZ, y eritque $dZ = \frac{\frac{1}{2}r^2y}{\frac{a}{b}r^2+y^2} = \frac{\frac{1}{2}br^2y}{ar^2+by^2}$ & in puncto T ubi AZ evadit AT sive ubi fit $y=r$ est $dZ = \frac{\frac{1}{2}br}{a+b} = \frac{r}{20.1655292}$; ita ut dZ ad vicesimam radii partem nusquam assurgat.

Est autem ex naturâ circuli $TZ=\sqrt{rr-yy}$, & TZ ad AZ ut fluctio ordinatæ AZ ad ZY, ideoque $ZY = \frac{ydy}{\sqrt{rr-yy}}$, hinc elementum $dZ \times ZY = \frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(ar^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ & elementum segmenti NAZ est $\frac{y^2dy}{\sqrt{rr-yy}}$.

Est verò $\sqrt{rr-yy}$ æqualis seriei $r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5} - \frac{5y^8}{128r^7} - \frac{7y^{10}}{256r^9}$ &c.

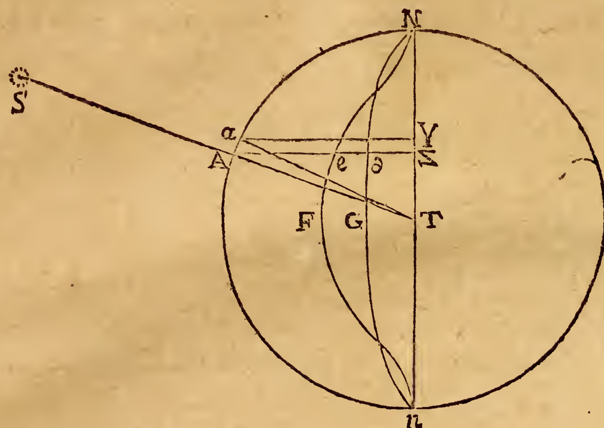
& $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ æqualis seriei $\frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3} + \frac{3y^6}{8r^5} + \frac{5y^8}{16r^7} + \frac{35y^{10}}{128r^9} + \frac{63y^{12}}{256r^{11}}$ &c. quæ series parùm convergit quando y accedit ad valorem r unde prudenter est adhibenda.

Multiplicetur verò hæc series per dy & fiat integratio, obtinetur sequens series quæ exprimit segmentum NAZ, $\frac{y^3}{3r} + \frac{y^5}{10r^3} + \frac{3y^7}{56r^5} + \frac{5y^9}{144r^7} + \frac{35y^{11}}{1408r^9}$ &c. quæ series parum convergit quando $y=r$ sed tunc segmentum NAZ est quadrans circuli qui per alias commodiores approximationes obtinetur.

Dividatur $\frac{1}{2}br^2$ per ar^2+by^2, fit series $\frac{b}{2a} \times 1 - \frac{by^2}{ar^2} + \frac{b^2y^4}{a^2r^4} - \frac{b^3y^6}{a^3r^6} + \frac{b^4y^8}{a^4r^2}$ &c. quæ plurimum convergit propter dignitates crescentes fractionis $\frac{b}{a}$ quæ est circiter $\frac{1}{9}$.

Mul-

percurritur; & propterea excessus sectoris *NAT* supra aream *NdZ* erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore



Multiplicetur itaque per hanc seriem, series $\frac{yy}{\sqrt{rr-yy}}$ superius inventa & obtinebitur hæc series 115.

$$\begin{array}{llllllll}
\frac{b}{2a} \times & \frac{y^2}{r} + & \frac{y^4}{2r^3} + & \frac{3y^6}{8r^5} + & \frac{5y^8}{16r^7} + & \frac{35y^{10}}{128r^9} + & \frac{63y^{12}}{256r^{11}} & \&c. \\
-\frac{b^2}{2a^2} \times & & \frac{y^4}{r^3} + & \frac{y^6}{2r^5} + & \frac{3y^8}{8r^7} + & \frac{5y^{10}}{16r^9} + & \frac{35y^{12}}{128r^{11}} & \&c. \\
+\frac{b^3}{2a^3} \times & & & \frac{y^6}{r^5} + & \frac{y^8}{2r^7} + & \frac{3y^{10}}{8r^9} + & \frac{5y^{12}}{16r^{11}} & \&c. \\
-\frac{b^4}{2a^4} \times & - & - & - & \frac{y^8}{r^7} + & \frac{y^{10}}{2r^9} + & \frac{3y^{12}}{8r^{11}} & \&c. \\
\&c.
\end{array}$$

& multiplicetur hæc series per dy & integretur, fiet series quæ exhibebit valorem areæ NdZ

$$\begin{array}{llllllll}
\frac{b}{2a} \times & \frac{y^3}{3r} + & \frac{y^5}{10r^3} + & \frac{3y^7}{56r^5} + & \frac{5y^9}{144r^7} + & \frac{35y^{11}}{1408r^9} + & \frac{63y^{13}}{3308r^{11}} & \&c. \\
-\frac{b^2}{2a^2} & & \frac{y^5}{5r^3} + & \frac{y^7}{14r^5} + & \frac{3y^9}{72r^7} + & \frac{5y^{11}}{176r^9} + & \frac{35y^{13}}{1664r^{11}} & \\
+\frac{b^3}{2a^3} \times & & & \frac{y^7}{7r^5} + & \frac{y^9}{18r^7} + & \frac{3y^{11}}{88r^7} + & \frac{5y^{13}}{208r^{13}} & \\
-\frac{b^4}{2a^4} \times & & & & \frac{y^9}{9r^7} + & \frac{y^{11}}{22r^9} + & \frac{3y^{13}}{104r^{11}} &
\end{array}$$

DE MUNDI SYSTEMATE.

pore minore minor eſt in ratione temporis, debebit etiam area *AaYZ*

115. Termini variabiles primæ lineæ hujuſce ſeriei, ſeriem ipſam illam conſtituunt quæ eſt valor ſegmenti NAZ, ejus itaque primæ lineæ valor eſt $\frac{b}{2a}$ NAZ.

Si dividantur omnes termini ſecundæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, obſervabitur quotientes hanc habere relationem ad terminos correſpondentes primæ lineæ, ut, ſi exponens litteræ y in termino quovis primæ lineæ dicatur ϱ, quantitas eadem quæ in prima linea dividitur per ϱ, in ſecunda linea dividatur per $\varrho+2$; ſic termino primo ſecundæ lineæ diviſo per $\frac{y^2}{r^2}$ ut evadat $\frac{y^3}{5r}$, quantitas communis $\frac{y^3}{r}$ in prima linea dividitur per 3, in ſecunda per 5, ſicque in omnibus terminis utriuſque lineæ, ut facile conſtabit ex ipsâ origine iſtius ſeriei, & Integrationis lege; hinc ſi ad communem denominatorem reducantur termini utriuſque lineæ, ducendus erit numerator primæ lineæ in $\varrho+2$, numerator ſecundæ in ϱ, & denominator communis erit $\varrho\times\varrho+2$; quare ſubductis terminis ſecundæ lineæ à terminis primæ differentia exprimetur per terminos primæ ſeriei ductos in $\frac{2}{\varrho+2}$ quod ſeriei convergentiam plurimum augebit; ideoque termini variabiles ſecundæ lineæ erunt

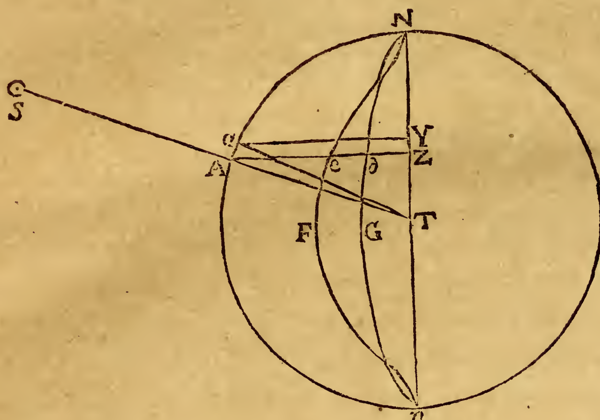
$$\frac{y^2}{r^2}\times NAZ-\frac{y^2}{r^2}\times\frac{2y^3}{15r}+\frac{2y^5}{70r^3}+\frac{6y^7}{504r^5}+\frac{10y^9}{1584r^7}$$ &c. dicatur ad brevitatem ſeries horum terminorum *D* & valor verus iſtius ſecundæ lineæ eſt $-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}$ NAZ $+\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times$ D.

Simili ratiocinio, ut referantur termini variabiles tertiæ lineæ ad ſecundam, dividantur omnes termini tertiæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, & ſi dicantur y exponentes terminorum, differentia terminorum ſecundæ & tertiæ lineæ exprimetur per terminos ſecundæ ſeriei ductos in $\frac{2}{y+2}$, ideoque termini variabiles tertiæ lineæ erunt $\frac{y^4}{r^4}\times NAZ-\frac{y^4}{r^4}\times D-\frac{y^2}{r^2}\times\frac{2y^5}{35r^3}+\frac{2y^7}{126r^5}+\frac{6y^9}{792r^7}$ dicatur E ſeries horum terminorum & valor verus tertiæ lineæ erit $+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times NAZ-\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times D-\frac{b^3y^2}{2a^2r^2}$ E ex quibus facile intelligitur valorem areæ NdZ exprimi poſſe hac ratione.

$$\frac{b}{2a}\times NAZ.$$
$$-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times NAZ+\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}D$$
$$+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times NAZ-\frac{b^3y^2}{2a^3r^4}D-\frac{b^3y^2}{2a^3r^2}E$$
$$-\frac{b^4y^6}{2a^4r^6}\times NAZ+\frac{b^4y^6}{2a^4r^6}D+\frac{b^4y^4}{2a^4r^4}E+\frac{b^4y^2}{2a^4y^2}F \text{ \&c.}$$

Unde

AaYZ diminui in eâdem ratione. Id quod fiet ſi capiatur in *AZ* longitudo *eZ*, quæ ſit ad longitudinem *AZ* ut *AZq* ad



Unde ſummæ coefficientium quantitatum N A *Z*, D, E, F, qui progreſſiones Geometricas formant juxta regulas vulgares obtineri poſſunt, ideoque tandem area NdZ eſt $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}$ NAZ $+\frac{\frac{1}{2}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}$ D $-\frac{\frac{1}{2}b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}$ E $+\frac{\frac{1}{2}b^4y^2}{a^4r^4+a^3by^2}$ F &c. 115

Cor. 1. Primus terminus feriei quæ exprimitur per D eſt $\frac{2}{5}$ primi termini ſeriei quæ exprimit ſegmentum NAZ, & reliqui termini ſeriei D ſunt minores reſpectu reliquorum terminorum ſeriei quæ exprimit id ſegmentum, ergo D minor eſt quam $\frac{2}{5}$ NAZ, & pariter E minor eſt quam $\frac{3y^2}{7r^2}$ D, & F minor quam $\frac{5y^2}{9r^2}$ &c. hinc valor NdZ major eſſe nequit quantitate $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}$ NAZ $+\frac{\frac{1}{5}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}$ NAZ, $=\frac{b\,\mathrm{NAZ}}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2+\frac{b}{5a}y^2$ nec minor eſſe poteſt quantitate $\frac{b\,\mathrm{NAZ}}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2$.

Cor. 2. Hinc ubi $r=y$ & NAZ eſt quadrans circuli valor areæ NdZ major non eſt quantitate NAZ $\times\frac{b}{a+b}\times\overline{\frac{1}{2}+\frac{b}{5a}}$, nec minor quam NAZ $\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}$; ſive major non eſt quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}+\frac{1}{457.8068865}$ ſive quadrantis $\frac{1}{19.3147492}$ nec minor quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}$.

Cor.

De Mundi Systemate.

ad 9,08276 $ATq + AZq$. (f) Sic enim rectangulum eZ in ZY erit ad aream $AZYa$ ut decrementum temporis, quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: & propterea rectangulum illud respondebit decremento motus nodi. Et si punctum e tangat curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe respondebit motui reliquo, qui verus est nodi motus, quo tempore arcus totus NA per solis & nodi conjunctos motus percurritur. (t) Jam vero area semicirculi est ad aream figuræ $NeFn$, per methodum serierum infinitarum quæsitum, ut 793 ad 60 quamproximè. Motus autem qui respondet circulo toti erat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. & prop-

116. Cor. 3. In casibus in quibus y est quam minima, ita ut $ar^2 + by^2$ pro ar^2 sumi possit, valor $\frac{b\,NAZ}{ar^2} \times \frac{1}{2} r^2$ ad verum valorem satis accedet fietque valor areæ $NdZ = \frac{1}{18.1655292}$ segmenti NAZ, unde habentur velut limites valoris areæ NdZ in variis punctis curvæ.

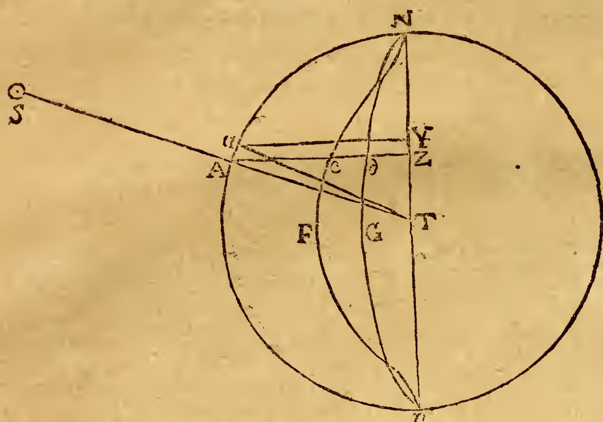
(f) * *Sic enim rectangulum eZ in ZY erit ad aream AZYa*, &c. Ex præcedentibus, area $AZYa$ motum nodorum mediocrem exprimit posito solem sine motu nodi percurrere arcum Aa, si itaque cæteris manentibus celerius percurratur is arcus, motus nodorum sive spatium à nodis percursum minus erit, prout tempus erit brevius; cum ergo tempus quo sol percurrit Aa sine motu nodi, sit ad tempus quo percurreretur Aa posito motu nodi ut $9.0827646\ ATq + AZq$ ad $9.0827646\ ATq$ si fiat AZ ad Ae in eâ ratione & utrumque ducatur in ZY, erunt areæ $AZ \times ZY$, ad $Ae \times ZY$ ut motus nodorum in Hypothesi priori ad eorum verum motum; & convertendo erit $eZ \times ZY$ ad $AZ \times ZY$ ut differentiâ motuum ad motum priorem sive ut AZq ad $9.0827646\ ATq + AZq$.

(t) 116. * *Jam verò area semicirculi est ad aream NeFn.* Commodius calculi ducentur si prius quæramus aream $NAneN$ inter semiperipheriam NAn & curvam Nen contentam, quàm detrahemus ex semicirculi area; tumque residuum erit area $NeFn$, quam cum semicirculi area conferre licebit.

Sit ergo ut prius $3608 = a$, $39°.6355 = b$, $AT = r$ & ATr & $AZ = y$; erit ex notâ præcedenti $9.0827646\ ATq + AZq$ (sive $\frac{ar^2}{b} + y^2$ ad $9.0827646\ ATq$ (sive $\frac{ar^2}{b}$) ut AZ (sive y) ad Ae quod erit itaque $\frac{ar^2y}{ar^2+by^2}$; est verò $ZY = \frac{ydy}{\sqrt{rr-yy}}$; hinc Elementum areæ aAe est $\frac{ar^2y^2dy}{ar^2+by^2\sqrt{rr-yy}}$ sed elementum areæ curvæ $NdGn$ notâ superiore 115 inventum erat $\frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(a^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ ergo elementum areæ curvilineæ $NAnFN$ est ad elementum areæ $NdGn$ in ratione datâ a ad $\frac{1}{2}b$; Unde si valor hujus areæ $NdGn$ in notâ r inventus per $\frac{1}{2}$ dividatur & multiplicetur per a habebitur valor areæ $NAnFN$ qui itaque prodibit

ar^2

propterea motus, qui figuræ *NeFn* duplicatæ respondet, est $1^{gr}. 29'. 58''. 2'''$. Qui de motu priore subductus relinquit $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. motum totum nodi respectu fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum sole; & hic motus de solis motu



annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{gr}. 40'. 54''. 7'''$. motum solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360^{gr}. ut nodi motus jam inventus $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit 19^{gr}.

18'

$$\frac{ar^2}{ar^2+by^2}\,NAZ+\frac{by^2}{ar^2+by^2}\,D-\frac{b^2y^2}{a^2r^2+by}\,E+\frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}\,F \ \&c.$$

Tollatur verò hæc area ex segmento NAZ, sive ex $\frac{ar^2+by^2}{ar^2+by^2}$ NAZ residuum erit $\frac{by^2}{ar^2+by^2}\,NAZ-\frac{by^2}{ar^2+by^2}\,D+\frac{b^2y^2}{a^2r^2+bay^2}\,E-\frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}\,F$ &c.

idque residuum est area quæsita NeZ; quod brevius expressum fit $\frac{by^2}{ar^2+by^2}\times$ $NAZ-D+\frac{b}{a}E-\frac{b^2}{a^2}F$ &c. 11

Jam autem ut habeatur ratio semicirculi ad aream NeFn, sive quod idem est quadrantis circuli ad NFT ejus areæ NeFn dimidium; dicatur c quadrans peripheriæ cujus radius est r; sitque m ad n ut c est ad r; valor quadrantis est $\frac{rc}{2}$, & cum NAZ est quadrans tum

 y=r

DE MUNDI SYSTEMATE. 18'. 1''. 23'''. Hic est motus medius nodorum in anno sidereo. (u) Idem per tabulas astronomicas est 19gr. 21' 21''. 50'''. Differentia minor est parte trecentesimâ motus totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

PRO-

115. $y = r$ ergo valor dimidii areæ NeFn est $\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - D + \frac{b}{a}E - \frac{b^2}{a^2}F + \frac{b^3}{a^3}G$ &c. ex iis autem quæ in notâ (r) dicta sunt, valor D (ponendo r loco y) est $r^2 \times \frac{2}{15} + \frac{2}{70} + \frac{6}{504} + \frac{10}{1584} + \frac{70}{18304}$; qui termini ad decimales reducti faciunt $.184\,r^2$ Omittantur reliqui termini quantitatis D ut & quantitates E, F de quâ omissione postea dicemus, & quoniam est $r = \frac{nc}{m}$ ideoque $r^2 = \frac{nrc}{m} = \frac{2n}{m} \times \frac{rc}{2}$. Valor areæ evadit $\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - \frac{rc}{2} \times \frac{2n}{m} \times .184$ qui valor est ad valorem quadrantis $\frac{rc}{2}$, ut $\frac{b}{a+b} \times 1 - \frac{2n}{m} \times .184$ ad 1, substituendo autem loco b & a, eorum valores, est $\frac{b}{a+b} = .099$; & ex naturâ circuli est $2n$ ad m, sive Diameter ad quartam peripheriæ partem ut 1.274 ad 1 ideoque $\frac{2n}{m} \times .184 = 1.27 \times .184 = .23$, quod detractum ex unitate relinquit .766; Quod tandem ductum in $\frac{b}{a+b}$ sive .099 efficit .0758 qui valor est ad 1; ut area quæsita ad quadrantem; manebit eadem ratio si uterque terminus per 793 ducatur sed .0758 in 793 efficit 60.10. Ergo est area quæsita NeFn ad semicirculum ut 60. proximè ad 793. Q. E. I.

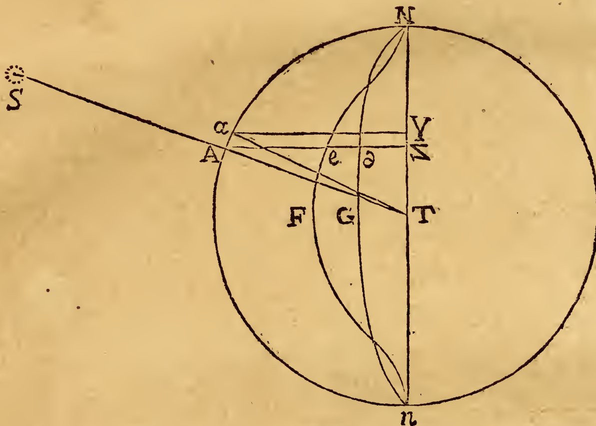
Omisimus terminos seriei D præter quinque priores, & terminos serierum E, F &c. facile enim deprehenditur ex Corollariis notæ (r) ultimos illos terminos seriei D, prope æquales fieri terminis seriei E ductæ in $\frac{a}{b}$ qui termini negativi sunt, sicque mutuò destrui reliquæ verò series cum per dignitates fractionis $\frac{b}{a}$ ducantur brevi evanescunt ut quidem exploravimus calculo ad plures terminos producto.

(u) * *Idem per tabulas Astronomicas.* Cassinus ex antiquis observationibus nodorum motum determinat in anno communi 19°. 19'. 45''. quibus additis 49'' pro motu nodi per 6h. 10' 54''' quibus annus sidereus excedit annum communem, motus ergo nodorum in anno sidereo est 19°. 20'. 34''., ita ut exiguâ duntaxat quantitate differat motus nodorum per calculum inventus, ab eo qui ex observationibus deducitur, & is dissensus est adeo parvus, ut neutiquam turbet argumentum quo confirmetur Newtoniana Theoria ex calculo motus nodorum cum observationibus collato; imo dissensus istius causas ex orbis Lunæ excentricitate & inclinatione fluere indicat Newtonus, sed hæc hujus non sunt loci.

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum nodorum lunæ.

In tempore quod eſt ut areà $NTA - NdZ$, motus iſte eſt ut area NAe, & inde datur. (x) Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem problema-

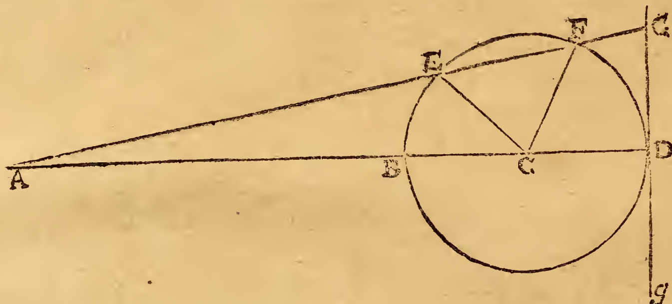


(x) 117. * *Verum ob nimiam calculi difficultatem.* Satis liquet maximam futuram calculi difficultatem ex ipſis ſeriebus in notis 115 & 116 adhibitis, quæ cum parum convergant, regreſſum non tantùm difficilem, ſed etiam parùm tutum habent; hinc alia artificia commodiora adhibet Newtonus quæ ut intelligantur duas Hypotheſes aſſumere liceat quibus pedetentim ad ipſam conſtructionem Newtonianam deveniemus.

Prior ergo Hypotheſis ea ſit quam in Prop. XXXII. fingit Newtonus, ſingulis horis retrahi nodum in locum ſuum priorem, ut nonobſtante motu ſuo proprio datum ſervet ſitum ad fixas, interea verò ſolem progredi à nodo: Eâ quippe in Hypotheſi, ex Prop. XXXII. tota area circuli repræſentat totum nodorum motum integro anno ſidereo, ideoque ſectores NAT repræſentabunt motum medium eo tempore quo Sol diſcedit à nodo arcu NA & ſegmenta NAZ repræſentabunt motum verum eo ipſo tempore, ideoque Triangulum ATZ repræſentabit differentiam motus medii à motu vero, quæ debebit ſubſtrahi à motu medio ut verus motus habeatur in primo quadrante, & tertio ut ex ipsâ figurâ liquet; addi autem in ſecundo & quarto: Cum itaque tota area circuli ſive factum totius Peripheriæ in $\frac{1}{2}r$, deſignet totum motum nodorum durante anno ſidereo, repræſentabit ATZ eam æquationem, quæ æquatio cum AZ ſit y & $TZ = \sqrt{rr-yy}$ eſt

De Mundi Systemate.

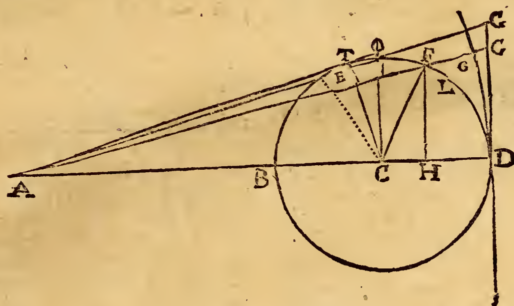
tis conſtructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, deſcribatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut ſit AB ad AC ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut $19^{gr}. 18'. 1''. 23'''.$ ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$, atque ideo BC ad AC ut motuum differentia $0^{gr}. 31'. 2''. 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr}., 49'. 3''. 55'''$. hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur



117. eſt $\frac{1}{2}y\sqrt{rr-yy}$: Dividatur ergo tam circuli valor quam areæ ATZ valor per $\frac{1}{2}r$, erit Peripheria tota ad $\frac{y\sqrt{rr-yy}}{r}$ ut totus motus nodi anno ſidereo ad Æquationem quæſitam, ſive primum conſequentem duplicando & ſecundi antecedentis dimidium ſumendo quod proportionem non turbat, erit Peripheria tota ad $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ut motus ſemeſtris nodi ad Æquationem quæſitam; Sed ex Principiis Trigonometricis, ſinus ejus arcus qui foret duplus arcus NA cujus ſinus eſt y foret $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Ergo ſi deſcribatur circulus radio quocumque CB, & ſumatur arcus BF duplus, arcus NA, hoc, eſt duplus diſtantiæ Solis à nodo (quæ diſtantia per motus medios Solis & nodi haberi poteſt) erit Peripheria tota ad FH ſinum ejus arcus BF ut motus ſemeſtris nodi ad æquationem quæſitam; ideo producatur DCB in A, ita ut radius AD ſit ad radium CD ut Peripheria tota ad motum ſemeſtrem nodi ſive ut a ad $\frac{1}{4}b$, & centro A radio AD deſcribatur arcus DG & ſumatur ejus arcus longitudo quæ ſit æqualis ſinui FH, numerus graduum ejus arcus DG erit ipſa æquatio quæſita; nam ſi ſumeretur in circulo cujus radius eſt CD arcus DL cujus longitudo eſſet æqualis FH, foret tota Peripheria ſeu 360g. ad numerum graduum in eo arcu DL contentorum ut numerus graduum motus ſemeſtris nodi ad numerum graduum æquationis quæſitæ, ſive alternando tota Peripheria ad numerum graduum motus ſemeſtris ut numerus graduum arcus DL ad numerum graduum æquationis quæſitæ; ſed ex conſtru-

piatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ diſtantiæ ſolis à loco nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF ſecans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus qui ſit ad motum totum nodi inter ipſius ſyzygias (id eſt, ad $9^{gr}. 11'. 3''.$) ut tangens DG ad circuli BFD circumferentiam totam; atque angulus iſte (pro quo angulus DAG uſurpari poteſt) ad

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.



ſtructione cum longitudo arcus D G ſumatur æqualis ſinui F H, ſive arcui D L, numerus graduum in eo arcu D L contentorum eſt ad numerum graduum in arcu D G contentorum inverse ut eorum circulorum radii, hoc eſt ex conſtructione, ut 360° ad numerum graduum motus ſemeſtris nodi, ergo numerus graduum arcus D G eſt ipſe numerus graduum æquationis quæſitæ; Satis liquet autem arcum D G paucorum graduum eſſe debere, & à lineâ rectâ parum differre, hinc ſi in puncto D erigatur tangens ad circulum cujus radius eſt CD, ſumaturque DG in tangente æqualis ipſi ſinui F H, perinde prope erit ac ſi ſumeretur ea longitudo ſecundum arcum circuli radio A D deſcripti, & punctum G ſive in Tangente ſive in arcu ſumatur eodem in loco ocurret quam proximè; ita ut ex hâc conſtructione, angulus G A D cujus arcus D G eſt menſura ſit ipſa æquatio quæſita, ſubſtractiva in 1°. & 3°. quadrante, additiva in 2°. & 4to. & obtinebitur juxta Trigonometriæ Principia, dicendo ut A C, ſive $360^{gr} - 9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$, ad C F ſive C B, nempe $9^{d}. 54'. 31'' 57'''$.

hoc eſt, ut $a - \frac{1}{4}b$ ad $\frac{1}{4}b$, ſive ut $35\frac{1}{3}$ ad 1. Ita ſinus duplæ diſtantiæ Solis à nodo ad Æquationem quæſitam: Maxima autem erit æquatio in octantibus, quia area ATZ quæ æquationem repræſentat eſt major in octantibus quam in ullo alio loco. 117

His probè intellectis facile inde ad veriorem computum procedere licebit.

2°. Hyp. In conſtructione Newtonianâ Prop. XXXII. circulus integer N A n N deſignat annum ſidereum, ſimulque motum nodorum in Hypotheſi quòd Sol ipſe deſcribit id ſpatium quo nodi reverâ ab ipſo diſcedunt; in hâc autem Hypotheſi motus nodorum eſt $19^{gr}. 49' 3''. 55'''$. & in calculis noſtris per quantitatem $\frac{1}{2}b$ fuit expreſſum.

Si autem reverâ arcus A N repræſentet receſſum Solis à nodo, tàm per motum proprium Solis quàm per medium motum nodi, tempus quo tota circumferentia N A n N deſcribetur non erit annus ſidereus, ſed tempus elapſum inter ſyzygiam Solis Nodique & ſyzygiam ſequentem Solis cum eodem nodo, cumque uniformiter

ad motum medium nodorum addatur ubi nodi tranſeunt à quadraturis ad ſyzygias, & ab eodem motu medio ſubducatur ubi tran-

117. ter deſcribatur ea circumferentia ſiquidem ad motus medios ſolis & nodorum refertur, ſectores circuli N A n N erunt proportionales motui medio nodorum; itaque ſi totus circulus repræſentet motum nodorum à tempore quo ſol & nodus fuere conjuncti uſque ad ſequentem Solis ſyzygiam cum eodem nodo, ſector A T N repræſentabit motum medium nodorum eo tempore quo motu medio Solis & nodi, nodus & Sol arcu N A à ſe mutuo receſſêre.

Tempus autem, inter duas ſyzygias Solis cum eodem nodo, hâc ratione à Newtono determinatur per obſervationes; anno ſidereo dum nempe ſol $360^{gr.}$ emetitur motus nodi per obſervationes Aſtronomicas $19^{gr.}\ 21'\ 21''.\ 50'''$ deprehenditur, in eâdem autem erunt proportione viæ Solis & nodi quæ ſimul deſcribuntur quocumque tempore, ideoque via Solis & via nodi inter duas ſyzygias Solis cum eodem nodo, erunt inter ſe ut 360 ad $19^{gr.}\ 21'\ 21''\ 50'''$, ſed illæ duæ viæ ſimul ſumptæ $360^{gr.}$ efficiunt, itaque 360 gradus dividantur in duas partes quarum una ſit ad alteram ut $360^{gr.}$ ad $19^{gr.}\ 21'\ 21''\ 50'''$. Hæc ultima pars quæ eſt $18^{gr.}\ 22'.\ 6''$ circiter, erit motus nodi inter duas ſyzygias Solis cum eodem nodo.

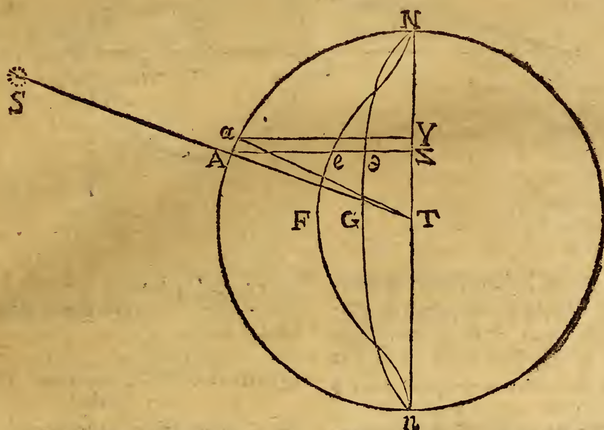
Idem motus ex calculo Prop. XXXII., hoc modo determinabitur, ſi ex toto circulo N A n N duplum areæ N F n tollatur reſiduum eſt verus motus nodi inter ſyzygias; ſed valor areæ N F T erat ad quadrantem ut $\frac{b \times 766}{a+b}$ ad 1. ſive proximè ut $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ad 1. In eâdem vero erit ratione duplum areæ N F n (quod eſt quadruplum areæ N F T) ad totum circulum, ut itaque 1. ad $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ita $\frac{1}{2}b$ qui eſt numerus graduum quem area circuli deſignat, ad numerum graduum deſignatum per duplum areæ N F n, qui erit itaque $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$; Cum ergo totus circulus numerum graduum $\frac{1}{2}b$ deſignet in Prop. XXXII., & duplum areæ N F n deſignet $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$, hoc ex $\frac{1}{2}b$ tollatur, reſiduum $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ eſt verus motus nodi inter ſyzygias.

Itaque cum motus medius nodorum ſit ut ſector A T N; & motus verus nodi exprimatur per aream N A e; Æquatio eſt ut A T N − N A e, hoc eſt, cum totus circulus repræſentet motum nodorum inter ſyzygias, eſt $2rc$ ad A T N − N A e ut $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad Æquat. $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (A T N − N A e), ſed in not. 116. valor areæ N A e fuit inventus $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ N A Z (omiſſis cæteris terminis qui per D, E &c. multiplicantur ut pote minimis).

Itaque fiet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (N T A − $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ N A Z):

Eum autem caſum ſumamus in quo A N eſt peripheriæ octans, quia in primâ Hypotheſi liquet eo in caſu Æquationem fieri maximam, fiet $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, & eâ ſubſtitutione factâ & loco N T A poſito ejus valore T A Z + N A Z factâque reductione, evadet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$(T A Z + $\frac{\frac{1}{2}b\,\text{NAZ}}{a+\frac{1}{2}b}$) & cum area circuli ſit .785 dum quadratum Diametri eſt 1, & octans circuli N T A ſit ad ejus quadrati octantem cujus dimidium eſt T A Z in eâdem ratione, eſt N T A ad T A Z ut .785 ad .5, ideo-

transseunt à syzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum



ideoque dividendo est NAZ ad TAZ ut .285 ad .5, & est NAZ = .57 TAZ unde tandem æq. eradit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc\,(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)$ TAZ Sed in hâc hypothesi est TAZ $=\frac{1}{4}r^2$; hinc æquatio fit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)r$ & ad hanc proportionem revocatur, $4c$ sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2\,(a+b)}$ quod est dimidium motus nodi inter syzygias ut $\frac{a+.78\,b^2}{a+\frac{1}{2}b}r$ ad Æquationem; 117. hoc modo autem construitur quantitas $\frac{a+.78\,b}{a+\frac{1}{2}b}r$, sive simplicius $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+\frac{1}{2}b}r$, describatur circulus BCD cujus radius BC $=r=\frac{1}{4}b$; producatur CB in A ut sit AB $=a+\frac{1}{4}b$, ideoque AC $=a+\frac{1}{2}b$ & AD $=a+\frac{3}{4}b$, centro C erigatur per-

cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream *NTA*

R 37. pendicularis Φ ad circulum uſque & pariter in extremo Diametri D ducatur tangens, ductaque linea A Φ donec ſecet Tangentem in G, liquet quod A C ſive $a + \frac{1}{2} b$ eſt ad A D ſive $a + \frac{3}{4} b$ ut eſt C Φ ſive r ad D G quæ erit $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + \frac{1}{2} b} r$, ideoque erit tota circumferentia ad dimidium motus inter ſyzygias ut D G ad Æquationem quæſitam: ſive invertendo terminos omnes & alternando ut Newtoni expreſſio habeatur, eſt Æquatio ad motum nodi inter Syzygias proximas ut D G ad circuli B E D circumferentiam.

Illa autem Æquatio quæſita erit prope æqualis angulo D A G; nam in Triangulo D A G eſt D G ad ſinum anguli D A G ſive ad ipſum angulum D A G (nam in parvis angulis, angulos pro ſinubus ſumere licet) ut eſt A G vel A D, quod eſt $a + \frac{3}{4} b$, ad ſinum totum ſive ad radium C D quod eſt $\frac{1}{4} b$; ſed ſi $a + \frac{3}{4} b$, & $\frac{1}{4} b$ dividantur per $a + b$, quod rationem non mutat, fiatque $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + b}$ ad $\frac{\frac{1}{4} b}{a + b}$ ita a ſive gradus 360 ad quartum, invenitur is quartus terminus $\frac{\frac{1}{4} a^2 b + \frac{1}{4} a b^2}{(a + \frac{3}{4} b)(a + b)}$; Diviſione factâ per $a + \frac{3}{4} b$ Quotiens eſt $\frac{\frac{1}{4} a b + \frac{1}{16} b^2}{a + b}$ omiſſis, ut licet, dignitatibus altioribus $\frac{1}{4} b$, is verò quotiens eſt ipſa quantitas $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2(a + b)}$ quæ exprimit dimidium motus nodi inter ſyzygias; Ergo reſumendo cum ſit D G ad angulum D A G ut $a + \frac{3}{4} b$ ad $\frac{1}{4} b$ ſive ut circumferentia tota ad dimidium motus nodi inter ſyzygias in eâque ratione ſit D G ad Æquationem, ipſe angulus D A G eſt æqualis æquationi.

Idem alio modo conſtabit; In ipſâ Peripheriâ D Φ B D, ſumatur arcus D L æqualis D G, erit ut 360gr. ad dimidium motus nodi, ita numerus graduum in arcu D L contentorum ad numerum graduum æquationis; centro A radio A D deſcribatur arcus & in eo ſumatur longitudo D G æqualis D L, erit ut radius A D ſive $a + \frac{3}{4} b$ ad radium C D ſive $\frac{1}{4} b$; ita numerus graduum arcus D L ad numerum graduum arcus D G, numeri enim graduum in arcubus æqualibus ſunt inverſè ut eorum radii

$NTA-NdZ$, & motum nodi per aream NAe; ut rem perpenden-ti

117.

radii sed $a+\frac{1}{4}b$ est ad $\frac{1}{4}b$ ut 360^{gr}. sive a ad dimidium motus nodi sive ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$; Est ergo 360 ad dimidium motus nodi inter syzygias ut numerus graduum arcus D L ad numerum gradum arcus D G sed ita etiam erat numerus graduum arcus D L ad numerum graduum æquationis quæsitæ, ergo numerus graduum arcus D G est ipsa æquatio quæsita, sed A G secabit arcum DG in puncto tali ut arcus inter eam lineam & punctum D interceptus sit proximè æqualis Tangenti D G, nam in parvis arcubus, Tangentes prope æquantur suis arcubus, ergo linea A G secabit arcum D G in G quamproximè, sed arcus D G cujus gradus sunt ipsa æquatio, est mensura anguli DAG, ergo angulus DAG pro æquatione usurpari potest.

Dicit autem Newtonus lineam A B debere esse ad lineam A C ut motus medius ad semissem motus veri mediocris quando nodi sunt in quadraturis, id est, ut $19^{gr}. 18'. 1''. 23'''$. ad $10^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. In hâc autem constructione fecimus $AB = a+\frac{1}{4}b$ & $AC = a+\frac{1}{2}b$, res autem eodem redit, cum enim motus nodi inter syzygias sit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ dematur ex a habebitur motus Solis inter syzygias $\frac{aa+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}b^2}{a+b}$; iste motus Solis erit ad ejus motum annuum 360^{gr}. sive a ut motus nodi inter syzygias $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad motum annuum nodi qui itaque erit $\frac{\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{8}ab^2}{aa+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}ab^2}$ is itaque motus erit ad $\frac{1}{2}b$ quod exprimit semissem motus veri mediocris ubi nodi sunt in quadraturis ut $\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{8}ab^2$ ad $\frac{1}{2}aab+\frac{1}{4}abb-\frac{1}{16}b^3$; sive omisso termino $\frac{1}{16}b^3$, divisis reliquis terminis per ab & duplicatis ut $a+\frac{1}{4}b$ ad $a+\frac{1}{2}b$; Ergo in constructione nostra est A B sive $a+\frac{1}{4}b$ ad A C sive $a+\frac{1}{2}b$ ut motus annuus nodi, ad semissem ejus quod toto anno describeretur eo motu quem habent nodi in quadraturis; Itaque erit etiam $a+\frac{1}{4}b$ ad $a+\frac{1}{2}b$ sive A B ad AC ut motus medius nodi ad semissem motus veri in quadraturis ut statuit Newtonus; Observandum quidem ex hâc constructione æquationem futuram maximam quando linea A G tangit circulum, quod quidem incidit paulò ante punctum Φ, & si à puncto A ducatur tangens A T erit ut A C ad C T ita sinus totus ad Cosinum anguli B C T, qui angulus, B C T deprehendetur esse $88^{o}\frac{1}{2}$. cujus dimidium $44\frac{1}{4}^{o}$. est verus locus medius in quo maxima fit æquatio, ab Octante adeo parum dissitus ut in sequentibus æquationem maximam fieri in Octantibus supponere liceat, tanto magis quod hæc æquatio quæ verè maxima foret ab ea quæ fit in Octantibus insensibiliter differret.

3ª. *Hypoth.* Finximus arcum A N esse octantem Peripheriæ, & eo in casu ostendimus constructionem Newtonianam exhibere æquationem illi loco debitam, in aliis distantiis Solis à nodo paulo minus accurata est constructio, sed errore exiguo; ubivis enim, æquatio erit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ $\left(TAZ+NAZ-\frac{ar^2}{ar^2+by^2}NAZ\right)=$ $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}\left(TAZ+\frac{by^2}{ar^2+by^2}NAZ\right)$ sumatur NAZ esse ad TAZ ut $r-\sqrt{rr-yy}$ ad $\sqrt{rr-yy}$, quod quidem verum est de spatio Rectilineo N A Z non vero de curvilineo N A Z, sed propter exiguitatem fractionis $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ errorem

De Mundi Systemate.

ti & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio semestris

117. rorem non magnum pariet, fit æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)$ TAZ sive numeratore & denominatore quadruplicato quod valorem non mutat, fit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{4ar^2+by^2}\right)\frac{4TAZ}{r}$, quæ quantitas ad hanc proportionem revocatur, $4c$ sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$ quod est dimidium motus nodi inter syzygias ut $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+2by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$ ad Æquationem quæsitam.

Ut construatur hæc quant. $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$, fiat ut prius circulus BFD cujus radius $BC=r=\frac{1}{4}b$, ideoque $b=4r$, producaturque CB in A ita ut sit $AB=a+\frac{1}{4}b$, sumatur arcus BF duplus arcus AN, ductoque perpendiculo FH, & tangente erectâ in D ductâque AFG erit DG prope æqualis quantitati $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$; est enim ex constructione AH ad AD ut FH ad DG ideoque $DG=\frac{AD}{AH}FH$ est autem $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}=\frac{AD}{AH}\times FH$, nam posito $4r$ loco b & utroque termino diviso per r^2, fit $\frac{a+\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4y^2}{r}}$;

Valor mediocris quadrati y^2 est $\frac{1}{2}r^2$, unde $\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}=\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}}$ est paulo major quam $\frac{2}{3}$ hinc $\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{6y^2}{r}=3r$; Præterea

$4y^2$

mestris motus nodorum. Est & (y) æquatio menstrua, sed quæ

$\frac{2yy}{r}$ valore suo medioci est r, est etiam $\frac{2yy}{r}$ sinus versus arcus dupli ejus cujus sinus est y, ideoque $\frac{2yy}{r}$ est accuratè æquale BH unde $a+\frac{4yy}{r}$ est $a+r+$BH, sed $a+r$ per constructionem est AB, ergo $a+\frac{4yy}{r}$ est AH, ideoque $\frac{a+\frac{4yy}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4yy}{r}}=\frac{a+3r}{AH}$

absque errore sensibili, quia si $\frac{2yy}{r}$ minus sit aut majus quam r, quoniam idem valor in numeratore ac denominatore occurrit, & ea quantitas non est magna respectu totius AH, manebit idem fractionis valor; sed $a+3r=$AD ideoque fractio $\frac{arr+\frac{bryy}{\sqrt{rr-yy}}}{arr+byy}$ est proximè æqualis fractioni $\frac{AD}{AH}$.

Est vero accuratè $\frac{4TAZ}{r}=$FH, nam Triangulum TAZ $=\frac{AZ\times TZ}{2}$, est AZ $=y$, TZ $=\sqrt{rr-yy}$, ergo $\frac{4TAZ}{r}=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Sed, ex Principiis Trigonometricis, sinus arcus dupli ejus cujus sinus est y, est $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ergo sinus arcus BF qui duplus est arcus AN cujus sinus est y est $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, sed sinus arcus BF est FH ex constructione, ideoque FH $=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}=\frac{4TAZ}{r}$, & quantitas $\frac{AD}{AH}\times$ FH $=\frac{arr+\frac{bryy}{\sqrt{rr-yy}}}{arr+byy}\times\frac{4TAZ}{r}$.

Quibus expositis, cætera, nempe angulum DAG pro æquatione sumi posse, lineas AB ad AC sumendas esse ut motus medius nodi ad semissem ejus motus in quadraturis, cætera, inquam, patent ut in Hypothesi secundâ.

(y) * *Est & æquatio menstrua*, ex iis quæ

quæ ad inventionem latitudinis lunæ minime necessaria est. Nam cum variatio inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, alteri autem menstruæ; inæqualitas & æquatio menstrua nodorum ita se mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda latitudine lunæ negligi possunt.

Corol. Ex hac & præcedente propositione liquet quod nodi in (z) syzygiis suis quiescunt, in quadraturis autem regrediuntur

quæ in Prop. XXX. & XXXI. dicta sunt,
117. liquet quod dum Luna motu menstruo circa terram fertur, nodi satis inæqualiter feruntur hinc si locus nodorum ex eorum motu medio æstimaretur, locus ille medius à vero nonnihil differret, idque quod esset corrigendum secundum diversam Lunæ ipsius distantiam à nodo Æquatio menstrua meritò diceretur, sed cum totus motus menstruus Lunæ non sit 2gr. & compensetur latitudinis error qui ex falsâ nodi positione oriretur per inclinationis Lunæ inæqualitates, operæ pretium non duxit Newtonus hanc Æquationem tradere, suo loco autem de eâ compensatione agetur.

(z) * *Liquet quod nodi in syzygiis quiescunt.* Etenim motus nodorum est ut area AZYa dempta area eZY, ubi verò nodi sunt in syzygiis ideoque ubi punctum A incidit in N, evanescit linea A Z ac per consequens area A Z Y a − e Z Y nullus itaque est nodorum motus. *In quadraturis autem regrediuntur motu horario* 16″ 19‴ 26iv. Si nodi distent 90gr. à Sole, A Z fit æqualis AT, & ZY=Aa, ideoque area AZYa quæ est Parallelogrammum ejusdem altitudinis ac baseos ac Triangulum A T a est ejus duplum, cumque e Z sit ad A Z ut AZq ad $9.0827646\ ATq + AZq$ sitque A Z = A T in hoc casu, fit $eZ = \frac{AT}{10.08276}$ & area e Z Y est $\frac{AT \times Aa}{10.0827646}$ sive duplum Trianguli A T a divisum per 10.0827646 hinc motus nodi qui exprimitur per aream AZYa−eZY, est in hoc casu

tur motu horario $16''. 19'''. 26^{iv}$. (a) Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit $1^{gr}. 30'$. Quæ omnia cum phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Scholium.

Aliâ ratione motum nodorum *J. Machin Astron. Prof. Gresham.* & *Hen. Pemberton* M D. seorsum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta est. Et utriusque chartæ, quas vidi, duas propositiones continebant, & inter se in utrisque congruebant. Chartam vero D. *Machin*, cum prior in manus meas venerit, hic adjungam.

De

casu ad aream A T a ut $2 - \frac{2}{10.0827646}$ ad 1, sed quia tota area N A n N motum annuum designat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. Triangulus A T a motum horarium repræsentans numerum graduum designabit qui obtineretur dividendo $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. per numerum horarum in anno sidereo comprehensarum & ea divisione factâ numerus graduum quem repræsentat Triangulus A T a invenietur $8''. 8'''. 18^{iv}. 51^{v}$. si itaque fiat 1. ad $\frac{18.0827646}{10.0827646}$ ita iste numerus ad quartum $8''. 8'''. 18^{v}. 51^{v}$. invenietur $16''. 19'''. 26^{iv}$. qui erit motus horarius quo nodi regrediuntur in quadraturis.

(a) * *Et quod Æquatio motus nodorum in octantibus sit* $1^{gr}. 30'$. Ex secundâ hypothesi notæ 117. Æquatio in Octantibus per hanc proportionem invenitur, ut tota circumferentia circuli B F D B ad dimidium motus nodi inter syzygias quod est $9^{gr}. 11'. 3''$. ita $\frac{a + .78\,b}{a + \frac{1}{2}b}$ r ad Æquationem quæsitam; est autem b ad a ut 1 ad 9.0827646, itaque $a + .78\,b$ est ut 9.8627646 & $a + \frac{1}{2}b$ ut 9.5827646 itaque fractio $\frac{a + .78b}{a + \frac{1}{4}b} = \frac{9.8627646}{9.5827646} =$ 1.0292191, quæ ducta in $r = \frac{1}{4}b = 9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$. dat $10^{d}. 11'. 54''. 15'''. 8^{iv}. 11^{v}$., ducta iterum in $9^{gr}. 11'. 3''$, dat $93^{gr}. 39'. 49''. 48'''$., sed si radius r circuli B F D B exprimatur per numerum $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$., longitudo circumferentiæ continebit tales gradus $62^{gr}. 13'. 39''. 50'''$. Diviso itaque numero $93^{gr}. 39'. 49''. 48'''$ per $62^{gr}. 13'. 39''. 50'''$. Quotiens sive Æquatio quæsita est $1^{gr}. 30'. 18''$. &c. 117.

Calculum hunc integrum exhibuimus ut ostenderemus quomodo adhibendæ forent quantitates $4c$ & r quæ circumferentiam totam ejusque radium exhibent, cum enim is radius æquipolleat $\frac{1}{4}b$, & $\frac{1}{4}b$ sit $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$., cavendum ne $4c$ sive circumferentia tota, 360^{gr}. assumatur, sed debet assumi ejus numeri graduum qui sit ad $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$. ut est circumferentia ad Radium.

De hâc autem Æquatione semestri non agunt De La Hirius & Cassinus in Tabulis Astronomicis, nullius enim usus est ad calculum Eclipsium ad quem potissimum accommodantur pleræque Lunares Tabulæ; hanc autem Æquationem habent Tabulæ Rudolphinæ (pag. 87. Tabul.) & in Octantibus distantiæ Solis à nodo hanc faciunt $1^{gr}. 39'. 46''$., utrum accuratioribus Tabulis hæc æquatio ad $1^{gr}. 30'. 18''$. magis accederet ignoramus, at, qui pro-

De Mundi Systemate.

DE MOTU NODORUM LUNÆ.

PROPOSITIO I.

„*Motus solis medius à nodo, definitur per medium proportionale geometricum, inter motum ipsius solis medium, & motum illum mediocrem quo sol celerrimè recedit à nodo in quadraturis.*

„Sit T locus ubi terra, Nn linea nodorum lunæ ad tempus „quodvis datum, KTM huic ad rectos angulos ducta, TA „recta circum centrum revolvens eâ cum velocitate angulari „quâ sol & nodus à se invicem recedunt, ita ut angulus inter „rectam quiescentem Nn & revolventem TA, semper fiat æ„qualis distantiæ locorum solis & nodi. Jam si recta quævis „TK dividatur in partes TS & SK quæ sint ut motus solis „horarius medius ad motum horarium mediocrem nodi in qua„draturis, & ponatur recta TH media proportionalis inter par„tem TS & totam TK, hæc recta inter reliquas proportiona„lis erit motui medio solis à nodo.

„Describatur enim circulus $NKnM$ centro T & radio TK, „eodemque centro & semiaxibus TH & TN describatur ellip„sis $NHnL$, & in tempore quo sol à nodo recedit per ar„cum Na, si ducatur recta Tba, area sectoris NTa exponet „summam motuum nodi & solis in eodem tempore. Sit igitur „arcus aA quam minimus quem recta Tba præfatâ lege revol„vens in datâ temporis particulâ uniformiter describit, & sector „quam minimus TAa erit ut summa velocitatum quâ sol & „nodus tum temporis seorsim feruntur. Solis autem velocitas „ferè uniformis est, utpote cujus parva inæqualitas vix ullam „indu-

117. bè norunt quam difficile sit observationes loci Nodi accuratissimas habere extrà Eclipses, & quantùm parvus error in latitudine Lunæ & in verâ inclinatione orbitæ assignandâ locum nodi mutet, non invenient hoc discrimen 9' obesse, quominus dici possit æquationem ita inventam cum Phænomenis cœlestibus probè quadrare, & facile suspicabuntur errorem hunc observationi potius quam calculo esse tribuendum.

„inducit in medio nodorum motu varietatem. Altera pars hu„jus summæ nempe velocitas nodi in mediocri suâ quantitate, „augetur in recessu à syzygiis in duplicatâ ratione sinus distan„tiæ ejus à sole; per Coroll. Prop. 31. Lib. 3tii. Princip. & „cum maxima est in quadraturis ad solem in K, (b) eandem „rationem obtinet ad solis velocitatem ac ea quam habet SK „ad TS hoc est (c) ut (differentia quadratorum ex TK & TH „vel) (d) rectangulum KHM ad TH quadratum. Sed ellip„sis NBH dividit sectorem ATa summæ harum duarum ve„locitatum exponentem, in duas partes $ABba$ & BTb ipsis „velocitatibus proportionales. Producatur enim BT ad circu„lum in β, & à puncto B demittatur ad axem majorem per„pen-

(b) * *Eamdem rationem obtinet* per constructionem.

(c) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH—ad TH quadratum.* Est ex constructione TK ad TH ut TH ad TS, est ergo TK^2 ad TH^2 ut TK ad TS, & dividendo $TK^2 - TH^2$ ad TH^2 ut TK—TS sive SK ad TS. 117.

(d) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH vel rectangulum KHM.* Est enim $TK^2 - TH^2 = KH \times HM$, per 5am. Lib. 2i. Elem. Euclidis.

DE MUNDI SYSTEMATE.

„pendicularis BG, quæ utrinque producta occurrat circulo in „punctis F & f, & (e) quoniam spatium $ABba$ est ad secto- „rem TBb ut rectangulum $AB\beta$ ad BT quadratum (rectangulum „enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex TA & TB „ob rectam $A\beta$ æqualiter & inæqualiter sectam in T & B.) „Hæc igitur ratio ubi spatium $ABba$ maximum est in K, ea- „dem erit ac ratio rectanguli KHM ad HT quadratum, sed „maxima nodi mediocris velocitas erat ad solis velocitatem in hâc „ratione. Igitur in quadraturis sector ATa dividitur in partes velo- „citatibus proportionales. Et (f) quoniam rectang. KHM est ad HT „quadr. ut FBf ad BG quad. (g) & rectangulum $AB\beta$ æqua- „tur rectangulo FBf. Erit igitur areola $ABba$ ubi maxima „est ad reliquum sectorem TBb, ut rectang. $AB\beta$ ad BG „qua-

117. (e) * *Et quoniam spatium ABba* &c. Sector TAa est ad sectorem TBb ut AT^2 ad BT^2, (quia propter parvitatem anguli ATa, non differt sensibiliter sector BTb ab eo qui inter lineas AT, aT interciperetur & terminaretur arcu circuli centro T, radio TB descripti). Dividendo autem est TAa − TBb sive ABba ad TBb ut $AT^2 - BT^2$ ad BT^2; est verò $AT^2 - BT^2 = AB \times B\beta$ (per 5. 2[i]. Lib. El.) ergo *ABba ad TBb ut AB\beta ad BT quadratum.*

(f) * *Et quoniam rectangulum KHM est ad HT quad. ut FBf ad BG quad.* Ex natura Ellipseos & circuli circumscripti, est KT ad HT ut FG ad BG, & quadrando KT^2 ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2; & dividendo $KT^2 - HT^2$ ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, sed (per 5[am]. Lib. 2[i]. Elem.) $KT^2 - HT^2 = KH \times HM$ & $FG^2 - BG^2 = FB \times Bf$ ergo KHM ad HT^2 ut FBf ad BG^2.

(g) * *Et rectangulum $AB\beta = FBf$* (per 35. 3[i]. Elem.) hoc ratiocinium ita exprimi potest, area ABba ubi maxima est, est ad TBb ut $AB\beta$ ad BG^2 ergo ubi maxima est ABba est $\frac{TB \times AB\beta}{BG^2}$, in aliis verò locis area ABba est ad TBb ut $AB\beta$ ad BT^2, ergo illis in locis est $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$, est ergo area ABba ubi maxima est ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$ ad $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$ sive quia motus Solis qui per aream TBb exprimitur est ubique idem, est area ABba ubi maxima est ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{1}{BG^2}$ ad $\frac{1}{BT^2}$ sive ut BT^2 ad BG^2, sed in Triangulo BTG est BT ad BG ut sinus anguli recti G ad sinum anguli BTG per Principia Trigonom. & distantia Solis à nodo ubi area ABba est maxima, nempe in K, mensuratur per angulum rectum, & ubi est in loco quovis A per angulum BTG, ergo area ABba ubi maxima est, est ad aream ABba in alio quovis loco ut quadrata sinuum distantiæ Solis à nodo in utrovis loco, sed in eâ sunt ratione motus nodorum in iis distantiis; Ergo ut est area ABba ubi maxima est ad motum nodi in eo loco, ita est area ABba in alio quovis loco ad motum nodi in eo loco, sed ubi area ABba maxima est, est ad motum nodi ut BTb ad motum Solis, ergo cum areæ BTb & motus Solis ubique eadem maneant, est etiam in quovis loco area ABba ad motum nodi ut area BTb ad

„quadr. Sed ratio harum areolarum ſemper erat ut *ABβ* re-„ctang. ad *BT* quadratum; & propterea areola *ABba* in lo-„co *A* minor eſt ſimili areola in quadraturis, in duplicatâ ra-„tione *BG* ad *BT* hoc eſt in duplicatâ ratione ſinus diſtantiæ „ſolis à nodo. Et proinde ſumma omnium areolarum *ABba* „nempe ſpatium *ABN* erit ut motus nodi in tempore quo ſol „digreditur à nodo per arcum *NA*. Et ſpatium reliquum nem-„pe ſector ellipticus *NTB* erit ut motus ſolis medius in eodem „tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius, „is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum ſuam abſolverit, „motus nodi medius à ſole erit ad motum ipſius ſolis medium, „ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut recta *TK* ad re-„ctam *TH* mediam ſcilicet proportionalem inter *TK* & *TS*; vel „quod eodem redit ut media proportionalis *TH* ad rectam *TS*.

PRO-

ad motum Solis ſive alternando eſt ubique AB.ba ad BTb ut motus nodi ad motum Solis. *Et proinde ſumma omnium ABba &c.* 3.3.7.

PROPOSITIO II.

„*Dato motu medio nodorum lunæ invenire motum verum.*

„Sit angulus A diſtantia ſolis à loco nodi medio, ſive motus „medius ſolis à nodo. Tum ſi capiatur angulus B cujus tangens „ſit ad tangentem anguli A ut TH ad TK, hoc eſt in ſubdu„plicatâ ratione motus mediocris horarii ſolis ad motum me„diocrem horarium ſolis à nodo in quadraturis verſante; erit „idem angulus B diſtantia ſolis à loco nodi vero. Nam jun„gatur FT & ex demonſtratione propoſitionis ſuperioris (h) erit „angulus FTN diſtantia ſolis à loco nodi medio, angulus au„tem ATN diſtantia à loco vero, & tangentes horum angu„lorum ſunt inter ſe ut TK ad TH.

„*Coroll.* Hinc angulus FTA eſt æquatio nodorum lunæ, „(i) ſinuſque hujus anguli ubi maximus eſt in octantibus, eſt „ad

117. (h) * *Erit angulus FTN diſtantia Solis à loco nodi medio.* Cum circulus NKnM repræſentet totum motum Solis à nodo inter ſyzygias proximas cum eodem nodo, ſectores ejus circuli ut F T N repræſentabunt motum medium Solis à Nodo, tempore quod erit ad totum tempus motus Solis inter ſyzygias cum eodem nodo, ut erit is ſector aſſumptus ad totum circulum.

Ducatur verò F G quæ occurrat Ellipſi in B, cumque ſectores Elliptici B T N repræſentent Solis motum qui uniformis ſupponitur, ii ſectores B T N ſunt proportionales tempori; ſed ſector Ellipticus B T N erit, ex natura Ellipſeos & circuli circumſcripti, ad totam Ellipſim ut ſector circularis FTN ad totum circulum, ideoque tempus quo Solis motus repræſentabitur per B T N erit idem ac tempus quo Sol à nodis receſſerit motu medio repræſentato per F T N, ſed dum Sol deſcribit ſectorem B T N, vero motu recedit à nodo ſectore N T A, per dem. prop. ſuper. ergo ſector F T N repræſentat medium motum Solis à nodo eo tempore quo verus ejus à nodo motus repræſentari debet per N T A, ergo medius motus eſt ad verum ut angulus T N ad angulum A T N, Tangentes autem horum angulorum, ſumendo T G pro radio, ſunt F G & B G, & F G eſt ad B G ut K T ad K H ex naturâ circuli & Ellipſeos.

(i) * *Sinuſque hujus anguli in octantibus eſt ad Radium ut KH ad TK+TH.* Ex Principiis Trigonometricis, eſt ſinus hujus anguli F T A qui eſt æquatio nodorum Lunæ ad ſinum anguli T F G, qui in hoc caſu eſt 45gr. (cujus ergo ſinus eſt $TA\sqrt{\frac{1}{2}}$) ut eſt F B ad B T, ſive omnes terminos quadrando; eſt quad. ſinus Æquationis ad $\frac{TA^2}{2}$ ut FB^2 ad BT^2 ſive tollendo fractionem, eſt quadr. ſinus Æquationis quæſitæ ad TA^2 ut FB^2 ad $2BT^2$, ſed $BT^2 = BG^2 + TG^2$ & in octantibus eſt $TG = FG$ ſive $BG + BF$ cujus quad. eſt $BG^2 + 2BG \times BF + BF^2$ hinc $BT^2 = 2BG^2 + 2BG \times DF + BF^2$ & $2BT^2 = 4BG^2 + 4BG \times BF + 2BF^2$, cujus Radix quadrata (negligendo BF^2) eſt

„ad radium ut *KH* ad *TK+TH.* Sinus autem hujus æqua- „tionis in loco (k) quovis alio *A* eſt ad ſinum maximum, ut „ſinus ſummæ angulorum *FTN+ATN* ad radium: hoc eſt „ferè ut ſinus duplæ diſtantiæ ſolis à loco nodi medio (nempe „2*FTN*) ad radium.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.

Scholium.

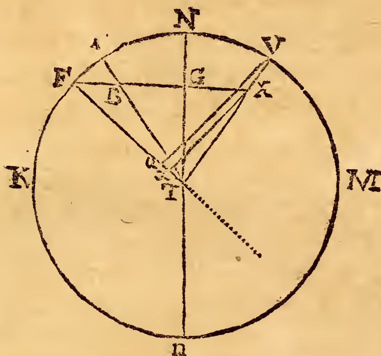
„SI motus nodorum mediocris horarius in quadraturis ſit „16′′. 16′′′. 37iv. 42v. hoc eſt in anno toto ſidereo 39°. 38′. „7′′.

eſt 2 BG+BF=FG+BG: Ergo tandem cum ſit quad. ſinus Æquationis quæſitæ ad TA² ut eſt FB² ad 2 BT²; Radices quadratas omnium terminorum ſumendo eſt ſinus Æquationis ad TA ſive ad Radium ut eſt FB ad FG+BG, ſed eſt BF ad FG+BG ut KH ad TK+TH, hinc tandem, ſinus Æquationis maximæ eſt ad radium ut KH ad TK+TH.

(k) * *Sinus autem Æquationis in loco quovis alio &c.* Ut hoc commodè demonſtretur hoc Lemma adhibendum eſt.

1175

„7″. 50‴. erit (1) *TH* ad *TK* in subduplicatâ ratione nu„meri 9,082764 ad numerum 10,0827646, hoc est ut „18,



117. In circulo quovis N K n M sumatur arcus N F ejusque sinus F G, ex centro ducatur recta T B A quæ secet hunc sinum in B, dico quod sinus summæ angulorum F T N, A T N erit ad T G Cosinum anguli assumpti F T N, ut summa linearum F G, B G, ad lineam B T.

Ex alterâ parte puncti N sumatur arcus N V = N A, ducatur T V & producatur F G quæ occurrat radio T V in X, ductoque radio F T eoque producto si opus est, ducantur, in ipsum perpendiculares X x, V u.

Liquet ex constructione, lineam B T esse æqualem lineæ X T, lineam G X esse æqualem lineæ BG, ideoque totam FX esse æqualem summæ linearum F G, B G; liquet pariter lineam V u esse sinum arcus F V qui est summa arcuum N F & N V sive NA, & propter Triangula FXx, FTG similia, ob angulum F communem & rectos x & G est TF ad TG ut FX ad Xx, & propter Triangula similia u V T, xXT esse Vu ad TV sive TF ut Xx ad TX sive BT; unde ex perturbato ordine fit Vu ad TG ut FX sive FG+BG ad BT; Est itaque $BT = \frac{(FG+BG)TG}{Vu}$.

Ex hoc Lemmate facile probatur sinum æquationis in quovis loco esse ad sinum æquationis maximæ ut sinus summæ angulorum FTN + ATN ad radium; nam ex Principiis Trigonometricis, est sinus Æquationis quæsitæ sive sinus anguli FTB ad sinum anguli F (qui est TG Cosinus nempe anguli FTN) ut est BF ad BT hoc est, ut est BF ad $\frac{(FG+BG)TG}{Vu}$ per Lemma; ducatur uterque consequens in $\frac{Vu}{TG}$ fiet sinus æquationis quæsitæ ad Vu qui est sinus summæ angulorum FTN+ATN ut BF ad FG+BG, sed ex notâ præcedenti est BF ad BF+BG ut KH ad TK+TH, & est KH ad TK+TH ut sinus æquationis maximæ ad Radium, hinc tandem, sinus æquationis cujusvis ad sinum summæ angulorum FTN+ATN, ut sinus æquationis maximæ ad Radium.

(1) * *Erit TH ad TK in subduplicatâ*

„18,6524761 ad 19,6524761. Et propterea TH ad HK ut „18,6524761 ad 1. hoc eſt ut motus ſolis in anno ſidereo ad „motum nodi medium 19°. 18′, 1″. 23‴$\frac{2}{3}$.

„At ſi motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis „ſit 360°. 50′. 15″. ſicut ex obſervationibus in theoriâ lunæ „adhibitis deducitur: motus medius nodorum in anno ſidereo „erit 19°. 20′. 31″. 58‴. Et TH erit ad HK ut 360gr. „ad 19°. 20′. 31″. 58‴. hoc eſt ut 18,61214 ad 1. unde „motus mediocris horarius nodorum in quadraturis evadet „16″. 18‴. 48iv. Et æquatio nodorum maxima in octanti„bus 1°. 29′ 57″.

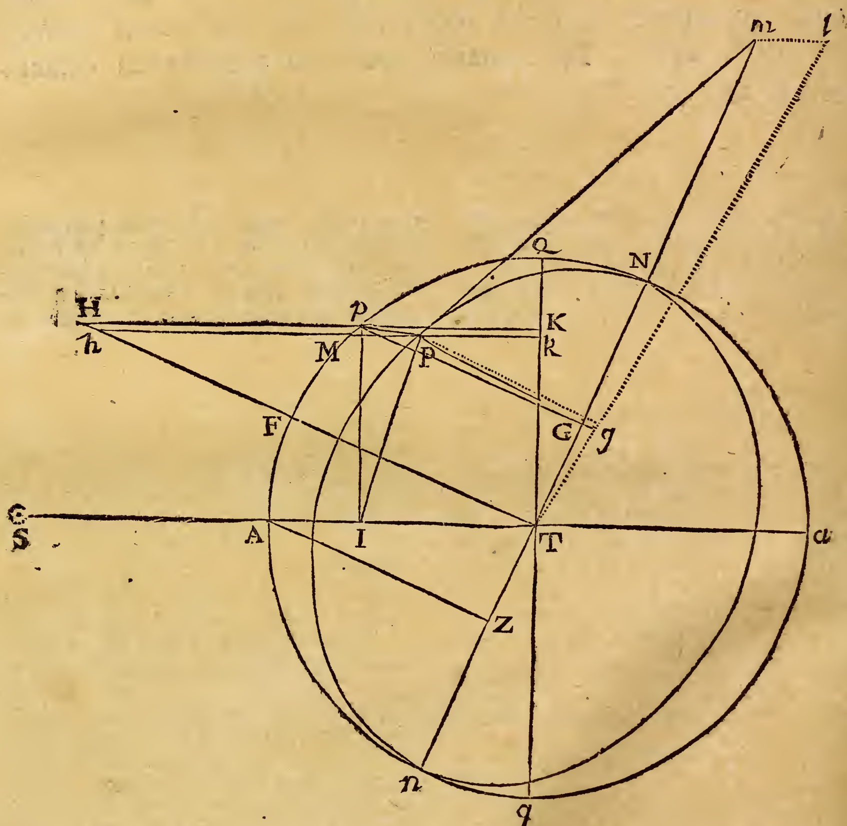
(117) *ratione &c.* Eſt TS ad SK ut motus Solis ad motum horarium nodi in quadraturis, hoc eſt, ut 360. ad 39gr. 38′. 7″. 50‴. ſive ut 9.0827646 ad 1, ergo componendo eſt TS ad TK ut 9.0827646 ad 10.0827646. ergo TH media proportionalis inter TS & TK, *eſt ad TK in ſubduplicatâ ratione &c.* Reliqua hujus ſcholii ſimilibus calculis deducuntur, qui faciliores ſunt quàm ut plenius explicentur.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Designent *A* & *a* syzygias; *Q* & *q* quadraturas; *N* & *n* nodos; *P* locum lunæ in orbe suo; *p* vestigium loci illius in



plano eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, *pG* & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis lunaris ad planum eclipticæ,

ticæ, ubi luna versatur in P; & angulus Pgp inclinatio ejusdem post momentum temporis completum; ideoque angulus GPg variatio momentanea inclinationis. Est (m) autem hic angulus GPg ad angulum GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus GTg (per prop. xxx.) sit ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut $IT \times PG \times AZ$ ad AT *cub.* erit angulus GPg (seu inclinationis horariæ variatio) ad angulum $33''. 10'''. 3^{vi}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* *Q E I.*

Hæc ita se habent ex hypothesi quod luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille ellipticus sit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. (n) Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

Co-

(m) *Est autem angulus GPg ad angulum.* In Triangulo PGg, sinus anguli GPg est ad lineam Gg, ut sinus anguli PGg ad Pg (sive PG, nam Pg & PG quam minimum differunt) si verò PG assumatur pro radio, sinus anguli PGg est Pp, ergo sinus anguli GPg est ad Gg ut Pp ad PG.

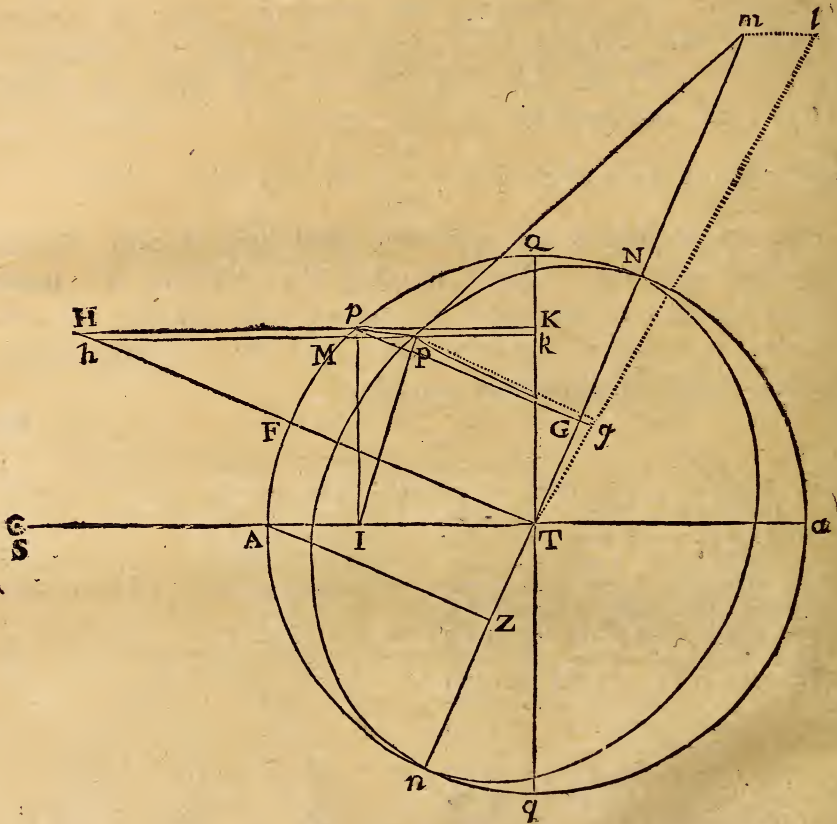
In Triangulo GTg, est Gg ad sinum anguli GTg ut Tg sive TG ipsi proximè æqualis ad sinum Anguli Recti in G qui est radius pro quo PG hic assumitur ergo ex æquo, sinus Anguli GPg est ad sinum anguli GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim, & quia sinus parvorum Angulorum sunt ut ipsi Anguli, est *angulus GPg ad angulum* &c.

(n) * *Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.* Ex propositionis demonstratione liquet quod variatio inclinationis est ad motum nodorum ut Pp ad PG (sive ut sinus inclinationis plani ad Radium) & ut PG ad TG; sumatur Π in Ellipsi ad eamdem distantiam à nodo ac P in circulo, ratio PG ad TG eadem erit ac ratio ΠΓ ad TΓ, per constructionem. cum autem hic agatur de quantitate mediocri sumatur eamdem esse plani inclinationem sive agatur de Plano Elliptico sive de plano circulari; Ergo variatio Inclinationis erit semper ut motus nodorum sive agatur de plano Elliptico sive de plano circulari; sed motus nodorum mediocris in orbe circulari est ad ejus motum in orbe Elliptico ut axis major ad minorem per Cor. Prop. XXXI.

117.

In eâdem etiam ratione minuetur inclinationis variatio.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, sitque pM motus horarius lunæ in plano eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demissa & utrinque producta occurrant TF in H



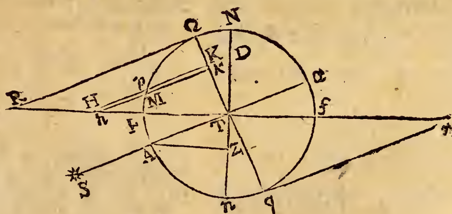
& h: (o) erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc

117. (o) * *Erit IT ad AT ut Kk ad Mp.* Est, ex naturâ circuli, ordinata pK cui æqualis est IT ad Radium AT, ut fluxio abcissæ Kk ad fluxionem arcus Mp, *& TG ad Hp ut TZ ad AT* producatur HpK ita ut occurrat lineæ Nn in D, propter Parallelas, HD, AT & HT, AZ per constructionem, est DT ad HD ut TZ ad AT, est pariter eamdem ob rationem DG ad pD ut TZ ad AT, quare sumendo differentiam terminorum duarum priorum rationum utriusque rationis est *TG ad Hp ut TZ ad AT*,

est, æquale areæ $Hp\,Mh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis variatio horaria ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$. ut $Hp\,Mh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque si terra & nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota inclinationis variatio tempore mensis illius foret ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$., ut (p) aggregatum omnium arearum $Hp\,Mh$, in revolutione puncti p genitarum, & sub signis propriis $+$ & $-$ conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (q) id est, ut circulus totus $QAqa$ ductus

(p) * *Ut aggregatum omnium arearum Hp Mh sub signis propriis conjunctarum* scilicet prout linea M H sumitur in eamdem partem ac linea M K aut in partem oppositam; priore casu area H p M h signo affirmativo est afficienda, posteriore negativo.



(q) * *Id est, ut circulus totus QAqa &c.* Liquet ex ipsâ constructione quod dum punctum p movetur ab F usque ad q, areæ H p M H constituunt aream positivam F A n q r f T F, dum ex q ad f procedit areæ H p M h constituunt aream negativam q r f, quæ ex priori detractâ relinquit semicirculum F n f.

Quod dum punctum p procedit ex f ad Q areæ H p M h efficiunt aream positivam f a N Q R F T f & dum ex Q ad F procedit, efficiunt aream negativam Q R F quæ ex priori detractâ relinquit semicirculum f N F.

Itaque omnes areæ H p M h sub signis propriis conjunctæ efficiunt circulum totum Q A q a.

Cæterum observandum Variationem incli-

ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\ cub.$ (r) hoc est, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT\ quad.$

Corol. 3. Proinde in dato nodorum situ, variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuata variatio illa menstrua generari posset, est ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,ATq$ sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4\,AT$, id est (cum Pp sit ad PG ut sinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ sit ad $4\,AT$ ut (s) sinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ nodorum à sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol.

117\. clinationis esse positivam aut negativam, hoc est crescere aut decrescere secundum signa quantitatis $AZ \times TZ$ de quibus in Coroll. proximo dicemus.

(r) * *Ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub.* Si in hac ratione loco circuli $QAqa$, ponatur ejus valor qui est circumferentia $QAqa$ ductâ in dimidium radii seu in $\frac{AT}{2}$, hæc ratio licet, circumferentia $QAqa \times \frac{AT}{2} \times AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub. Multiplicetur uterque terminus per 2 & dividatur per AT, non mutabitur ratio & fiet *ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ quad.*

(s) *Ut sinus duplicati anguli.* Ex Trigonometriæ elementis sinus duplicati anguli ATn sive ATN, cujus sinus est AZ & Cosinus TZ, est $\frac{2\,AZ \times TZ}{AT}$ sive $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$.

Quando autem duplum anguli ATN excedit semicirculum sive quando angulus ATN est rectus, signum sinus dupli anguli ATN, fit negativum ex positivo; quando angulus ATN excedit 180 gr. signum sinus ejus dupli iterum fit positivus, sicque deinceps.

Positivum autem signum designat angulum Planum per variationem minui, negativum verò signum eum angulum augeri significat, ita ut angulus minuatur dum nodus N recedit ex conjunctione A ad quadraturam ultimam Q, crescit verò dum nodus à quadraturâ Q ad oppositionem a movetur, iterum minuitur dum ab oppositione ad primam quadraturam q tendit, & denique augetur dum à quadraturâ q ad conjunctionem A redit; ita ut Inclinationis angulus sit minimus cum nodi in quadraturis Q & q versantur, maximus

Corol. 4. Quoniam inclinationis horariæ variatio, ubi nodi in

ximus verò cum nodi sunt in syzygiis A & a; Quæ Lex ab Astronomis est observata sed paulò accuratius ostendendum id sequi reverâ ex hâc Propositione.

Sit nodus N ubivis inter conjunctionem A & ultimam quadraturam Q, ductâque FTf perpendiculari in lineam nodorum, dum Lunâ movebitur ex N ad F inclinationis variatio designabitur per aream NAFTh, cumque Luna tum versetur inter Nodum & remotiorem quadraturam motus nodi erit regressivus, ideoque cum linea ♈T fiat semper remotior à Lunâ quam linea NT (punctum ♈ quod hic exaratum non est designat novum locum in quem Nodus adscendens Lunæ movetur) inclinationis Lunæ angulus ad lineam T♈ relatus minor erit quam si ad TN referretur, area ergo NAFTh designabit imminutionem anguli inclinat. dum pergit Luna ab N ad F.

Dum Luna movetur ab F ad q pergit quidem ut prius nodus in antecedentia, sed producta linea ♈T, ejus productio erit vicinior Lunæ in area Fq existenti quam productio lineæ NT, ideoque inclinationis Lunæ angulus ad productionem lineæ T♈ relatus major erit quam si ad lineam Tn referretur, sed hoc in casu area FRq designat inclinationis variationem, ergo area FAq designat incrementum anguli inclinationis.

Dum Luna ab n ad f movetur, motus nodi fit regressivus & ex N in ♈ migrat, & lineæ ♈T productio remotior est à Lunâ in areâ nf versante quam productio lineæ NT ideo angulus inclinationis minor erit quam si ad lineam Tn referretur ea verò variationis mutatio designatur per aream Hnaf quæ ideo imminutionem anguli inclinationis designat.

Ab f ad Q crescit quidem inclinationis angulus, quia refertur ad lineam T♈, totum itaque illud variationis incrementum designatur per aream Qfr sed à Q ad n, cum motus nodi fiat progressivus, referaturque inclinationis angulus ad Tl, minuitur is angulus totaque imminutio designatur per aream NhrQ. 117.

Resumantur hæc omnia, deprehenditur imminutionem anguli inclinationis exprimi per areas NAFh, qnHR, Hnaf & NhrQ, quarum prima & ultima efficiunt QAFTr, duæ mediæ aream qafFR.

Totum verò incrementum anguli inclinationis exprimitur per areas FRq & Qfr, quarum hæc detracta ex area QAFTr relinquit semicirculum QAFf, prior detracta ex areæ qafTR relinquit semicirculum qafF ideoque circulus totus QAqa designat imminutionem anguli inclinationis cum nodus versatur in quovis puncto N quadrantis AQ.

Si hæc ratiocinia applicentur ad figuram Newtonianam ubi nodus N est in quadrante Qa, ex iis deprehendetur circulum QAqa designare incrementum anguli inclinationis.

Si nodus in quadrante aq versetur, omnia eodem modo procedent ac in primo casu, mutatis solummodo litteris majusculis in minores, ideoque etiam ostendetur circulum QAqa imminutionem anguli inclinationis designare; & pariter ubi nodus erit in quadrante qA casus hic ad secundum referri poterit, minuitur ergo inclinatio dum Nodus procedit ab A ad Q, tumque est minima, siquidem inde crescere incipit usque ad a, ubi est maxima, siquidem inde decrescit usque ad q, ubi iterum est minima indeque crescit usque ad A ubi iterum maxima est.

DE MUNDI SYSTEMATE.

in quadraturis verſantur, eſt (per hanc propoſitionem) ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id (t) eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ductis in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium variationum horariarum, quo tempore luna in hoc ſitu nodorum tranſit à quadraturâ ad ſyzygiam (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad ſummam totidem angulorum $33''. 10'''. 33^{iv}$., ſeu $5878''$., ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc (u) eſt, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi inclinatio ſit $5^{gr.}$ $1'$,

121. (t) * *Id eſt.* Ubi nodi verſantur in quadraturis, recta N n coincidit cum Q q, ideóque perpendicularis A E, abit in radium A T. Quare $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ eſt ad A T cub. ut $IT \times AT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad A T cub. Sive ut $IT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT^2 ac dividendo per $\frac{1}{2}$ A T, ut $IT \times \frac{TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 A T.

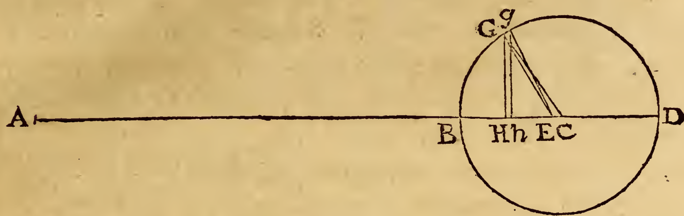
(u) 121. * *Hoc eſt ut diameter.* Sit T I vel $pK = y$, radius $QT = 1$, erit $TK = \sqrt{1-yy}$, ex naturâ circuli, & $TK = TG$ quia in hoc caſu recta n N, coincidit cum Q q, cum nempe nodi verſentur in quadraturis; ac proinde ſinus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis, id eſt $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} = 2y \times \sqrt{1-y^2}$ Jam ut obtineatur elementum areæ quæ componitur ex omnibus ſinubus diſtantiæ duplicatæ, multiplicari debet ſinus variabilis $2y \times \sqrt{1-y^2}$, per elementum arcûs circuli, hoc eſt, per $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, undè habetur elementum areæ quæſitæ $= 2ydy$, ſumptiſque fluentibus, prodit area tota $= y^2$, factâ autem $y = 1$, erit area illa ubi Luna pergit à quadraturâ ad ſyzigiam, æqualis quadrato radii. Nunc verò ut habeatur ſumma totidem diametrorum multiplicandus eſt quadrans circuli per totam diametrum. Hinc ſi radius dicatur r peripheria p, erit ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis, quo tempore Luna tranſit à quadraturâ ad ſyzigiam ad ſummam totidem diametrorum ut r^2 ad $\frac{p \times 2r}{4}$, ſivè ut $2r$ ad p, hoc eſt, ut diameter ad circumferentiam.

1', ut $7 \times \frac{874}{100000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex summâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, est 163'', seu 2'. 43''.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Sit *AD* sinus inclinationis maximæ, & *AB* sinus inclinationis minimæ. Bisecetur *BD* in *C*, & centro *C*, intervallo *BC* describatur circulus *BGD*. In *AC* capiatur *CE* in eâ



ratione ad *EB* quam *EB* habet ad 2 *BA*: & si dato tempore constituatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ distantiæ nodorum à quadraturis, & ad *AD* demittatur perpendiculum *GH*: erit *AH* sinus inclinationis quæsitæ.

Nam

Si autem inclinatio sit 5°. 1'. Erit sinus P p, huic inclinationi respondens, ad radium P G, ut 874 ad 10000 (ex vulgaribus sinuum tabulis). Est autem diameter ad peripheriam ut 7. ad 22, quarè summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ est ad summam totidem diametrorum ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22. Facile autem percipitur quod nodo existente in quadraturâ dum Luna à quadraturâ ad conjunctionem vadit, angulus inclinationis minuitur, quod tantumdem augetur, dum a conjunctione ad primam quadraturam movetur, minuitur rursum dum ad opositionem vadit, augeturque iterum dum ad ultimam quadraturam redit, ita compensatis incrementis & decrementis ut nulla sensibilis superfit inclinationis mutatio, quâtenus scilicet nodus reverâ immotus in puncto Q supponitur. 121.

Nam GEq æquale est $GHq + HEq = BHD$ (x) $+ HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, est GEq ut AH. Designet jam AEg duplicatam distantiam nodorum à quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg ob datum angulum GEg erit ut distantia GE. Est (y) autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh est ut contentum $GH \times Gg$, seu $GH \times GE$; id est ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ seu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id est, ut AH & sinus anguli AEG conjunctim. Igitur si AH in casu aliquo sit sinus inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, & propterea sinui illi æqualis semper manebit. Sed (z) AH, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic sinui æqualis est, & propterea eidem semper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hâc demonstratione suppusui angulum BEG, qui est duplicata distantia nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum esse, & in hoc casu Gg esse augmentum horarium duplæ distantiæ nodorum & solis ab invicem, & inclinationis variatio horaria in eodem casu (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut (a) contentum sub inclinationis sinu AH & sinu anguli recti BEG, qui est duplicata distantia nodorum à sole, ad quadruplum quadratum radii; id est, ut medioeris inclinationis sinus AH ad radium

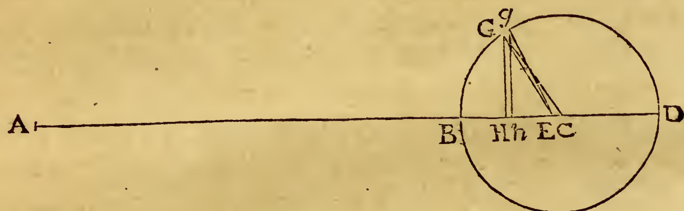
121. (x) * $= BHD + HEq$. (Prop. 5. Lib. 2. elem.) $= HBD + HEq - BHq$ (per prop. 3. lib. 2. elem.) $= HBD + BEq - 2BH \times BE$ (Prop. 7. ejusdem Lib.) $= BEq + 2EC \times BH$ (ob $BD = 2EC + 2BE$). Est autem (per constr.) $EB^2 = 2EC \times BA$; quare $BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH$.

(y) * *Est autem Hh ad Gg.* (Per naturam circuli).

(z) *Sed AH.* (Per constr.)

(a) * *Ut contentum sub inclinationis sinu AH, & sinu anguli recti BEG*, hoc est, ut contentum sub medioeris inclinationis sinu AH (quia in hoc casu AH = AC) & radio *ad quadruplum quadratum radii; id est, ut medioeris inclinationis sinus AH, ad radium quadruplicatum.*

radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr}. 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ *B D* reſpondens, ad variationem illam horariam ut (b) diameter *BD* ad arcum *Gg*; id eſt, ut diameter *BD* ad ſemicircumferentiam *B G D* & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$.



quo nodus pergit à quadraturis ad ſyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota *B D* ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa *B D* prodibit $16', 23''\frac{1}{2}$.

Hæc eſt inclinationis variatio maxima quatenus locus lunæ in orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi nodi in ſyzygiis verſantur, nil (c) mutatur ex vario ſitu lunæ. At ſi nodi in quadraturis conſiſtunt, inclinatio minor eſt ubi luna verſatur

(b) * *Ut Diameter B D ad arcum Gg.* Nam, in hâc conſtructione, variatio tota ſinuum differentiæ B D reſpondens per Diametrum B D exprimitur, & H h eſt incrementum ſinus inclinationis tempore quod per G g deſignatur, ſive horæ tempore; ſed ubi punctum H cadit in centro C, & punctum G in medio ſemicirculi, tunc eſt G g = H h; Ergo, eſt Diameter B D ad arcum Gg ut variatio tota ad variationem horariam in Octantibus; ſed ut ſunt $2079\frac{7}{10}$ horæ quæ effluunt dum nodus pergit à quadraturâ ad ſyzygiam ad unam horam, ita ſemicircumferentia B G D ad Gg, eſt ergo $Gg = \frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}h}$, ideoque variatio tota eſt ad variationem horariam in octantibus ut BD ad $\frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}h}$ ſive ut B D ad BGD & $2079\frac{7}{10}h$. ad 1^h. conjunctim.

(c) * *Nil mutatur ex vario ſitu Lunæ;* Nam ex demonſtratione Prop. XXXIV. inclinationis variatio horaria eſt ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* ſed nodis verſantibus in ſyzygiis fit AZ = o quare quantitas

 IT ×

De Mundi Systemate.

ſatur in ſyzygiis, quam ubi ea verſatur in quadraturis, exceſſu 2'. 43''; uti in propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio 1'. 21''$\frac{1}{2}$ variatio tota mediocris *BD* in quadraturis lunaribus diminuta fit 15'. 2'', in ipſius autem ſyzygiis aucta fit 17'. 43''. Si luna igitur in ſyzygiis conſtituatur, variatio tota in tranſitu nodorum à quadraturis ad ſyzygias erit 17'. 45'': ideoque ſi inclinatio, ubi nodi in ſyzygiis verſantur, ſit 5gr. 17'. 20''.; eadem, ubi nodi ſunt in quadraturis, & luna in ſyzygiis, erit 4gr. 59'. 35''. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex obſervationibus.

Si jam deſideretur orbis inclinatio illa, ubi luna (d) in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur; fiat *AB* ad *AD* ut ſinus graduum 4. 59'. 35'' ad ſinum graduum 5. 17. 20'', & capiatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis; & erit *AH* ſinus inclinationis quæſitæ. (e) Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio, ubi luna diſtat 90gr. à

121. $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ fit etiam o, evaneſcit itaque hoc in caſu horaria variatio, ideoque in vario ſitu Lunæ non mutatur ejus orbitæ inclinatio. Et quidem idem citra calculum patet ex ipſâ rei naturâ, nam verſantibus in ſyzygiis, ſive ſole exiſtente in lineâ nodorum, ſol eſt in eo plano in quo jacet linea nodorum, ſed linea nodorum eſt in plano orbitæ Lunaris, ergo ſol in ipſâ orbitâ Lunari productâ poſitus cenſeri poteſt, ac per conſequens qualiſcumque ſit ejus actio in Lunam, ipſam ex plano utrique communi neutiquam dimovebit.

(d) * *Ubi Luna in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur.* Nam dum Luna ab unâ ſyzygiâ ad eamdem ſyzygiam redit, tota variatio menſtrua eſt ad 33''. 10'''. 33iv. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2 ATq$, ſive ut ex Cor. 3°. Prop. præcedentis conſtat ut Inclinationis ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ nodi à Sole ad quadruplum quadratum radii, ſed per hujus Probl. conſtructionem in ea ratione eſt AH, ſi modo AB ſit ut ſinus minimæ inclinationis & AD ſinus maximæ, ſed 4gr. 59'. 35'' eſt minimus inclinationis Angulus ubi Luna eſt in ſyzygiis & 5gr. 17'. 20'' eſt maximus. *Ergo fiat A B ad A D ut ſinus graduum* 4gr. 59'. 35'' &c.

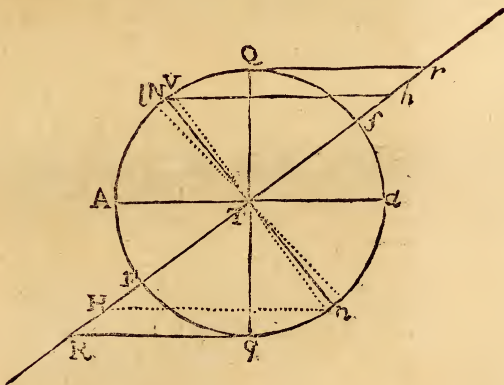
(e) *Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio ubi Luna diſtat.* 90gr. à *nodis.* Minima inclinatio ubi Luna diſtat 90gr. à nodis eſt ubi nodi ſunt in quadraturis, nonageſimus autem à nodis gradus incidit in ipſam ſyzygiam itaque minima inclinatio eadem eſt ac in præcedenti caſu; maxima vero inclinatio eſt cum nodi ſunt in ipſis ſyzygiis, & nonageſimus à nodis gradus tunc quidem incidit in quadraturas, ſed tunc inclinatio nihil mutatur ex vario ſitu Lunæ, itaque eadem eſt ſive Luna in ſyzygiis ſive in quadraturis verſetur, eadem ergo eſt iterum maxima inclinatio ac in caſu præcedenti, ideoque in hoc caſu AB & AD eadem aſſumenda ſunt ac in caſu præcedenti: Reliquum ratiocinium hic etiam adplicatur, nam quamvis tempus reditus Lunæ ad nonageſimum à nodo gradum brevius ſit tempore ejus reditus ad ſyzygiam ſive

à nodis. In aliis lunæ locis inæqualitas menstrua, quam inclinationis variatio admittit, in (f) calculo latitudinis lunæ compensatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus nodorum (ut supra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi potest. LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Scho-

sive mense synodico, siquidem mense Periodico etiam brevior est, tamen hic casus ad fictionem Corollarii secundi magis accedit, in quo nempe supponitur nodum toto mense sensibilem viam non esse emensum, quod quidem accuratius dicetur si assumatur reditus Lunæ ad eumdem situm respectu nodi; hic ergo eadem constructio ac prior potiori jure erit adhibenda.

(f) * *In calculo latitudinis compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus nodorum.* Calculus latitudinis fit, positâ inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ, & assumptâ distantiâ Lunæ à nodo, hinc latitudo Lunæ obtinetur, quæ crescit à nodo ad gradum à nodo nonagesimum, inde decrescit accedendo ad alterum nodum &c. Procedat ergo Luna à nodo N ad punctum F 90gr. à nodo distitum, motus medius nodi est major motu vero, toto eo intervallo, ut superius (ad Prop. XXXII.) ostensum est, ergo assumpta mediocri distantia à nodo quæ verâ major est & mediocri inclinatione quæ convenit illi mensi, latitudo major invenietur quam debuisset, sed quoniam in casu istius figuræ minuitur Angulus inclinationis dum Luna movetur ab N in F, & is angulus ad mediocrem imminutionem tunc pervenit cum Luna est in F circiter, quia area NFh est ferè semicirculo æqualis, hinc inclinatio orbitæ angulum majorem efficit quam is qui per inclinationem mediocrem supponitur, unde latitudo vera major evadit quam ea quæ propter mediocrem inclinationem orbitæ obtinetur: hinc ex eo quod nodi motus mediocris loco motus veri assumitur invenitur latitudo major vera, sed ex eo quod inclinatio mediocris assumitur loco veræ, invenitur latitudo minor vera; inæqualitates itaque menstruæ quam variatio inclinationis & motus nodorum admittunt sese mutuo compensant in calculo latitudinis. Cæteri casus eamdem compensationem suppeditant, v. gr. dum Luna ex F in q movetur motus verus nodi est minor motu vero, hinc Luna est reverâ remotior à nodo quam statuitur per motum medium nodi, ideoque latitudo major supponitur quam est (quia in secundo quadrante à nodo quò proprior est Luna à nodo ascendente N, ideoque eo remotior à des- 121.



cendente n, eò ejus latitudo est major) sed cum orbita Lunæ habuerit in F inclinationem mediocrem augetur is Angulus dum movetur Luna ab F ad q, ideoque assumendo eam inclinationem mediocrem minor obtinetur latitudo quam reverâ est, ergo, propter inæqualitatem motus nodi latitudo quæ ex motu nodi mediocri habetur est major vera, latitudo quæ obtinetur ex inclinatione mediocri est minor verâ, compensantur ergo errores &c.

De Mundi Systemate.

Scholium. (g)

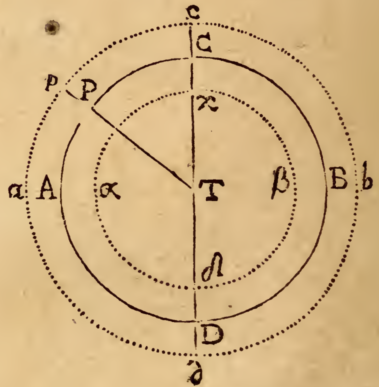
121. (g) * *Scholium.* Scholio hoc tradit Newtonus rationes quibus quædam ex Æquationibus Lunaribus ad calculos revocari possint, sed dolendum est illum non aperuisse vias quibus usus est ad eas concinnandas: defectum hunc utcumque reparare sumus conati & Methodos aperuimus quibus ex Gravitatis Theoria eas Æquationes deducere liceat, quantum fieri potuit iisdem usi sumus Methodis quas Newtono familiares fuisset constat & ad ejus solutiones proximè nos accessisse percipient Viri Docti cum paucis duntaxat secundis ab ipsius numeris discedat calculus noster & ejus consequentiæ planæ sint similes iis quas ex suis Principiis Newtonus derivavit, utrum aliis Methodis res feliciùs absolvi potuerit, viderint Doctiores, speramus tamen hos calculos, ut legitimis Principiis nixos, Lectoribus nostris gratos fore, & forte eos juvare ut melius quid excogitent: Cæterum hoc Scholium in quinque Paragraphos commodè distribui potest; In primo Newtonus Indicat calculum ejus Æquationis Lunæ quæ Æquatio Solaris prima dicitur: In secundo, tradit Æquationes Solares motus nodorum & Apogæi Lunæ; In Tertio illam Æquationis Solaris correctionem tradit quæ ab Excentricitate orbitæ Lunaris pendet; In quarto aliam adhuc correctionem Æquationis Solaris addit quæ nempe oritur ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ; In quinto denique agit de Æquationibus motûs Lunæ & ejus Apogæi quæ pendent ex situ Apogæi Lunæ respectu Solis.

Ut autem hæc omnia & potissimum ea quæ Æquationem Solarem Lunæ spectant, & quæ primo, tertio & quarto Paragrapho à Newtono indicantur meliùs intelligantur, totum eum calculum qualis ex Theoriâ gravitatis instituendus nobis videbatur, uno tenore tradendum censuimus.

De Incremento motus medii Lunæ, & ejus Æquatione annuâ, ex Solis actione pendentibus, primum in Hypothesi orbem Lunæ esse circularem, postea in Hypothesi Orbem Lunæ esse Ellipticum. Denique in Orbe Lunari ad Eclipticam inclinato.

THEOR. I.

Corpus P revolvatur in circulo ADBC circa corpus T à quo retineatur per vim decrescentem secundum quadrata distantiarum; accedat autem vis quædam constans quæ retrahat perpetuo corpus P à corpore centrali T, sed quæ sit exigua respectu vis ejus corporis T; Et describatur circulus a d b c in tali distantiâ ut residuum vis quam exerceret corpus T in eâ distantiâ (detractâ eâ vi extraneâ) sit ad vim quâ corpus P revolvebatur in circulo A D B C inversè ut cubi Radiorum Tp, TP; Dico, quod propter illam vim extraneam fiet ut corpus P circa circulum a d b c oscilletur, nunc citrà nunc ultra delatum, parum ab illo discedens, ita ut ejus motus assumi possit quasi fieret in eo circulo.



Nam fingatur eam vim extraneam non esse

esse constantem, sed talem ut, post discessum corporis P à circulo A D B C propter ejus vis extraneæ actionem, residuum vis quam exercet corpus T in distantia ad quam abit corpus P (detractâ eâ vi extraneâ) sit semper inversè ut cubi distantiarum, eveniet ut (per Prop. IX. Lib. I. Princip.) corpus P spiralem Logarithmicam describat, in quâ angulus curvæ cum radio ad curvam ducto semper manet idem; Verùm quoniam ab initio vis illa Extranea fuit constans, liquet quod priusquam corpus P circulum a d b c attigerit ea vis plus imminuebat vim centralem quam ut decrescat secundùm cubos distantiarum auctarum, ideoque quod anguli curvæ cum radio ad curvam ducto semper crescere debuerunt, sed incremento perpetuo minore quo magis accedit virium decrescentium ratio ad rationem inversam cubi distantiarum; Perveniet ergo corpus P ad circulum a d b c, & angulus curvæ cum Radio, quando P erit in circulo a d b c, erit recto major, quia semper crevit is Angulus à tempore quo corpus P circulum A D B C describebat in quo angulus radii cum curva rectus est; ideo P ultra circulum a d b c perget; cum autem P ultra circulum a d b c pervenerit, detractio vis constantis vim Centralem minus minuet quam secundum cubum distantiarum, itaque angulus curvæ cum radio minor fiet quam si Logarithmica spiralis describeretur & tandem reducetur ad angulum rectum ultra circulmu a d b c, inde verò curva cum radio faciet angulum acutum, nam vis centralis illic major est quam ut circulus describi possit quod sic demonstrari potest; Areæ æqualibus temporibus descriptæ durante toto hoc corporis P motu sunt ubique æquales, quoniam vires ad centrum T constanter diriguntur (ex Hyp.), ideoque in eo loco ultra circulum a d b c in quo angulus curvæ cum radio sit rectus, arcus dato tempore descriptus foret ipsa basis areæ descriptæ cujus altitudo est distantia à Centro seu ipse radius, & is arcus debet esse ad arcum qui eodem tempore descriptus fuisset a corpore P si in circulo A D B C moveri perseverasset, nullaque vis extranea accessisset inversè ut radii; sagittæ autem eorum arcuum (quæ sunt semper ut quadrata arcuum divisa per Radios) forent inversè ut Cubi radiorum, sed vis centralis ultra circulum adbc, minus decrescit quam secundum cubum distantiarum, ergo sagitta arcus descripti quæ est ejus vis centralis effectus, major est sagittâ quæ foret secundum rationem inversam cubi distantiarum, ergo ea sagitta quæ per vim centralem producitur major est illa quæ orbtineretur si circulus in eo loco describeretur; Ergo corpus P à Tangente magis discedit versus centrum quam si circulum describeret, ergo ejus via acutum angulum cum Radio efficere incipit, sicque accedit iterum ad circulum a d b c angulis curvæ cum radio perpetuo decrescentibus; Cum autem infra eum circulum transiverit angulus quem facit curva cum Radio iterum augetur donec is angulus rectus evadat, inde vero fiet obtusus quia vis centralis illic minor est quam ut corpus P in circulo moveri pergat, redit ergo corpus P versus circulum a d b c idque perpetuâ oscillatione, ut liquet ex collatione motûs quem haberet in Logarithmicâ spirali cum hoc motu: Sed quò minor est vis illa data quæ ex centrali detrahitur eò illæ alternæ oscillationes minus à circulo a d b c recedent, quare si vis ea exigua supponatur respectu vis Centralis corporis T, supponi etiam potest motum corporis P in circulo a d b c fiet. Q. E. D.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.

Cor. 1. Si vis illa extranea & constans perpetuo traheret corpus P versus T, iisdem argumentis ostendetur quod si describatur circulus interior $\alpha\delta\beta\kappa$ in tali distantiâ à centro T, ut vis corporis T ad eam distantiam aucta per vim illam extraneam sit ad vim in circulo ADBC inversè ut cubi Radiorum circulorum ADBC, $\alpha\delta\beta\kappa$, corpus P hinc inde cis citrave circulum $\alpha\delta\beta\kappa$ oscillatur, & si ea vis extranea sit exigua censeri potest quod corpus P in eo ipso circulo $\alpha\delta\beta\kappa$ movebitur.

Cor. 2. Et si vis illa extranea constans non foret sed cresceret secundum aliquam dignitatem positivam distantiarum, iisdem omninò ratiociniis ostendi posset quod corpus P in circulo a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$ movebitur, eveniet solummodo ut radius T paulum diversus sumi debeat ab eo qui inveniretur si vis ea extranea constans foret.

Schol. Aliis Methodis effectum illius vis extraneæ ad calculos revocari posse non negamus & quidem unam aut alteram Methodum ab hâc diversam eumdem in finem in sequentibus proponemus.

THE-

De Mundi Systemate.

THEOR. II.

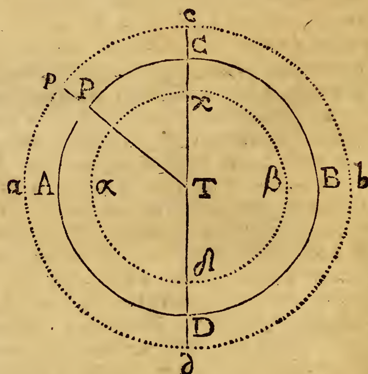
121. Positis iis quæ in primo Theoremate supponuntur, dicatur r Radius circuli ADBC, sit ϱ radius circuli a d b c, vel $\alpha\delta\beta\varkappa$, sit p Radiorum r & ϱ differentia; Vis corporis T in distantia r dicatur V & in eadem distantia vis extranea dicatur Y quæ erescat ut distantiæ à centro T & quæ positiva censeatur si distrahat corpus P à centro, negativa verò si illud attrahat ad centrum, dico quod Radius ϱ erit semper æqualis quantitati $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$, sive quantitati $r \times 1 + \frac{Y}{V} + \frac{4Y^2}{V^2} + \frac{16Y^3}{V^3}$ &c. & omissis terminis proptes exiguitatem quantitatis Y evanescentibus, est ille radius $\varrho = Y \times 1 + \frac{Y}{V}$.

Nam vis corporis T in distantia ϱ erit $\frac{rr}{\varrho\varrho}V$ vis extranea erit $\frac{\varrho}{r}Y$ ex hypoth., ideoque vis quâ circulus adbc (vel $\alpha\delta\beta\varkappa$) describitur est $\frac{rr}{\varrho\varrho}V - \frac{\varrho}{r}Y$, sed hæc vis debet esse ad vim V quâ circulus A B C D describitur inversè ut cubi Radiorum, sive ut $\frac{1}{\varrho^3}$ ad $\frac{1}{r^3}$ (per Theor. præc.) ergo est $\frac{V}{\varrho^3} = \frac{V}{r\varrho^2} - \frac{Y\varrho}{r^4}$, sive reductis terminis ad eumdem denominatorem est $\varrho^4 Y = r^3 V \times \varrho - r = \pm r^3 pV$. Loco ϱ scribatur $r \pm p$ fiet $r^4 Y \pm 4r^3 pY + 6r^2p^2Y \pm 4rp^3Y + p^4Y = \pm r^3 pV$, sive deletis terminis ubi p superat primum gradum, quoniam hæc quantitas exigua est fit $r^4 Y \pm 4r^3 pY = \pm r^3 pV$, sive $\pm pV \mp 4pY = rY$, unde obtinetur $\pm p = \frac{rY}{V-4Y}$; ideoque ϱ, quod est $r \pm p$, fit $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$ qui valor in seriem redactus est $r \times 1 + \frac{Y}{V} + \frac{4Y^2}{V^2}$ &c. sive $r \times 1 + \frac{2Y}{V}$.

THEOR. III.

Dicatur M Tempus Periodicum corporis P in circulo A D B C, dico quod ejus Tempus Periodicum in circulo a d b c (vel $\alpha\delta\beta\varkappa$) erit $M \times 1 + \frac{2Y}{V}$.

Dem. Tempus Periodicum corporis P revolventis in circulo a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\varkappa$) propter vim extraneam Y detractam vel ad-



ditam est ad Tempus Periodicum ejus corporis P cum revolvebatur in circulo A D B C citra omnem vim extraneam, ut est quadratum radii ϱ ad quadratum radii r; Nam quia vis Y est semper directa ad centrum T, areæ manebunt temporibus proportionales quamcumque in viam flectatur corpus P, ergo, si tandem ejus via in circulum a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\varkappa\delta$) mutetur, tempus quo describetur peripheria a d b c (vel $\alpha\delta\beta\varkappa$) erit ad tempus quo describebatur peripheria A D B C, ut tota area circuli a d b c (vel $\alpha\delta\beta\varkappa$) ad totam aream circuli A D B C ideoque ut quadrata radiorum ϱ & r, sive (per Theor. præced.) ut $\overline{\frac{V-3Y}{V-4Y}}^2 rr$ ad rr, ideoque ut $\overline{\frac{V-3Y}{V-4Y}}^2$ ad 1. sed hâc fractione in seriem

feriem refoluta ea evadit $1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$ &c. &c. quæ feries valde convergit propter exiguitatem iftius fractionis $\frac{Y}{V}$ & illius quadratum eft $1+\frac{2Y}{V}+\frac{9Y^2}{V^2}+\frac{40Y^3}{V^3}$ &c. Ergo ut 1 ad $1+\frac{2Y}{V}+$ &c. ita M ad $M\times 1+\frac{2Y}{V}+$ quod eft tempus quo defcribetur Peripheria a d b c vel $\alpha\delta\beta\varkappa$.

THEOR. IV.

Sit T terra, P Luna, A D B C circulus quem Luna defcribit; fit S T diftantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in terram in mediocri illa diftantia, Sol fupponatur immotus; diftantia Lunæ à Terrâ P T dicatur r & ea non obftante actione Solis in Lunam eadem manere cenfeatur; Sit C P diftantia Lunæ à quadraturâ proxima quæ dicatur u, fit ejus finus y, fit ejus Cofinus z, Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam fecundùm directionem radii P T, eft ubivis $\frac{F}{a}\times\frac{3yy}{r}-r$.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

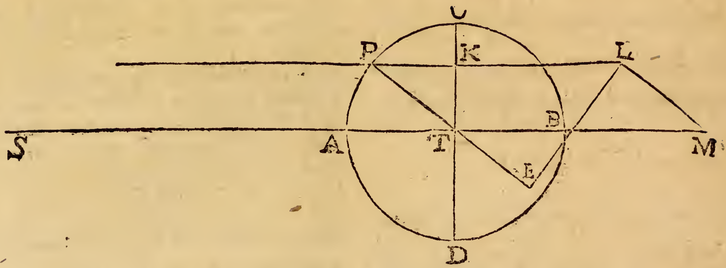
121.

Nam, fecundùm conftructionem Prop. LXVI. Lib. I. Princ., repræfentetur vis Solis quæ dicitur F per lineam S T vel S K, ea vis Solis quâ trahitur Luna in loco P repræfentetur per lineam S L, & hæc vis cenfeatur compofita ex duabus S M & L M, quarum L M fit Parallela radio P T, cum autem linea S M fit æqualis lineæ $ST\pm TM$, & terra trahatur per vim S T non fecus ac Luna, fitus refpectivus Lunæ ac Terræ per eam vim ST non mutatur, ideo fola ea pars vis SM quæ exprimitur per T M confideranda venit; Præterea ex naturâ gravitatis, eft S K ad S L ut eft $\frac{1}{SK^2}$ ad $\frac{1}{\overline{SK\mp PK}^2}$ five ut eft $SK^2\mp 2SK\times PK+PK^2$ ad SK^2, aut omiffo termino PK^2 ut $SK\mp 2PK$ ad S K, five quoniam 2PK eft exiguum refpectu lineæ S K ut S K ad $SK\pm 2PK$ eft ergo S L five $SK\pm KL=SK\pm 2PK$ & $KL=2PK$, cum autem linea P L fit proxime parallela lineæ S M, & ex conftructione P T fit parallela L M, eft T M proxime æqualis lineæ P L, & eft $PL=PK+2KL=3PK$; Ex puncto L ducatur perpendiculum in radium P T (productum fi neceffe fit) & vis T M, feu vis ipfi æqualis P L refoluta intelligatur in vim P E & vim L E, vis L E radio P T fit perpendicularis ideoque vim centralem non afficit, vis PE fecundùm directionem radii agat, ficque punctum P à centro T diftrahat, altera autem pars quæ per L M repræfentatur fecundum directionem radii agens punctum P verfus centrum trahit; Ergo ea pars Solis quæ agit in Lunam fecundum directionem radii P T eft differentia virium P E & L M.

Jam vero ob Parallelas S L, S M & T P, L M eft $LM=TP=r$, & cum P K fit proxime perpendicularis in lineam T C erit

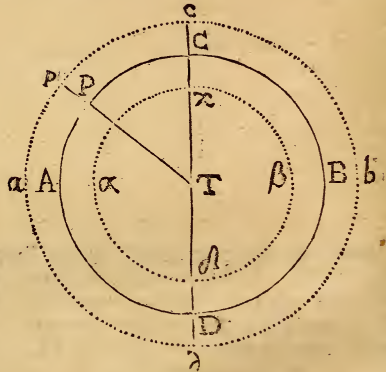
DE MUNDI SYSTEMATE.

3.2.I.



erit P K sinus arcus P C qui sinus dictus est y, ideoque $PL = 3PK = 3y$, cum autem Triangula P K T, P E L sint similia, est P T (r) ad P K (y) ut P L ($3y$) ad P E quod erit ergo $\frac{3yy}{r}$ & differentia virium P E & L M est $\frac{3yy}{r} - r$, quæ differentia positiva est cum $\frac{3yy}{r}$ superat r, tuncque Lunam à centro distrahit, negativa quando $\frac{3yy}{r}$ minus efficit quam r, tuncque Lunam ad centrum attrahit, cum ergo linea S T sive a repræsentet totam vim Solis in terram, eaque vis dicatur F, & quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ repræsentet eam partem vis Solis quæ in Lunam agit secundùm directionem P T, fiat ut a ad $\frac{2yy}{r} - r$, ita F ad eam partem vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam quæ idcircò erit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. Q. E. O.

Coroll. Si transferatur Luna in alium orbem a d b c, $\alpha \delta \beta \varkappa$ cujus radius sit ϱ, Dico, quod, manente distantia Lunæ à quadraturâ proximâ, ea pars vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam crescet ut illæ distantiæ ϱ, eritque ideo $\frac{\varrho}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, nam cum arcus p c ejusdem numeri graduum censeatur ac arcus P C sinus eorum erunt ut radii, ideoque sinus arcus p c erit $\frac{\varrho}{r} y$, Demonstrabitur vero iisdem plane argumentis quibus in Theoremata usi sumus quod, si Luna in circulo a d b c vel $\alpha \delta \beta \varkappa$ movetur, ea pars vis Solis quæ secundum directionem radii P T exercetur erit $\frac{F}{a} \times 3\frac{\frac{\varrho\varrho y^2}{r^2}}{\varrho} - \varrho = \frac{F}{a} \times \frac{3\varrho^2 y^2 - r^2 \varrho^2}{r^2 \varrho} = \frac{F}{a} \times \frac{3\varrho y^2 - r^2 \varrho}{r^2} = \frac{\varrho F}{r.\, a.} \times \frac{3y^2}{r} - r.$



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi potest, si concipiatur Lunam ex suâ orbita ADBC in aliam transferri, cujus singulæ particulæ quamminimæ sint portiones circulorum talium ut vis centralis Terræ in singulo circulo agens sublata vel addita vis Solis quæ in eo loco exerceretur sit ad vim centralem Terræ in circulo A D B C citra Solis actionem agentem, inversè ut cubus radii ejus circuli ad cubum radii circuli A D B C.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos crescat vel decrescat, sitque

nulla cum $\frac{3yy}{r}=r$, paulo post minima sit sicque gradatim crescat, si constans censeatur per tempusculum aliquod, brevissime transibit Luna in circulum a d b c illi vi congruum per Theor. I., mox verò cum vis Solis crescat quantitate quam minima, ea vis censeatur constans per alterum tempusculum, transibit Luna ex circulo primæ vi congruo in alterum huic incremento consentaneum, sicque semper, ideoque in singulis particulis arcus C P Luna censeri potest delata in circulum vi Solis in eo puncto agenti congruum.

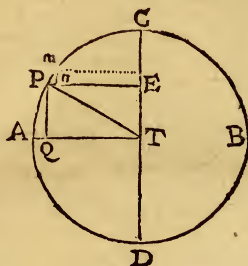
THEOR. VI.

Manentibus quæ in Theor. IV. supposita sunt, dicatur c tota circumferentia cujus radius est r, dicatur Y vis Solis agens in Lunam secundum directionem PT & in datâ distantiâ C P à quadraturâ C, quæ distantia CP dicatur u, dicatur M tempus Periodicum Lunæ in circulo ADBC citrà Solis actionem, arcus exiguus à puncto P assumptus dicatur du, dico quod tempus quo similis arcus describetur in orbitâ in quam Luna per actionem Solis est translata erit $\frac{M du}{c}\times 1+\frac{2Y}{V}+$ &c.

Nam si vis Y quæ in punctum P à Sole exercetur, in exiguas particulas divideretur & singula quæ dicatur d Y maneret constans durante unicâ revolutione Lunæ, sicque gradatim Lunam in circulum a d b c transferret, tempus Periodicum in singulo circulo excederet tempus Periodicum in circulo præcedenti quantitate $\frac{2\,dY}{V}$. Hinc tandem tempus Periodicum quo circulus a d b c describeretur foret $M\times 1+\frac{2Y}{V}+$ &c. per Theor. III. & tempus quo arcus similis arcui du describeretur in eo circulo, foret ad hoc tempus Periodicum ut du ad c, foret itaque $\frac{M du}{c}\times 1+\frac{2Y}{V}+$, sed singulæ particulæ orbitæ quam Luna describit propter adjunctionem vis Solis spectari possunt quasi pertinerent ad circulos congruos vi Soli in illis punctis agenti, per Theor. V. Ergo, tempus inventum est illud ipsum, quo durante, Luna describet arcum similem arcui du in orbitâ in quam transfertur per actionem Solis.

LEMMA I.

Invenire integrales quantitatum $y\,du$, $z\,du$, y^2du, $z^2y\,du$, zy^2du, yz^2du, y^3du, y^4du &c. factarum ex Elemento arcus & dignitatibus ejus sinus y, vel ejus Cosinus z.



Ex naturâ circuli Triangulum PTE est simile Triangulo fluxionali P m n; ideoque est PT (r) ad Pm (du) ut PE (y) ad Pn (dz), ut TE (z) ad m n (dy), hinc est $du=\frac{r\,dz}{y}=\frac{r\,dy}{z}$; Hinc fit Primò, ut, omnes termini in quibus alteruter factorum y vel z quantitatis du dimensionem habet imparis numeri, possint integrari; nam loco elementi du, ponatur ejus valor $\frac{r\,dz}{y}$ si y sit imparis dimensionis, vel $\frac{r\,dy}{z}$ si z sit imparis dimensionis, ea substitutione fiet ut pares evadant dimensiones y vel z quæ prius impares erant, & quia in primo casu habetur fluxio dz, loco y^2 substituatur r^2-z^2, sicque omnes factores ducentes dz, erunt aut r aut z, ideoque quantitas proposita erit absolutè integrabilis, in altero casu cum habeatur fluxio dy, ut tollantur factores z cujus dimensiones sunt pares, loco z^2 substituatur r^2-y^2, sicque omnes factores ducentes dy erunt aut r aut y ideoque habebuntur termini absolutè integrabiles.

Secundò, factores quantitatis du sint pares, & quidam primo sit z^2du vel y^2du; Integralis horum Elementorum est $r\times$CPQT vel $r\times$CPE, nam est $z^2du=rz\,dy$, & $z\,dy$ est fluxio areæ CPQT; est $y^2du=$

 $ry\,dz$,

De Mundi Systemate.

$rydz$, & ydz est fluxio areæ CPE; itaque quando P ex C pervenit in A & absolvit quadrantem Integralis z^2du vel y^2du est $r\times\frac{rc}{8}$.

121. Sint itaque ambo factores y vel z quantitatis du numero pari qualicumque, semper reduci poterunt ita ut quantitas proposita contineat dignitates pares alterutrius quantitatis, puta y, altera variabili exclusa ponendo loco z^2 quantitatem r^2-y^2. Si ergo quæratur integralis quantitatis $y^{2m}du$, ut ea ad impares dimensiones revocetur spectetur ut $y^{2m-1}\times ydu$; Est autem juxta Methodos vulgares $\int y^{2m-1}\times ydu = y^{2m-1}\int ydu - \int.\int ydu \times \overline{2m-1}\times y^{2m-2}dy$, sed $ydu=\frac{rydz}{y}=rdz$, & Integralis quantitatis dz sumptæ à puncto C est $r-z$, hinc $\int ydu = rr-rz$, qua substituta in valore Integralis $\int y^{2m-1}\times ydu$ ea fit $y^{2m-1}r^2 - y^{2m-1}rz - rr\int\overline{2m-1}\times y^{2m-2}dy + \int.rz\times\overline{2m-1}\times y^{2m-2}dy$, sive (quia $rr\int\overline{2m-1}\times y^{2m-2}dy = \frac{2m-1}{2m-1}r^2y^{2m-1} = r^2y^{2m-1}$) est $\int.y^{2m}du = -rzy^{2m-1} + \int\times\overline{2m-1}\times rz\times y^{2m-2}dy$ (sive quia $rdy=zdu$) $= -rzy^{2m-1} + \int.\overline{2m-1}\times z^2y^{2m-1}du$ (& loco z^2 substituendo r^2-y^2) $= -rzy^{2m-1} + \overline{2m-1}\int.r^2y^{2m-2}du - \overline{2m-1}\int y^{2m}du$; Et transpositione facta est $2m\int y^{2m}du = -rzy^{2m-1} + \int\overline{2m-1}\times r^2\int y^{2m-2}du$, & tandem $\int.y^{2m}du = \frac{2m-1}{2m}\times r^2\int y^{2m-2}du - \frac{rzy^{2m-1}}{2m}$; Hinc cum habeatur Integralis quantitatis y^2du; si quæratur Integralis y^4du ea obtinebitur per hanc formulam, siquidem in eo casu est $y^{2m-2}du = y^2du$, & ex ejus integratione habetur integratio quantitatis $\int y^{2m}du$, quæ isto in casu est y^4du; Simili modo ex integrali quantitatis y^4du habebitur Integralis quantitatis y^6du &c.

Quando P pervenit in A, terminus $\frac{rzy^{2m-1}}{2m}$ evanescit, quia illic est $z=o$ habetur ergo $\int y^{2m}du = \frac{2m-1}{2m}r^2\int y^{2m-2}du$; In eo ergo casu si quæratur integralis quantitatis y^4du, fiat $m=2$ erit $\int.y^4du = \frac{3}{4}r^2\int y^2du$, sed $\int.y^2du = \frac{r^2c}{8}$ ideoque $\int.y^4du = \frac{3r^4c}{4\times8}$; Si quæratur Integralis quantitatis y^6du fiat $m=3$ & erit $\int y^6du = \frac{5}{6}r^2\int y^4du =$ sed $\int.y^4du = \frac{3r^4c}{4.8.}$ ideoque $\int.y^6du \frac{3.5r^6c}{4.6.8}$.

Cor. 1. Si in primo casu in quo alteruter factorum quantitatis du aut ambo factores sunt imparis dimensionis, totum elementum per quantitates r, z, dz exprimatur, Integralis quæ tunc obtinebitur non erit completa, quia cosinus z ex T incipit & arcus u ex puncto C, unde dz negativum esse debet; erit ergo $\int r^nz^mdz = C - \frac{r^nz^{m+1}}{m+1}$, ut hæc constans C obtineatur, observandum quod ubi u est o, ideoque evanescit hoc elementum tunc est $z=r$ ergo $o=C-\frac{r^{n+m+1}}{m+1}$ hinc $C=\frac{1}{m+1}r^{n+m+1}$; v. gr. fit $\int.rz^3dz = C - \frac{rz^4}{4}$ fit $C=\frac{1}{4}r^5$.

Cor. 2. Si è contra arcus u ex puncto A inciperet, Integralis quæ obtinebitur cùm elementum per quantitatem y exprimetur completa non erit, & eâ ratione compleri debebit quæ in præcedenti Corollario est indicata.

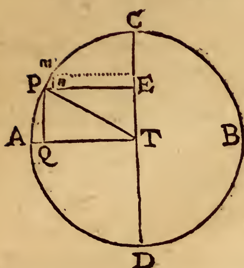
Cor. 3. In secundo casu, si u ex puncto A incipiat erit $\int.ydz=$ APET & $\int zdy$ est area APQ, ut liquet ex ipsa figura.

Cor. 4. Denique si u ex puncto A incipiat & ambo factores sint uterque dimensionis paris, elementum non est reducendum ad litteram y, ut in Lemmatis solutione factum est, sed ad quantitatem z, quæ in toto calculo loco y substituatur & vice versa; Liquet enim quod z est sinus respectu arcus AP, & y ejus Cosinus.

PROBLEMA I.

Invenire totam retardationem Lunæ dum unam revolutionem absolvit.

Cons-



Constat ex Theor. VI. Quod si Sol sit immotus, & Luna in totâ revolutione eam vim Solis patiatur quam patitur in puncto P, eveniet ut tempus quo describitur arcus du, (quodque debet esse $\frac{Mdu}{c}$ posito M tempore Periodico Lunæ, & c Peripheriâ quam percurrit) evadat $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$; itaque tempus illud producitur quantitate $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2Y}{V}$, ideo cum tempore $\frac{Mdu}{c}$ iste arcus du describi debuisset hoc tempore $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2Y}{V}$, arcus $\frac{2Y}{V} du$ describeretur, hæc est ergo retardatio Lunæ in puncto P orta per actionem Solis.

Sed in singulo puncto P orbitæ Lunaris vis Y est $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ (per Theor. IV.) ergo Elementum retardationis Lunæ est $du \frac{2F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r$, cujus Integralis secundum Lemma præcedens est $\frac{2F}{Va} \times \frac{3r4c}{8r} - \frac{1}{4}rc$, sive $\frac{2F}{Va} \times \frac{1}{8}rc$, cum P pervenit in A, cumque idem sit Solis effectus in singulo quadrante tota retardatio Lunæ est $\frac{2F}{Va} \times \frac{4}{8}rc$ sive $\frac{Frc}{Va}$, dum Luna revolutionem absolvit, respectu Solis immoti.

Si reddatur Soli motus suus, & loco mensis Periodici M, mensis Synodicus μ intelligatur, & censeatur quod proxime verum est mensem synodicum qui respondet mensi Periodico in circulo adbc peracto, esse ad eum mensem Periodicum ut μ ad M, ideoque eum mensem Synodicum esse $\mu \times 1 + \frac{2Y}{V}$ omnia procedent ut prius & erit $\frac{Frc}{Va}$ retardatio Lunæ toto ejus tempore synodico.

Scrupulus esse potest, utrum in hac expressione, quantitas c designet peripheriam 360 grad. an eam peripheriam conjunctam cum viâ quam Sol emensus est mense synodico; sed ex integrationis adhibitæ ratione patet, actum fuisse de veris quadrantibus circuli, ideoque hic c designare peripheriam ipsam nihilque ultra, ita ut $\frac{Frc}{Va}$ sit retardatio absoluta Lunæ tempore synodico.

Verum alia certior correctio est adhibenda; Constat ex Propositione XXVI. hujusce Libri, velocitatem Lunæ augeri per Solis actionem Radio orbitæ Lunaris perpendicularem, ita ut, velocitas Lunæ in Quadraturis sit ad ejus velocitatem in quolibet puncto ut $109.73r$ ad $109.73r + \frac{yy}{r}$, hinc tempus quo describitur arcus du brevius fit in proportione velocitatum, ideoque cum id tempus fuerit $\frac{\mu du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$, fit $\frac{109.73r}{109.73r + \frac{yy}{r}} \times \frac{\mu du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$ sive fractionem ad series reducendo $1 - \frac{yy}{109.73rr} \times \frac{\mu dc}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$; Quantitas autem hæc $\frac{\mu dc}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$, duas partes continet, priorem independentem ab actione Solis secundùm directionem radii exercitam, & de acceleratione ad hanc partem pertinente actum est in XXVI. Prop.; & hinc fit ut mensis synodicus medius sit brevior eo qui debuisset esse in proportione numeri 10973 ad 11023, & inæqualitates inde natæ in variis partibus mensis synodici in variatione continentur;

121.

 alte-

De Mundi Systemate.

121. altera pars $\frac{\mu\, du}{c} \times \frac{2\,Y}{V}$ pendet ab actione Solis secundum radium orbitæ Lunaris exercitam, & de hac sola isto calculo agitur, ideoque cum ex ista oriatur retardatio $\frac{2\,Y}{V}\, du$, & tempus $\frac{\mu\, du}{c}$ fiat minus in proportione 1 ad $1 - \frac{yy}{109.73 r^2}$ retardatio quæ fiet dum arcus du describi debuisset erit solummodo $\frac{2\,Y\, du}{V} - \frac{2\,Y yy\, du}{109.73 r^2 V}$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ evadet hoc Elementum $du \times \frac{2\,F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^4}{109.73\, r^3} + \frac{yy}{109.73\, r}$ cujus Integralis pro quadrante juxta Lemma I. est $\frac{2\,F}{Va} \times \frac{3r^2 c}{8r} - \frac{1}{4} rc - \frac{3 \times 3 r^4 c}{4 \times 8 \times 109.73 r^3} + \frac{r^2 c}{8 \times 109.73}$ sive $\frac{2\,Frc}{Va} \times \frac{1}{8} - \frac{5}{4.8.109.73}$ & quadruplicatum pro tota revolutione fit $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$.

Coroll. Constat ex Cor. 2do. Prop. IV. Lib. I. Princ. Quod vires centrales sunt inter se directè ut radii & inversè ut temporum Periodicorum quadrata: hinc, si sit A annus sidereus, & M mensis Periodicus sidereus sepositâ omni Solis actione, erit F ad V ut $\frac{a}{AA}$ ad $\frac{r}{MM}$, sive $\frac{F}{V} = \frac{aMM}{rAA}$ substituto itaque hoc valore loco $\frac{F}{V}$ in quantitate $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$ quæ retardationem durante mense synodico exprimit, ea retardatio fit $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92}\, c$, & si non attendatur ad correctionem quæ pendet ex actione Solis perpendicularis radio orbitæ Lunaris ea retardatio foret $\frac{M^2}{A^2}\, c$.

PROBL. II.

Dato tempore synodico apparenti Lunæ, invenire tempus periodicum quod observari debuisset, si abesset actio Solis in Lunam secundùm radium orbitæ Lunaris exercitam.

Sit S mensis synodicus apparens, A annus sidereus, inde (ex nota proportione mensis synodici ad Periodicum) invenietur mensem Periodicum apparentem esse $\frac{AS}{A+S}$, & quoniam hoc tempore Periodico Luna describeret peripheriam c deducetur quod tempore synodico S describet arcum $\frac{A+S}{A}\, c$.

Sed Luna citra Solis actionem tempore Periodico M describere debuisset Peripheriam c, &, eadem in Hypothesi, tempore S descripsisset aream $\frac{Sc}{M}$ hinc ergo retardatio absoluta quam patitur tempore S est $\frac{Sc}{M} - \frac{A+S}{A}\, c = \frac{AS - AM - MS}{AM}\, c$. Sed per Corollarium præcedentis problematis ea retardatio inventa fuerat $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92}\, c$ hinc obtinetur hæc æquatio $AS - AM - MS = \frac{433.92\, M^3}{438.92\, A}$, loco M scribatur X A, loco S scribatur E A, & fiet hæc æquatio $A^2 E - A^2 X - A^2 EX = \frac{433.92\, A^3 X^3}{438.92\, A}$ sive $E = X + EX + \frac{433.92}{438.92} X^3$, sed mensis synodicus medius est .08084896 A hinc E = .0804896 & æquatio fit $.08084896 = 1.08084896\, X + \frac{433.92}{438.92} X^3$, loco X substituatur .0744 + R & æquatio evadit .08084896 = .08082129 + 1.09726905 R, unde habetur .00002767 = 1.09726905 R, hinc obtinetur R = .0000252 & M = .0744252 A.

THEOR. VII.

Si mutetur utcumque Solis à Terra distantia, ita ut loco a dicatur X, dico quod, cæteris manentibus, Retardatio Lunæ durante Tempore synodico, cum Ter-

Terra distabit à Sole quantitate X erit $\frac{a^3 M^2}{X^3 A^2} \times \frac{433.92\, c}{438.92}$.

Nam ex Problemate I. Retardatio Lunæ inventa fuerat $\frac{F r c}{V a} \times \frac{433.92}{438.92}$ sed in aliâ à Sole distantia loco a ponatur X, & præterea loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$, decrescit enim vis Solis F ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione facta retardatio Lunæ fit $\frac{a^2 F r c}{X^3 V} \times \frac{433.92}{438.92}$; Tum vero loco $\frac{F}{V}$ substituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ & habebitur expressio Theorematis hujusce.

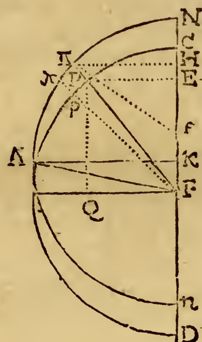
LEMMA II.

Foco F, axe majore N F n qui dicatur $2a$ describatur Ellipsis, sit e ejus excentricitas eaque parva sit, axis minor sit $2b$, erit $b^2 = a - e^2$; Ex foco ut Centro radio a describatur circulus, & ducantur à foco lineæ secantes circulum in P & Ellipsim in Π, linea FΠ dicatur X, sinus anguli A F P sit y, Cosinus z, Dico quod linea x erit $\frac{b^2 a}{a^2 \mp e z}$.

Ducatur ex Π, ΠH perpendicularis ad Axem, & propter Triangulorum FPE, FΠH similitudinem erit FP ad FΠ ut PE ad ΠH & ut FE ad FH, hoc est $a : x = y : \frac{y}{a} x = z : \frac{z}{a} x$: Sit f alter focus Ellipseos ex eo ducatur linea fΠ, ex natura Ellipseos est $f\Pi = 2a - x$ sed $f\Pi^2 = \Pi H^2 + fH^2$ & $\Pi H = \frac{y}{a} x$, & $fH = FH - Ff$ vel $Ff - FH$ vel $Ff + FH$, & est $Ff = 2e$ & $FH = \frac{z}{a} x$ hinc $\Pi H^2 + fH^2 = \frac{y^2}{a^2} x^2 + \frac{z^2}{a^2} x^2 \mp \frac{4ez}{a} x + 4e^2 = f\Pi^2 = 4a^2 - 4ax + x^2$, est autem $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} x^2 = x^2$, ergo $\mp \frac{4ez}{a} x + 4e^2 = 4a^2 - 4ax$, & dividendo per 4 & transponendo est $ax \mp \frac{ez}{a} x = a^2 - e^2 = b^2$; Unde habetur $x = \frac{b^2 a}{a^2 \mp ez}$. Q. E O.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

I.2 I.



Cor. Hic valor x in series resolutus est $\frac{b^2}{a} \times 1 \pm \frac{ez}{a^2} + \frac{z^2 e^2}{a^2} \pm \frac{e^3 z^3}{a^3}$ &c. sumptis signis superioribus quando E cadit in eâdem parte ac centrum, & sumptis signis inferioribus quando E cadit in parte in quâ non est centrum.

Cor. 2. Si fractio $\frac{a}{x} \times \frac{a^2 \mp cz}{b^2}$ ad dignitates superiores evehatur termini in quibus e plurium dimensionum poterunt omitti, propter suppositionem excentricitatem exiguam esse, & quidem si agatur de Solis excentricitate ea non assurgit ad duas centesimas radii, & excentricitas Lunæ non assurgit ad septem centesimas.

Cor. 3. Hinc tardatio Lunæ quæ ex Solis actione pendet, fiet durante tempore synodico S, $\frac{433.92c}{438.92} \times \frac{M^2}{A^2} \times \frac{a^2 \mp ez^3}{b^6}$, positis a pro semi-axe majore orbitæ Solis, e pro ejus excentricitate, & b pro axe minore.

PROBL. III.

Determinare quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis dum Ter-

DE MUNDI SYSTEMATE. 121.

Terra describit circa Solem arcum quamminimum datum.

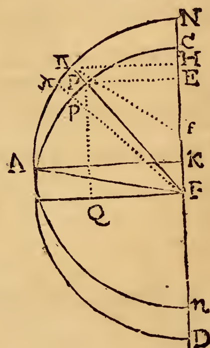
Sit ut in præcedenti Lemmate N Π n Ellipsis quam terra describit, sit Sol in foco F, ducatur ut prius linea F P Π & ei quam proxima F p π quæ secet in circulo C A D arcum P p, & quæratur quantitas graduum quâ tardatur Luna per Solis actionem, dum Terra videretur è Sole, descripsisse arcum P p.

Sit ut prius A tempus annuum, a Ellipseos semi-axis major, k circumferentia eo radio descripta ex foco F, sit e excentricitas, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ semi-axis minor, area semi-circuli $\frac{ak}{4}$, quæ est ad aream semi-Ellipseos ut est a ad b, hinc area semi-Ellipseos est $\frac{bk}{4}$.

Dicatur arcus A P, u, arcus P p sit du, radio F Π sive X describatur arculus ex π in F Π, is erit ad du ut est F Π sive X ad a, ergo is arculus erit $\frac{x\,du}{a}$, ideoque area F Π π est $\frac{x^2 du}{2a} = \frac{b^4 a\,du}{2 \times \overline{a^2 \mp ez}^2}$ (per Lem. præced.)

Sed tempus quo terra arcum P p descripsisse videtur est ad tempus semestre $\frac{1}{2}$ A, ut hæc area F Π π, sive $\frac{x^2 du}{2a}$ ad semi-Ellipsim $\frac{bk}{4}$, Est itaque illud tempus quo terra arcum P p descripsisse videtur $\frac{4x\,du}{2abk} \times \frac{1}{2}$ A $= \frac{x^2 \text{A}\,du}{abk}$.

Inventum autem est quod tempore S Luna tardabatur propter actionem Solis quantitate $\frac{433.92\,c}{439.92} \times \frac{\text{M}^2 a^3}{\text{A}^2 x^3}$ ergo tempore $\frac{x^2 \text{A}\,du}{abk}$ tardabitur quantitate $\frac{433.92\,c \times x^2 \text{A}\,du}{438.92 \times \text{S}\,abk} \times \frac{\text{M}^2 a^3}{\text{A}^2 x^3}$ sive $\frac{433.92\,c \times du}{438.92 \times \text{S}.b.k} \times \frac{\text{M}^2 a^2}{\text{A}\,x}$, aut substituendo valorem fractio. $\frac{a}{x}$, fit $\frac{433.92.cdu}{438.92.\text{S}bk} \times \frac{\text{M}^2 a}{\text{A}} \times \frac{a^2 \mp ez}{b^2}$ sive $\frac{433.92cdu \times \text{M}^2 a}{438.92\text{SA}b^3 k} \times a^2 \mp ez$.



PROBL. IV.

Invenire retardationem Lunæ ex actione Solis ortam durante semestri revolutione terræ circa Solem.

Primo inveniatur Integralis Elementi per Probl. III. inventi quod est $\frac{433.92\,c\,du \times \text{M}^2 a}{438.92.\ \text{S. A.}\ b^3 k}\ a^2 \pm az$ cujus Integralis est $\frac{433.92\,c \times \text{M}^2 a}{438.92.\ \text{S. A}\ b^3 k} \times a^2 u \mp aey$.

Si ergo sumatur semestris revolutio, illic est $u = \frac{1}{2}k$, & termini in quibus occurrit y sese destruunt, ut quidem liquet ex eo quod y illic evanescat, unde semestris retardatio fit $\frac{433.92c \times \text{M}^2 a}{438.92\text{SA}b^3 k} \times \frac{1}{2} a^2 k = \frac{433.92c \times \text{M}^2 a^3}{438.92\ \text{S A}\ b^3} \times \frac{1}{2}$ sive ponendo $a = b$ quod proxime verum est $\frac{433.92\ c\ \text{M}^2}{438.92\ \text{S} \times \text{A}} \times \frac{1}{2}$.

Cor. Si quæratur retardatio Lunæ, facta tempore quo Terra à suo Aphelio ad mediocrem ejus distantiam pervenit, observandum quod eo in loco arcus u est $\frac{1}{4}k - e$, & y est b, unde Integralis inventa evadit $\frac{433.92\,c \times \text{M}^2 a}{438.92\,\text{S. A}\ b^3 k} \times \frac{1}{4} a^2 k - a^2 e - abe$, aut simplicius si quantitates a & b pro æqua-

æqualibus sumere liceat fiet $\frac{433.92\,c \times M^2}{438.92\,S.A\,k}$ $\times \frac{1}{4}k - 2e$ sive $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92 \times SA\,b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$.

PROBL. V.

Invenire Æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione, & quæ est adhibenda quando Terra est in suâ mediocri distantiâ à Sole.

Primo observandum est motum Lunæ qualis ex apparentiis determinatur ex duplici causâ pendere, ex actione Terræ cum motu projectili conjunctâ & ex Solis actione quæ motum ex præcedenti causâ natum tardat; Prior motus in orbe circulari uniformis foret, sed tardatio ex alterâ causâ procedens inæqualiter priori illi sese immiscet, Astronomi verò cum motum medium Lunæ æstimant, hanc tardationem sumunt quasi uniformiter in omne tempus distributam.

Cum ergo ea tardatio major sit in aliquibus Terræ positionibus, in aliis sit minor, quæstio est quænam correctio motui medio Lunæ sit facienda, ut habeatur Lunæ locus verus, ideoque investiganda est differentia inter tardationem proportionaliter tempori distributam, & tardationem veram quæ singulo loco competit, quæ differentia loco medio addita aut ex eo detracta restituet verum locum Lunæ quatenus hæc sola irregularitas spectatur.

Ut ergo habeatur tardatio tempori proportionalis quando Terra est in mediocri distantia, fiat secundum Regulam Keplerianam, ut area semi-Ellipseos (quæ est $\frac{bk}{4}$ & est semestri tempori proportionalis) ad aream FNA (quæ est Ellipseos quarta pars cum Triangulo FAK ideoque est $\frac{bk}{8} + \frac{be}{2}$ & est proportionalis tempori quo Terra ab Aphelio suo ad mediocrem à Sole distantiam pervenit) hoc est ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{4} + \frac{e}{k}$, ita tardatio semestri tempore factâ quæ (per Probl. IV.) est $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,S\,A\,b^3} \times \frac{1}{2}$, ad tardationem proportionalem tempori quo Terra ab Aphelio ad mediocrem suam à Sole distantiam pervenit, quæ erit ergo $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,S\,A\,b^3} \times \frac{1}{4} + \frac{e}{k}$; sed per Cor. Probl. IV. vera tardatio eo in loco erat $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,S\,A\,b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$. Hinc substractione factâ, tardatio mediocris superat tardationem veram quantitate $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,S.A\,b^3} \times \frac{3e}{k}$. Hæc ergo quantitas graduum debet addi loco medio ut locus verus obtineatur. Si ergo loco e sumatur $.016\frac{7}{8}a$, erit $3e = .050\frac{5}{8}a$, & loco k scribatur $6.283188\,a$; & loco r, 360 gr. erit $\frac{3ec}{k} = \frac{18^{gr}.225}{6.283188} = 2^{gr}.9005$; Præterea $\frac{M^2}{S.A}$ ad calculum revocatur si loco M ponatur, 0744252 A; & loco S, $.08084896$ A, ut in Prob. 2do. repertum est, fit $\frac{M^2}{S.A} = .0685118383$, idque ductum in fractionem $\frac{433.92}{438.92}$ efficit. 06773137, cumque fractio $\frac{a^3}{b^3}$ sit tantum 1.00045 & superius sumptum sit a loco b hæc fractio pro unitate sumi potest, hinc est $\frac{a^3 M^2}{b^3\,S.A} \times \frac{433.92}{438.92} = .06773137$, quod ductum in $2^{gr}.9005$ efficit $0^{o}.19646$ quod ductum per $60'$ efficit $11'.7876$, sive $11'.47''.256'''$, quam Newtonus $11'.49''$ assumit; majorem autem Æquationem in Hypothesi Elliptica inveniemus, unde medium quoddam inter utramque ab ipso assumptum esse videtur.

121. Cor. 1. Cum hæc æquatio sit $\frac{433.92 \times ca^3 \times M^2}{438.92 \times S.\,b^3 A} \times \frac{3e}{k}$ sive proxime $\frac{433.92\,c \times M^2}{438.92\,S \times A} \times \frac{3e}{k}$, & quantitates c, M, S, A, k, sint constantes, hæc æquatio, ubi Tellus est in suâ mediocri distantiâ, est sicut excentricitas orbitæ Telluris e, ideoque si ea excentricitas major sit quam $.016\frac{7}{8}$ radii a, crescet hæc æquatio in hac proportione; sit v. gr. $e = a \times .016\frac{11}{12}$, &

121\. & fiat ut $16\frac{7}{8}$ ad $16\frac{11}{12}$ ita $11'. 47''.616$ ad quartum, is quartus terminus $11'.49''.42$, erit æquatio, ſuppoſitâ excentricitate orbitæ Telluris $.016\frac{11}{12}$, hoc in caſu Newtonus Æquationem facit $11'. 50''$.

Cor. 2. In alio quovis loco orbitæ Telluris, æquatio habebitur ſi fiat ut ſemi-Ellipſis $\frac{bk}{4}$ ad aream F N Π ita ſemeſtris tardatio $\frac{433.92\,c\,M^2}{438.92 \times S.A} \times \frac{a^3}{2\,b^3}$ ad tardationem huic tempori proportionalem, quæ erit ergo $\frac{433.92\,c \times M^2 \times FN\Pi}{438.92 \times S \times A\,b^3} \times \frac{2a^3}{bk}$ tum vero ſi ſumatur tardatio loco Π conveniens quæ eſt $\frac{433.92 \times c \times M^2 a}{438.92 \times S \times A b^3 k} \times \overline{a^2 u \mp aey}$, (Probl. 4.) erit hæc æqu. $\frac{433.92\,c \times M^2 a^2}{438.92 \times S.A \times b^3 k} \times \frac{2a \times FN\Pi}{b} - au \pm ey$, ideoque erit ut $\frac{2a\,FN\Pi - abu \pm bey}{b}$; aut ſumendo $u = b$, ut $\frac{2\,FN\Pi - bu \pm ey}{b}$. Jam vero hæc quantitas eſt ipſa æquatio centri Solis; nam arcus qui deſcriberetur per motum medium Solis eo tempore quo arcus u reverâ percurritur hac proportione obtinetur, ut ſemi-Ellipſis $\frac{bk}{4}$ ad aream F N Π ita ſemicirculus $\frac{1}{2}k$ ad arcum medio motu deſcriptum qui ergo erit $\frac{4\,FN\Pi}{bk} \times \frac{1}{2}k = \frac{2\,FN\Pi}{b}$; ſed arcus tunc temporis reverâ deſcriptus, eſt N Π ſive u, ergo æquatio centri Solis eſt $\frac{2\,FN\Pi}{b} - u$ ſive $\frac{2FN\Pi - bu}{b}$ cui quantit. $\frac{2FN\Pi - bu \pm ey}{b}$ eſt quam proximè æqualis, nam terminus ey propter exiguitatem e reſpectu b, & y reſpectu u conſiderationem nullam hic meretur, ergo æquatio Lunaris in quovis loco orbitæ Telluris eſt ſicut æquatio centri Solis eo in loco; Ergo ut æquatio centri Solis in mediocri diſtantia Telluris à Sole, eſt ad æquationem motus Lunaris adhibendam cum Tellus eſt in ea mediocri diſtantia à Sole, ita eſt æquatio centri Solis in quâvis diſtantiâ u ab Aphelio, ad æquationem Luni Solarem primam Lunæ illi loco convenientem.

Cor. 3. Æquatio iſta Lunæ, quæ Solaris prima dicitur, eſt maxima in diſtantia mediocri Terræ à Sole; nam cum ſit proportionata æquationi centri Solis, & æquatio centri Solis ſit maxima in mediocri diſtantiâ Telluris à Sole per ea quæ primo Libro circa hanc æquationem demonſtrata ſunt, Æquatio Solaris Lunæ eo in loco maxima pariter erit.

De *Incremento motus medii Lunæ, & ejus æquatione ex Solis actione pendentibus, in Hypotheſi eum orbem eſſe Ellipticum, Methodo diverſâ ab eâ quæ in calculo præcedente fuit adhibitâ.*

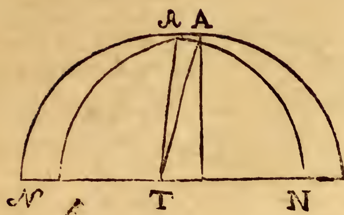
THEOR. I.

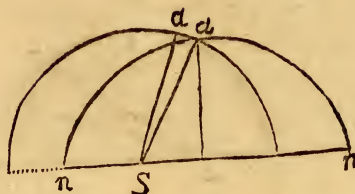
Sint duæ Ellipſes deſcriptæ circa corpora centralia in ipſarum focis poſita, quorum vires abſolutæ diverſæ ſint; Dico, quod ſi Tempora Periodica in utraque Ellipſi ſint ut earum Ellipſium areæ; Ellipſes illæ erunt inter ſe ſimiles.

Deſcribantur duæ Ellipſes NAN, nan, circa corpora S & ſ in focis Ellipſium poſita, & quorum vires ſint diverſæ, ſi totum tempus quo deſcribitur Peripheria Ellipſeos N A N, ſit ad totum tempus quo deſcribitur Peripheria Ellipſeos n A n ut area prioris Ellipſeos ad aream alterius, Ellip-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

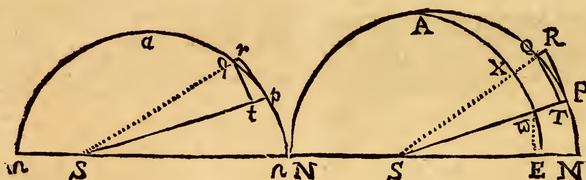
121





Ellipſes illæ ſimiles eſſe debebunt, hoc eſt earum Ellipſium axes majores erunt inter ſe ut ſunt inter ſe earum minores axes, v gr. ſi ſemi-axis major Ellipſeos N A N dicatur r, ejus minor ſemi-axis dicatur q & major ſemi-axis Ellipſeos n a n dicatur ρ, ejus minor ſemi-axis κ, Dico quod erit q ad κ ut eſt r ad ρ.

Ex naturâ Ellipſium area Ellipſeos NAN eſt ad aream Ellipſeos n a n ut eſt rq ad $\rho\kappa$, & ex Hypotheſi tempus Periodicum in Ellipſi N A N eſt ad tempus Periodicum in Ellipſi n a n in eadem ratione rq ad $r\kappa$, ſi ergo ſumantur arcus ſimiles A A, a a in mediocri diſtantiâ in utrâque Ellipſi, tempora quibus deſcribentur illi arcus erunt ut tota tempora Periodica, quia illi arcus A A, a a in mediocri diſtantiâ poſiti deſcribuntur motu medio corporum eas Ellipſes deſcribentium, & erunt etiam ut areæ A S A & a s a ex Hypotheſi, & iſtæ areæ A S A & a s a, ſunt ut quadrata linearum S A & s a ſive ut r^2 ad ρ^2; Ergo eſt r^2 ad ρ^2 ut rq ad $\rho\kappa$, & dividendo terminos homologos per r & ρ eſt r ad ρ ut q ad κ; Ergo Ellipſes ſunt ſimiles. Q. E. D.



THEOR. II.

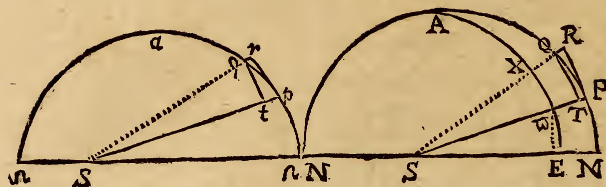
Sint, ut prius, duæ Ellipſes deſcriptæ circa corpora centralia in ipſarum focis poſita quorum vires abſolutæ diverſæ ſint, & ſint tempora Periodica in utrâque Ellipſi ut earum Ellipſium areæ, Dico quod axes majores earum Ellipſium erunt reciprocè ut vires abſolutæ corporum centralium.

Vis abſoluta corporis S dicatur V, corporis s dicatur V—Y, ducantur in utrâque Ellipſi lineæ S P, s p ad lineas apſidum S N, s n ſimiliter inclinatæ, & iis proximæ ducantur lineæ S Q, s q angulos ſimiles P S Q, p s q conſtituentes; ducantur ex Q & q perpendiculares Q T, q t in lineas S P, s p, & productis lineis S Q s q donec occurrant Tangentibus in R & r, erunt Q R, q r virium centralium effectus dum deſcribuntur arcus P Q, p q.

Primò quidem ex Hypotheſi, Tempora quibus deſcribentur ii arcus P Q, p q erunt ut areæ P S Q, p s q, & quia, ex conſt. illæ areæ ſunt ſimiles, erunt ut quadrata linearum homologarum ſive ut SP^2 ad sp^2 aut QT^2 ad qt^2. Sunt autem virium centralium effectus, directè ut vires centrales & ut quadrata temporum, vires verò centrales ſunt ut

De Mundi Systemate.

121.



$\frac{V}{SP^2}$ ad $\frac{V-Y}{sp^2}$, & quadrata temporum sunt ut SP^4 ad sp^4, Ergo lineæ QR & qr erunt inter se ut $\frac{V}{Sp^2}\times SP^4$ ad $\frac{V-Y}{Sp^2}\times sp^4$, sive ut $V\times SP^2$ ad $\overline{V-Y}\times sp^2$, aut denique ut $V\times QT^2$ ad $\overline{V-Y}\times qt^2$.

Secundo, In omnibus Ellipsibus per vim centralem ex foco prodeuntem descriptis latus rectum est æquale $\frac{QT^2}{QR}$ ut constat ex Prop. XI. Lib. I. Princ. Si itaque latus rectum Ellipseos NAN sit L, Ellipseos vero nan sit λ erit $L=\frac{QT^2}{QR}$ & $\lambda=\frac{qt^2}{qr}$, loco QR & qr quantitates ipsis proportionales $V\times QT^2$ & $V-Y\times qt^2$ collocentur, & erit L ad λ ut $\frac{QT^2}{V\times QT^2}$ ad $\frac{qt^2}{V-Yqt^2\times}$ sive ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; sed ex naturâ Ellipsium, est $L=\frac{q^2}{r}$ & $\lambda=\frac{\varkappa^2}{\varrho}$, præterea quia Ellipses sunt similes ex præcedente Theoremate est $q:r=\varkappa:\varrho$, ideoque $\frac{q}{r}=\frac{\varkappa}{\varrho}$; Est ergo $L:\lambda$ ut q ad $\varkappa$. sive ut r ad ϱ; Itaque est r ad ϱ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$. Q. E. D.

Cor. In hîs itaque Hypothesibus Tempora Periodica erunt inversè ut Quadrata virium absolutarum corporum S & s; sunt enim per Theor. I. ut r^2 ad ϱ^2, & ex hoc Theoremate est r ad ϱ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; Ergo Tempora Periodica sunt ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}^2}$.

THEOR. III.

Sit T terra, P Luna quæ circa terram (sepositâ omni actione Solis) describat orbitam circulo proximam tempore Periodico M, Vis absoluta Terræ in Lunam dicatur V, minuatur ea vis absoluta quantitate exiguâ Y; Dico quod si ea vis V—Y maneat constans Luna describet circa Terram orbitam similem illi quam prius describebat, ita ut si prioris orbitæ semi-axis major dicatur r, semi-axis major orbitæ novæ erit $\frac{Vr}{V-Y}$ & tempus Periodicum erit $\frac{V^2M}{\overline{V-Y}^2}$ sive $M\times 1+\frac{2Y}{V}+\frac{3Y^2}{V^2}+\frac{4Y^3}{V^3}$ &c.

Nam 1°. cum Luna discedit à suâ orbitâ, retinetur tamen per vim decrescentem secundum quadrata distantiarum, describet ergo circa corpus in foco positum sectionem Conicam, quæ erit adhuc Ellipsis, quia mutatio vis centralis ponitur exigua, & per vim priorem orbita circulo finitima describebatur ita ut nec in Hyperbolam nec in Parabolam mutari possit hæc orbita.

2°. Cum vis nova Y ad centrum sit etiamnum directa, quamcumque in viam flectatur Luna, areæ semper manebunt Temporibus proportionales, ideo si tandem in orbitam a d b c deveniat ex orbi-

ta

ta ADBC, tempus quo deſcribetur peripheria adbc erit ad tempus M quo deſcribebatur peripheria ADBC ut tota area ADBC ad aream adbc.

3o. Cum ergo in his orbitis ADBC, adbc (quæ deſcribuntur circa corpus idem quidem, ſed cujus vis abſoluta alia cenſetur cum deſcribitur orbita ADBC quam cum deſcribitur adbc) tempora ſint areis proportionalia, iſtæ areæ ſimiles erunt, per Theor. I., circuliſque finitimæ per Hyp., axes majores erunt inversè ut vires V & V−Y, per Theor. II. & tempora Periodica ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}^2}$ itaque ſi in orbita ADBC, id tempus dictum fuerit M, in orbita adbc, erit $\frac{V^2 M}{\overline{V-Y}^2}$, ſive hanc quantitatem in ſeriem reſolvendo $M \times 1 + \frac{2Y}{V} + \frac{3Y^2}{V^2}$. Q. E. D.

Cor. Iiſdem Principiis oſtendetur, quod ſi vis abſoluta terræ augeretur quantitate exigua Y, Luna deferretur in orbitam interiorem $\alpha\delta\beta\varkappa$ ſimilem priori ADBC, cujus radius foret $\frac{rV}{V-Y}$, ſumendo quantitatem Y negativè & quæ deſcriberetur tempore $M \times 1 + \frac{2Y^2}{V} + \frac{3Y^2}{V^2} + \frac{4Y^3}{V^3}$ &c. ſumendo negativè terminos in quibus quantitas Y eſt imparium dimenſionum.

Ut autem ſervetur hæc conditio quantitatem Y eſſe exiguam, fractiones $\frac{3Y^2}{V^2}$ &c. ſunt delendæ in utroque caſu ut infinitè parvæ.

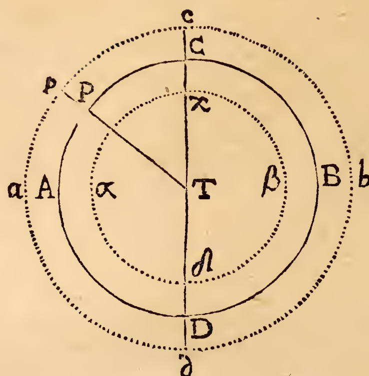
Schol. In primo calculo, cum ſuppoſuerimus orbitam Lunæ ADBC eſſe circularem, orbitas novas adbc, $\alpha\delta\beta\varkappa$ circulares etiam eſſe, ſupponere neceſſe erat per Theor. I. hujuſce calculi.

THEOR. IV.

Sit T Terra, P Luna, ADBC orbita quam Luna circa terram deſcriberet ſepoſitâ omni Solis actione, ſit ST diſtantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in Terram ipſam in mediocri illâ diſtantiâ, diſtantiâ Lunæ à Terrâ PT dicatur r; Sit CP diſtantia Lunæ à quadraturâ proximâ quæ dicatur u, ſit ejus ſinus y, ſit ejus coſinus z; Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam ſecundùm directionem radii PT eſt ubique $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. Hoc Theor. idem eſt cum Theor. IV. præcedentis calculi, cujus demonſtratio adiri poteſt.

De Mundi Systemate.

121.



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi poterit, si concipiatur Lunam ex suâ orbitâ A D B C in aliam transferri cujus singulæ particulæ quamminimæ, forent portiones earum orbitarum quas Luna reverâ describeret, si vis Terræ constanter imminuta aut aucta foret eâ quantitate, quæ, per actionem Solis in eam particulam exercitæ, ex vi Terræ detrahitur aut ei additur.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos crescat & decrescat, sitque nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo post minima sit, sicque gradatim crescat, si censeatur eam constantem manere per aliquod tempusculum, Luna brevissimè transibit in orbitam a d b c illi vi congruam per Theor. III. mox verò cum vis Solis crescat quantitate quam minimâ ea vis censeatur iterum constans per alterum tempusculum transibit Luna ex orbitâ primæ vi congruâ in alteram huic incremento consentaneam, sicque semper: ideoque in singulis particulis arcus C P, censeri potest Lunam delatam esse in orbitam vi Solis in eo puncto agenti congruam.

THEOR. VI.

Dicatur mediocris distantia Lunæ à Terra, r; vis Terræ in eâ distantiâ sit V, vis Solis sive addititia sive substractiva sit, quæ agit in Lunam secundum radii Telluris directionem, sit Y in eâ mediocri distantiâ à Terra, crescat verò ut distantiæ; Dicatur x alia quævis distantia Lunæ à Terrâ in quâ vis Terræ erit $\frac{rrV}{xx}$, & vis Solis erit $\frac{xY}{r}$; Dico quod vis corporis centralis quæ in distantiâ x foret $\frac{rrV}{xx} - \frac{xY}{r}$, in mediocri distantiâ esse debuisset $V - \frac{x^3}{r^3}Y$.

Nam siquidem fingitur vim Corporis ejus centralis fictitii sequi legem gravitatis & decrescere sicut quadrata distantiarum fiat ut $\frac{1}{xx}$ ad $\frac{1}{rr}$ ita $\frac{rrV}{xx} - \frac{xV}{r}$ quæ est vis in distantiâ x ad $V - \frac{x^3}{r^3}Y$ quæ erit vis in distantiâ r.

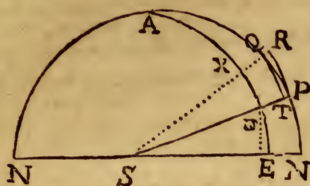
THEOR. VII.

Sit x ut prius distantia Lunæ à Terrâ in propriâ orbitâ, dico quod per actionem Solis illa distantia fiet $\frac{r^3xV}{Vr^3 - Yx^3}$, sive hoc valore in seriem redacto fiet $x + \frac{x^4Y}{r^3V} + \frac{x^7Y^2}{r^6V^2}$ &c. aut omissis terminis superfluis $x + \frac{x^4Y}{r^3V}$.

Nam nova orbita in quam Luna delata censetur est similis priori per Lem. I. & per Lem. II. earum lineæ Homologæ sunt ut vires absolutæ corporum centralium inversè, seu ut vires quas habent in distantiis æqualibus, nempe inversè ut $V - \frac{x^3}{r^3}Y$ ad V, ergo ut $V - \frac{x^3}{r^3}Y$ ad V, ita x ad distantiam Homologam in novâ orbitâ quæ erit ergo $\frac{xV}{V - \frac{x^3}{r^3}Y}$ sive $\frac{r^3xV}{Vr^3 - x^3Y}$.

Q. E. D.

THEO-



THEOR. VIII.

Centro S, radio æquali mediocri distantiæ r, describatur circulus, arcus ejus ϖX inter lineas SP, SQ interceptus dicatur du; Dico primò quod Luna in eo circulo uniformiter moveri posset eodem tempore Periodico quo moveretur in propriâ orbitâ si abesset vis Solis, ideoque si tempus Periodicum Lunæ in propriâ orbitâ dicatur M, & tota Peripheria circuli cujus radius est r dicatur c, tempus quo arcus du describetur mediocri Lunæ motu citra Solis actionem erit $\frac{Mdu}{c}$;

2°. Cum sit r semi-axis major Orbitæ Lunaris, si dicatur q ejus axis minor, Dico quod tempus quo idem ille arcus du describi videbitur urgente Solis actione & spectatâ excentricitate orbitæ Lunaris erit $\frac{Mdu}{c} \times \frac{x^2}{qr} + \frac{2x^5Y}{qr^4V} + \frac{3x^8Y^2}{qr^7V^2}$ &c.

Primo enim liquet quod is circulus describetur eo tempore Periodico quo describeretur orbita Elliptica Lunaris si sola vis Telluris agat; nam si corpora plura circa centrum commune revolvantur in quibuscumque Ellipsibus, Tempora eorum Periodica sunt in sesquiplicatâ ratione axium majorum (per Prop. XV. Lib. I. Princ. Newt.) sed hujus circuli & orbitæ Lunaris axes majores sunt æquales (per const.) Ergo eorum tempora Periodica sunt æqualia.

Secundo dicatur E tota superficies Ellipseos orbitæ Lunaris, hæc superficies E erit ad aream SQP ut tempus Periodicum M ad tempus quo arcus PQ describeretur, quod erit ergo $\frac{SQP \times M}{E}$ valor autem areæ SPQ est $\frac{QT \times SP}{2}$, sed ut r ad du ita SQ sive SP (x) ad QT, est ergo $QT = \frac{xdu}{r}$ & $\frac{QT \times SP}{2} = \frac{xxdu}{2r}$ hinc tempus quo Luna in propriâ orbitâ citra Solis actionem describeret arcum QP est $\frac{Mxxdu}{2r.E}$. Hoc autem tempus erit ad illud quo describeretur similis arcus in orbitâ in quam Luna per actionem Solis defertur ut quadrata radiorum seu, per (Theor. præc.) ut xx ad $xx + \frac{2x^5Y}{r^3V}$ ita $\frac{Mxxdu}{2r.E}$ ad $\frac{Mdu}{2r.E} \times xx + \frac{2x^5Y}{r^3V}$, sive cùm semi-axis minor orbitæ Lunaris dicatur q & area Ellipseos E sit ideo $\frac{1}{2}qc$, Tempus quo arcus du describi videbitur à Lunâ translatâ per actionem Solis in aliam orbitam fiet $\frac{Mdu}{c} \times \frac{xx}{qr} + \frac{2x^5Y}{qr^4V} +$ &c. 121.

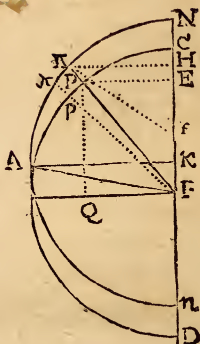
Cor. 1. Ex ipsâ demonstratione liquet quod tempus quo citra Solis actionem describeretur area SPQ foret $\frac{Mdu}{c} \times \frac{xx}{qr}$, & discrepantiæ illius quantitatis à motu medio in æquatione Lunæ, quæ dicitur soluta, continentur: excessus vero (vel defectus si vis Y fiat negativa) $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ per Solis actionem genitus novam motus medii perturbationem producit de quâ hic agendum; Ergo, siquidem per medium motum tempore $\frac{Mdu}{c}$ arcus du descriptus fuisset, tempore hujus excessus $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ arcus $\frac{2x^5Ydu}{qr^4V}$ describi potuisset, eâque quantitate graduum tardatur medius motus Lunæ propter actionem Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam.

Cor. 2. Iisdem vero ratiociniis quibus usi sumus in solutione Probl. 1. calculi præcedentis constabit, quod propter accelerationem quæ oritur per actionem Solis perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris exercitam hæc retardatio $\frac{2x^5Ydu}{qr^4V}$ debet minui in proportione 1 ad $1 - \frac{yy}{109.73r^2}$, sicque evadit $\frac{2x^5Ydu}{qr^4V} - \frac{2x^5y^2Ydu}{109.73qr^6V}$.

LEM-

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



LEMMA I.

Ex præcedentis calculi Lemmate II. conſtat quod ſi ex puncto ϖ ducatur perpendicularis ϖ E in lineam Apſidum, & excentricitas dicatur f erit FH ſive $x = \frac{q^2 r}{r^2 \mp f \times FE}$.

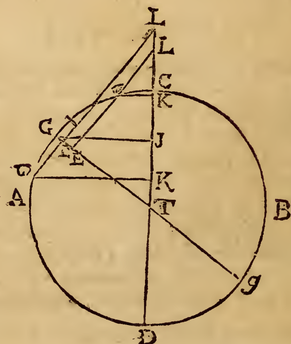
Nulla enim eſt differentia niſi in litteris, quæ diverſæ ſunt quia hic agitur de orbitâ Ellipticâ Lunæ illic de orbitâ Ellipticâ Telluris, cæterum eadem eſt demonſtratio.

Hic autem valor in ſeriem redactus evadet $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{FE \times f}{r} + \frac{FE^2 \times f^2}{r^4} \pm \frac{FE^3 \times f^3}{r^6}$ &c.

Signa ſuperiora adhibenda ſunt cum Luna diſtat ab Apogæo minus quam 90 gr. tam in conſequentia quam in antecedentia, cum Luna magis diſtat ab Apogæo quam 90 gr. ſigna inferiora ſunt adhibenda.

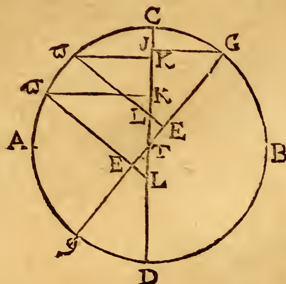
LEMMA II.

Si linea Apſidum non coincidat cum lineâ quadraturarum, Dicatur vero m ſinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ Apſidum, & n ejus anguli coſinus; Sit y ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ, z ejus coſinus, Diço quod diſtantia Lunæ à terrâ, quæ dicitur x erit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$ cum Luna eſt in eâdem quadraturâ cum alterutrâ Apſi, eſt verò $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ cum Luna & alterutra Apſis non ſunt in eâdem quadraturâ.



Sit CADB circulus deſcriptus centro T, radio æquali mediocri diſtantiæ Lunæ à terrâ quæ dicitur r. Sit GTg linea Apſidum, CTD linea quadraturarum, GI ſinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ apſidum qui dicitur m, TI ejus coſinus qui dicitur n, ϖ punctum circuli CADB quod reſpondet vero loco Lunæ in peripheria ſuæ orbitæ, quod ſumitur vel ultra vel citra apſidem, ϖ K ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ qui dicitur y, TK ejus coſinus qui dicitur z, Ducatur ex ϖ in lineam apſidum perpendicularis ϖ E, quæ producatur donec ſecet lineam quadraturarum in L, Triangulum TIG eſt ſimile Triangulo TEL (ob angulos rectos E & I & angulum communem T); Triangulum TEL eſt ſimile Triangulo ϖ KL (ob angulos rectos E & K & angulum communem L; Hinc eſt TI (n) : IG (m) : : ϖ K (y) : KL $= \frac{my}{n}$; Hinc in iſto caſu TL = TK + KL $= z + \frac{my}{n}$, ſed ex ſimilitudine Triang. TIG & TEL eſt TG (r) : TI (n) : : TL ($z + \frac{my}{n}$) : TE $= \frac{nz + my}{r}$, ſubſtituto ergo

go hoc valore in valore x Lemmate superiori reperto fit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$. Q. E. 1°. O.



Si ϖ & apsis alterutra non sint in eadem quadratura, & 1°. si tamen ϖ non distet 90 gr. à proxima apside, similia erunt ut prius Triang. TJG, TEL, ϖKL, unde erit $KL = \frac{my}{n}$, sed erit $TL = TK - KL$ sive $z - \frac{my}{y}$, unde fiet $TE = \frac{nz - my}{r}$ ideoque erit $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$; Sed si ϖ distet à linea apsidum plusquam 90 gradibus erit $TL = KL - TK$ sive, $-TK + KL$, ideoque TE fiet $\frac{-nz + my}{r}$, sed cum in eo casu signum anceps litteræ f mutari debeat, statuatur non mutari illud signum litteræ f dum Luna est in eâdem quadraturâ donec in aliam quadraturam transeat, quamvis magis quam 90 gradibus ab apside discedat, mutari debebit ut fiat æquipollentia signum quantitatis $\frac{-nz+my}{r}$, quæ itaque evadet ut prius $\frac{nz - my}{r}$ ideoque fiet $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ quotiescumque ϖ & apsis alterutra non erunt in eâdem quadraturâ, determinando signum anceps $\mp f$ ex apside cui vicinior fuit Luna cum eam quadraturam describere incepit. Q. E. 2°. Oft.

Cor. Hic valor x in seriem redactus evadit $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{f \times nz \pm my}{r \cdot r^2} + \frac{f^2 \times \overline{nz \pm my}^2}{r^2 \cdot r^4} \pm \frac{f^3 \times \overline{nz \pm my}^3}{r^3 \cdot r^6}$ signa superiora litteræ f sunt adhibenda cum initium quadraturæ quam describit Luna minus distat ab Apogæo quam 90 gr. tam in consequentia quam in antecedentia, si vero magis distet ab Apogæo quam 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda. 121.

Signa superiora quantitatis my sunt adhibenda cum & Luna & apsis alterutra sunt in eâdem quadraturâ, signa inferiora cum Luna & apsis sunt in diversis quadraturis.

PROBL. I.

Dato Sinu & Cosinu anguli quem faciunt linea Apsidum & linea quadraturarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, tempore quo Luna orbitam suam percurrit.

Supponitur lineam Apsidum & Solem immotos manere durante illâ revolutione Lunæ; Quo posito cum retardationis Lunæ elementum inventum fuerit (Cor. 2. Theor. 8.) $\frac{2a^5 Y du}{q r^4 V} - \frac{2x^5 y^2 Y du}{109.73 q r^6 V}$, loco $\frac{2rYdu}{qV}$ ponatur ejus valor $\frac{2rFdu}{Vaq} \times \frac{3y^2}{r} - r$ & loco $\frac{x}{r}$ valor ejus $\frac{q^2}{r^2} \times 1 \pm f \times \frac{nz \pm my}{r^2}$ &c. qui ad quintam dignitatem evehatur, dicatur A terminus $nz \pm my$, ea quinta dignitas erit $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 \pm \frac{5fA}{r^3} + \frac{15 f^2 A^2}{r^6} \pm \frac{35 f^3 A^3}{r^8}$; Verum observari potest, quod siquidem totidem sunt quadrantes in quibus f positivum aut negativum sumi debet, si tota revolutio Lunæ spectetur, hi termini ancipites omitti possunt, vel ab initio, hæc quinta dignitas sumi debet quasi foret $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 + \frac{15 f^2 A^2}{r^2}$

In his pagellis exponentem z loco exponentis 2 exaratum esse facilè percipiet eruditus Lector, quod monemus ne illo Typographico mendo turbetur horum intellectio.

De Mundi Systemate.

I,2 I.

ducatur in $1-\frac{yy}{109.73r^2}$ fiet $\frac{q^9}{109.73r^{12}}\times 109.73r^2-y^2+15\times109.73\frac{f^2A^2}{r^4}-\frac{15f^2y^2A^2}{r^6}$,
Denique ducatur in $\frac{2Fdu}{Vaq}\times 3y^2-r^2$ fit $\frac{2Fq^9du}{109.73Var^{12}}\times 329.19r^2y^2-3y^4-109.73r^4 + r^2y^2 + \frac{45\times109.73f^2y^2A^2}{r^4} - \frac{15\times109.73f^2r^2A^2}{r^4} - \frac{45f^2y^4A^2}{r^6}+\frac{15f^2y^2A^2}{r^4}$ five $\frac{2Fq^9du}{109.73Var^{12}}\times 330.19r^2y^2-3y^4-109.73r^4 + \frac{330.19\times15f^2y^2A^2}{r^4}-\frac{15\times109.73f^2r^2A^2}{r^4}-\frac{45f^2y^4A^2}{r^6}$. Loco A^2 fubftituatur $n^2z^2+m^2y^2$, omiffo termino $\pm 2mnzy$, quia quando tota revolutio Lunæ affumitur duo funt quadrantes in quibus Luna eft cum apfide, duo vero in quibus Luna cum neutrâ apfide occurrit, fit tandem totum Elementum $\frac{2Fq^9du}{109.73Var^{12}}\times 330.19r^2y^2-3y^4-109.73r^4+\frac{330.19\times15f^2n^2z^2y^2}{r^4}+\frac{330.19\times15f^2m^2y^4}{r^4}-\frac{109.73\times15f^2r^2n^2z^2}{r^4}-\frac{109.37\times15f^2r^2m^2y^2}{r^4}-\frac{45f^2n^2z^2y^4}{r^6}-\frac{45f^2m^2y^6}{r^6}$;
Cujus Integralis fecundum Lemma I. calculi præcedentis pro quadrante fit $\frac{2Fq^9}{109.73Var}\times\frac{330.19r^4c}{8}-\frac{3\times3r^4c}{4\times8}-\frac{109.73r^4c}{4}+\frac{330.19\times15f^2n^2r^4c}{8r^4}-\frac{330.19\times15f^2n^2\times\frac{3}{4}r^4c}{8r^4}+\frac{330.19\times15f^2m^2\times\frac{3}{4}r^4c}{8r^4}-\frac{109.73\times15f^2n^2r^4c}{4r^4}+\frac{109.73\times15f^2n^2r^4c}{8r^4}-\frac{109.73\times15f^2m^2r^4c}{8r^4}-\frac{45f^2n^2\times\frac{3}{4}r^4c}{8r^4}+\frac{45f^2n^2\times\frac{3\times5}{4\times6}r^4c}{8r^4}-\frac{45f^2m^2\times\frac{3\times5}{4\times6}r^4c}{8r^4}$; Quod reductum efficit $\frac{2Fq^9c}{109.73Var}\times\frac{108.48}{8}+\frac{330.19\times15\times f^2\times\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}m^2}{8r^4}-\frac{109.73\times15f^2\,\overline{n^2+m^2}}{8r^4}-\frac{45f^2\times\frac{1}{8}n^2+\frac{5}{8}m^2}{8r^4}$
quod quadruplicatum efficit $\frac{Fq^9c}{109.73Var^8}\times108.48+330.19\times15f^2\times\frac{\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}m^2}{r^4}-109.73\times15f^2\times\frac{n^2+m^2}{r^4}-45f^2\times\frac{\frac{1}{8}n^2+\frac{5}{8}m^2}{r^4}$ five tandem $\frac{Fq^9c}{109.73Var^8}\times108.48+136.0375\times15\frac{f^2m^2}{r^4}-27.5575\times\frac{15f^2n^2}{r^4}$.

Cor. Si Sol & Apfis immoti non fingantur, fed fupponatur eos pari paffu moveri res eodem redibit, fi modo hæc revolutio quâ durante nafcitur hæc tardatio cenfeatur æqualis menfi Synodico; Quamvis autem Apfis reverâ non fequatur motum Solis, fed longe lentiùs procedat, imo in ifto calculo immota cenferi debeat, non tamen inde oritur error ullius momenti tam propter Eccentricitatem Orbitæ Lunaris quæ magna non eft, quam propterea quod maxima pars hujus tardationis pendeat ex pofitione Lunæ refpectu Solis, & minima fit ea pars hujus tardationis quæ per fitum Lunæ refpectu Apfidum determinatur.

Cor. 2. Ex his terminis $\frac{Fq^9c}{109.73Var^8}\times108.48+136.0375\times15\frac{f^2m^2}{r^4}-27.5575\times15\frac{f^2n^2}{r^4}$ liquet quod fi linea Apfidum cum linea quadraturarum confentiat, quo cafu finus m anguli quem facit linea Apfidum cum linea quadraturarum evanefcit, & ejus Cofinus n fit r, hæc tardatio fit omnium minima, nempe $\frac{Fq^9c}{109.73.Var}\times108.48-27.5575\times15\frac{f^2}{r^2}$.

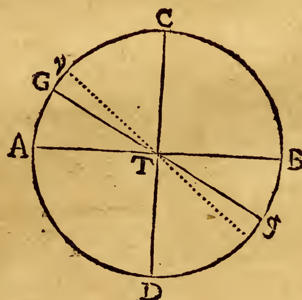
Econ-

E contra, si linea Apsidum sit in Syzygiis ita ut m fiat r, & n evanescat, hæc expressio fit omnium maxima nempe $\frac{Fq^9c}{109.73.Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2}{r^2}$; Ideo mensis Synodicus fit minimus cum Apsides sunt in Quadraturis, longissimus vero cum Apsides sunt in Syzygiis.

Cor. 3. Hinc oritur altera æquatio Solaris Lunæ quæ secunda dicitur & pendet ex situ Apsidum, sive Apogæi respectu Solis.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

I 2 I



PROBL. II.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari & lineam Apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ Syzygiarum successivè obtinere, Invenire tardationem mediocrem Lunæ in singulâ ejus revolutione synodicâ.

Sit linea Apsidum, in ipsâ directione syzygiarum A & B, & dum Sol ab Apogæo Lunæ in consequentia movetur, & Apogæum revera est immotum, fingatur Solem immotum stare & ipsum Apogæum à Sole in antecedentia regredi; Moveatur Apogæum ex G in γ per arcum quamminimum G γ qui dicatur du tardatio Lunæ quæ fiet dum describitur G γ erit ad totam tardationem quæ fieret si apsis foret immota in G & quæ per Probl. præcedens inveniretur, ut tempus quo Apsis describit arcum G γ ad totum mensem synodicum: Dicatur ergo A tempus quo Apsidum revolutio Solis respectu absolveretur, quod in hac hypothesi est ipse annus sidereus, erit ut tota circumferentia c ad du, ita A ad tempus quo Apsis arcum du describet quod erit $\frac{A\,du}{c}$. Præterea ut mensis synodicus S ad hoc tempus $\frac{A\,du}{c}$, Ita tardatio mense synodico facta quæ est $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2n^2}{r^4}$; ad tardationem quæ fiet tempore $\frac{A\,du}{c}$ quæ erit itaque $\frac{AFq^9du}{S \times 109.73\,.\,V.\,ar^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2n^2}{r^4}$ (in quâ expressione m respondet quantitati y quæ in Lemmate I. præcedentis

De Mundi Systemate.

tis calculi adhibetur, & n respondet quantitati z) & integretur pro quadrante juxta Coroll. 4. ejus Lemmatis habebitur

121.

$$\frac{A.F.q^9}{S\times 109.73\ V.ar^8}\times\frac{108.48c}{4}+\frac{136.0375\times 15f^2r^2c}{4r^4}-\frac{163.595\times 15f^2r^2c}{8r^4};$$

Quadruplicetur vero pro toto circulo fiet $\frac{AFq^9c}{S\times 109.73.Var^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$; Denique ut totum tempus A ad tempus synodicum S ita hæc tardatio ad tardationem mense synodico factam quæ erit ergo $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$.

PROBL. III.

Positâ excentricitate orbitæ Telluris circa Solem, & orbitæ Lunæ circa Terram invenire tardationem Lunæ 1°. dum Terra describit arcum quamminimum datum, 2°. Dum describit annuam suam orbitam, 3°. durante mense synodico, 4°. dum Luna ab Aphelio suo ad mediocrem suam à Sole distantiam pervenit.

Sit a mediocris distantia Telluris à Sole, x alia quævis distantia, si F sit vis Solis in distantia a erit $\frac{aaF}{xx}$ ejus vis in distantia x; Ergo in calculo Probl. mox præcedentis quo tardationem mense synodico factam invenimus, x loco a ponatur & $\frac{aaF}{xx}$ loco F evadet tardatio $\frac{a^2Fq^9c}{109.73\,Vx^3r^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$, & si A sit annus sidereus, M mensis Periodicus Lunæ citra omnem Solis actionem, est $\frac{F}{V}=\frac{M^2a}{A^2r}$ (per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) hinc ista tardatio evadit $\frac{M^2a^3q^9c}{109.73A^2x^3r^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$.

Sit b semi-axis minor Ellipseos quam Terra describit circa Solem, e excentricitas, k Peripheria radio a descripta, ideoque sit $\frac{1}{2}bk$ area tota Ellipseos quam Terra describit circa Solem, sit du motus angularis terræ circa Solem quam minimo tempore, area illi angulari motui respondens erit $\frac{xxdu}{2a}$ (ut constat ex calculo præcedente) ideoque ut Ellipsis tota $\frac{1}{2}bk$ ad hanc aream $\frac{xxdu}{2a}$, ita annus A, ad tempus quo arcus du describitur qui erit ergo $\frac{Axxdu}{abk}$, & ut mensis synodicus S ad id tempus ita tota tardatio ad tardationem hoc tempore quæ factam erit $\frac{AM^2a^3x^2q^9cdu}{109.73.S.A^2x^3abkr^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$ sive $\frac{M^2a^2q^9cdu}{109.73S\,Ax.bkr^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$ sed $\frac{a}{x}$ est $\frac{a^2\mp ez}{b^2}$ per Lem. 2. calculi præcedentis, hinc istud elementum evadit $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A\,b^3k.r^9}\times a^2du\mp ezdu$ cujus Integralis est

$$\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3.kr^9}\times a^2u\mp aey,$$

quæ semi-circulo absoluto fit

$$\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73\,S.A.b^3kr^9}\times\frac{1}{2}k;$$

cujus duplum est retardatio anno durante factâ, estque $\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3r^9}$ hinc ut A ad S ita hæc tardatio ad tardationem mense synodico factam quæ erit ergo $\frac{M^2a^3q^9c}{A^3b^3r^9}\times\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Denique, retardatio quæ convenit mediocri distantiæ à Sole, in quâ u est $\frac{1}{4}k-e$, & est $y=b$, est $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73\,S.A.b^3r^3}\times\frac{1}{4}a^2-\frac{a^2e}{k}-\frac{abe}{k}$.

PRO-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.

PROBL. IV.

Dato tempore Synodico apparenti Lunæ invenire tempus Periodicum M quod observaretur si omnino abesset vis Solis.

Siquidem tempore M describeretur arcus c, tempore S describeretur $\frac{Sc}{M}$, tempus autem Periodicum quod tempori Synodico S respondet est $\frac{AS}{A+S}$, ideoque cum illo tempore revera describatur arcus c, tempore Synodico S describeretur $\frac{A+S}{A}c$, hinc retardatio quæ fit mense Synodico est $\frac{Sc}{M}-\frac{Ac+Sc}{A}$ sive $\frac{ASc-AMc-MSc}{AM}$, quæ inventa fuit $\frac{M^2a^3q^9c}{A^2b^2r^9}\times\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ unde fit æquatio ex quâ valor quantitatis M obtinebitur, fiat ut in præcedenti calculo S=EA & M=XA, æquatio evadit $E=X+EX+X^3\times\frac{a^3q^9}{b^3r^9}\times\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Sumatur excentricitas mediocris orbitæ Lunaris quam .05505 r facit Newtonus in hoc Scholio, unde is terminus $\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ evadit 1.0110782 est $\frac{q^9}{r^9}=9864$, est $\frac{a^3}{b^3}=1.$ proximè, itaque æquatio est $E=X\times\overline{1+E}+9972X^3$, loco E substituatur .0804896, loco X substituatur .0744 + R & æquatio evadit .08084896 = .08082583 + 1.09740854 R unde habetur .00002313 = 1.09740854 R unde obtinetur R = .0000210, & M = .0744210 A; fere ut in præcedenti calculo.

PROBLEMA V.

Invenire æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione & quæ adhibenda est cum Terra est in mediocri suâ distantiâ à Sole.

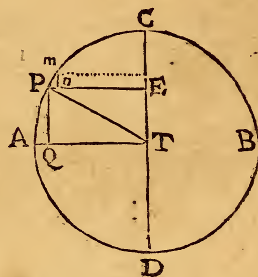
Hoc Problema solvitur ut in præcedenti calculo, itaque ut tota Ellipsis cujus area est $\frac{1}{2}bk$ ad aream FNA (sive $\frac{bk}{8}+\frac{be}{2}$.) ita tardatio annua quæ inventa est $\frac{M^2a^3q^9c\times108.48+813.6\times\frac{f^2}{r^2}}{S.A.b^3r^9\times109.73}$, ad tardationem quæ in motu medio continetur & quæ est ideo $\frac{M^2aq^9c\times108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3r^9\times109.73}\times\frac{1}{4}a^2+\frac{a^2e}{k}$, cujus excessus supra retardationem veram Probl. III. inventam est $\frac{M^2aq^9c\times108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3r^9\times109.73}\times\frac{2a^2e+abe}{k}$ sive sumendo ab pro a^2 fit $\frac{M\,a^3q^9c}{S.A.\,b^3r^9}\times\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}\times\frac{3e}{k}=\frac{.9972M^2}{S.A}\times\frac{3ec}{k}$ (per

(per Prob. IV.) est $\frac{3ec}{k} = 2gr. 9005$, est $\frac{M^2}{SA} = .0685042$ quod ductum in $.9972$ efficit $.068312388$, quod ductum in 2gr. 9005,
121. efficit 0°.1982 quod ductum per 60'. bis efficit 11''. 52'' &c. sed in priori calculo erat 11'. 47'', itaque medium inter hos duos valores est 11' 49'', ut invenit Newtonus; cum enim Orbitæ Lunaris figura sit admodum variabilis, & incerta sit excentricitas quæ ipsi citra actionem Solis conveniret, non immerito sumitur medium inter id quod prodit ex Hypothesi orbem Lunæ esse circularem, & in Hypothesi orbem Lunæ esse Ellipsim, cujus excentricitas est ea excentricitas mediocris quæ observatur.

PROBL. VI.

Positâ Excentricitate Orbitæ Lunaris, Posito vero Solem in mediocri suâ distantiâ à Terrâ semper stare, invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario situ Apogæi Lunæ respectu Solis.

Inventum erat in Problemate 1°. quod tota tardatio Lunæ, durante mense Periodico, in mediocri distantia Terræ à Sole & in data Apsidis ad Quadraturam positione erat $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 107.48 + \frac{136.035 \times 15 f^2 m^2}{r^4} - \frac{27.5575.15 f^2 n^2}{r^4}$, Posito sinum anguli lineæ Apsidum cum linea quadraturarum esse m, Cosinum vero anguli esse n, sive quod eodem redit sinum distantiæ Apsidis à Syzygia esse n, ejus Cosinum esse m; Præterea inventum erat quod si linea Apsidum omnes possibiles positiones cum linea Syzygiarum assumat, tota tardatio quæ eo tempore fit est $\frac{AFq^9c}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$; Hinc si linea apsidum discedat à Syzygia arcu u, & fingatur retardationem esse proportionaliter tempori distributam, fiet ut tota Peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio facta dum Peripheria describitur quæ est $\frac{AFq^9c}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813. f^2}{r^2}$ ad tardationem mediam huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{AFq^9u}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$, sed cum Elementum tardationis (eodem Probl. 2°.) repertum sit $\frac{AFq^9du}{S.\,109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{136.0375 \times 15 f^2 m^2 - 27.5575 \times 15 f^2 n^2}{r^4}$. Integralis ejus sumatur per Lemma I. calculi præcedentis, loco m ponendo z & loco n ponendo y, & Integralis erit



$$\frac{AFq^9}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48u + \frac{136.0375 \times 15 f^2 \times APET - 27.5575 \times 15 f^2 AFQ}{r^3}$$

quæ quantitas si subtrahatur ex præcedenti, æquatio in data distantia u Apogæi à Sole in Antecedentia, vel Solis ab Apogæo in consequentia erit $\frac{AFq^9 f^2}{S \times 109.73\,Var^8} \times 813.6ru - 136.0375 \times 15\,APET + 27.5575 \times 15\,APQ$ est autem $APET = APQ + 2PQT$, est $ru = 2APT = 2APQ + 2PQT$, quibus valoribus substitutis, divisoque primo termino 813.6 per 15 æquatio evadit $\frac{15\,AFq^9 f^2}{109.73 \times S.V.ar^8} \times 108.48\,APQ + 108.48\,PQT - 136.0375\,APQ - 272.075\,PQT + 27.5575\,APQ$, & reductione facta fit $\frac{15\,A \times Fq^9 f^2}{109.73 \times S.V.ar^8} \times -163.595\,PQT$.

Hæc æquatio negativa est cum Apogæum

gæum Lunæ ex A in C à Syzygiâ ad quadraturam procedit, in Quadratura evanescit, nam PQT in Quadratura fit zero: Si Apsis ex C in syzygiam B pergat, fit APET=APQ—2PQT, est ru= 2APT= 2AQP—2PQT, quibus valoribus in æquatione substitutis quantitas — 163.595 PQT ex negativâ positiva fit, rursus fit negativa cum ex syzygiâ B ad quadraturam D Apogæum pergit, positiva iterum ex D in A; evanescit vero in omnibus punctis syzygiarum & quadraturarum.

Cor. 1. Ex Trigonometriâ notum est quod sinus arcus dupli alterius arcus est duplum facti sinus arcus simpli per ejus Cosinum divisum per Radium; ideoque constat quod sinus arcus dupli alterius arcus est semper ut factum arcus simpli per ipsius Cosinum; sed areæ QPT duplum, nempe area TQPE, est ipsum factum sinus QP arcus AP per ejus Cosinum TQ, ergo area QPT est ut sinus arcus dupli arcus AP, Æquatio autem inventa est ubique ut area illa PQT siquidem constat ex facto illius areæ per constantes ductæ; Ergo æquatio proposita est ubique ut sinus arcus dupli Distantiæ Apogæi Lunæ à Syzygiâ.

Cor. 2. Hinc etiam sequitur illam æquationem evanescere in syzygiis & Quadraturis, iis enim in punctis Luna distat à syzygiâ vel 90gr vel 180gr. vel 270 vel 360, quorum arcuum duplum est 180, 360, 540, 720, quorum arcuum sinus sunt zero.

Cor. 3. Hinc etiam sequitur hanc æquationem esse maximam in Octantibus tunc enim cum Apogæum distet à syzygia vel 45. gr. vel 135 vel 225 vel 315 quorum dupli sunt, 90 gr. 270, 450, 630 &c. & horum arcuum sinus fit Radius qui omnium sinuum maximus est sequitur æquationem istis sinibus proportionatam hic loci esse maximam.

Cor. 4. In Octantibus hæc area PQT est $\frac{1}{2}r^2$, ut notum est, hinc ista Æquatio evadit $\frac{40.449375 \times 15 AF q^9 f^2}{109.73 S. V \times a r^9}$, loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$ est $f^2 = 0030305 r^2$; est $\frac{q^9}{r^9} = .9864.$ tota quantitas fit

$$\frac{40.449375 \times 15 \times .00298928 r \times A M^2}{109.73. S. A^2} =$$

sed inventum est quod est $\frac{M^2}{SA} = .0685042$, & est $\frac{40.449375 \times 15}{109.73} = 5.52939$, hinc tota æquatio est $.00112974 56 r$, sed r est æqualis arcui 57 gr. 29. &c. hinc æquatio est graduum .063723125 &c. quod ductum per 60 efficit $3'.82338$, & .82338 ductum per 60, efficit $49''.4$, Ita ut tota æquatio sit $3'.49''$. &c.

121.

Cor. 5. Newtonus non tradit quantitatem hujus Æquationis qualem illam ex calculis invenit, sed ait ille, *Hæc æquatio quam semestrem vocabo in Octantibus Apogæi quando maxima est ascendit ad* $3'\,45''$ *circiter quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantia à Terra.* Scilicet in Hypothesibus nostris Apsidem & terram immotam assumpsimus, cum id revera non sit, ideoque, si concedatur nos attigisse verum Newtoni calculum, æquatio per calculum inventa non plane eadem erit cum vera, parum tamen admodum ab illa differet; cæterum omnes æquationis veræ Leges ex iis quæ per istum calculum obtinentur meritò deducentur, & eæ ipsæ sunt quæ in præcedentibus Coroll. sunt constitutæ, sed absoluta æquationis quantitas ex observatione non ex calculo est petenda, differunt autem calculus & rei veritas $3''$ duntaxat quod Theoriæ præstantiam sufficienter probat.

De Æquatione motus Lunaris semestri secunda quæ pendet ex positione lineæ Nodorum respectu lineæ Syzygiarum.

Ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ fit ut pars actionis Solis consumatur in ipso plano orbitæ Lunaris ad Planum Eclipticæ admovendo, sicque tota non occupetur, ut hactenus suppositum fuerat in distrahendo Lunam à terræ centro aut illam ad id attrahendo, aut alio modo Lunam in proprio ejus Plano accelerando aut retardando. Hinc æquationes prius inventæ novâ correctione indigent.

PRO-

DE MUNDI SYSTEMATE. 121.

PROBL. I.

Invenire partem actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, sublatâ eâ parte actionis Solis quæ consumitur in ipso plano orbitæ Lunaris dimovendo.

Sit A T B linea Syzygiarum in Eclipticæ plano; N T n linea nodorum; P locus Lunæ in propria orbita; P L, L M directiones virium in quas resolvitur vis Solis, quarum P L est parallela T M & L M Parallela radio T P.

Ducatur ex M in planum orbitæ Lunaris productum perpendicularis M m, ducatur in plano orbitæ Lunaris linea T m, & ex M & m ducantur perpendiculares M H, m H in lineam nodorum N n productam.

Radius T P dicatur r ut prius, Distantiæ Lunæ à Quadratura sinus P K dicatur y, Cosinus T K dicatur z; Distantiæ nodorum à Syzygia sinus N Q sit n, Cosinus T Q sit m; Denique sinus Inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam dicatur l, existente r radio, & ea inclinatio constans supponatur, quæ secundum Keplerum, De la Hirium &c. est ubi maxima, graduum 5. 19. 30.

Ex demonstratis est T M $= 3y$; & propter similitudinem Triangulorum N T Q, M T H, est N T (r) : M T $(3y)$ :: N Q (n) : M H $\left(\frac{3yn}{r}\right)$, & quia angulus M H m est angulus inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam, ut $r : l$ :: M H $\left(\frac{3yn}{r}\right)$: M m $= \frac{3ynl}{r^2}$; Denique ut est TM $(3y)$ ad M m $\left(\frac{3ynl}{r^2}\right)$ sic est r ad sinum anguli M T m qui erit ergo $\frac{nl}{r}$, cujusque Cosinus erit $\sqrt{r^2 - \frac{n^2l^2}{r^2}}$ sive $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$.

Jam autem tota vis T M est ad eam ejus partem quæ agit secundum planum orbitæ Lunaris ut radius ad Cosinum anguli M T m sive ut r ad $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$ & in eâdem proportione minuuntur partes in quas resolvitur ea vis, ergo cum portio totius vis T M secundum directionem radii exercita (si Planum orbitæ Lunaris & Eclipticæ idem fuissent) sit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r}$ ex superiùs demonstratis; Pars residua propter inclinationem Plani erit $\frac{F}{a} \times \overline{\frac{3yy}{r} - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}}$;

Vis autem L M quæ est $\frac{F}{a}\,r$ & negativè sumitur, nullam diminutionem patitur ex hâc plani inclinatione, quippe P T est in ipsâ orbitâ Lunari, ideoque ejus planum quomodocumque situm non dimovet; Hinc ergo pars actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, subla-

tâ eâ parte quæ consumitur in plano orbitæ dimovendo est $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$.

PROBL. II.

Dato sinu anguli quem faciunt lineæ Nodorum & Syzygiarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundùm directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, semotâ eâ ejus actionis parte quæ in dimovendo plano orbitæ Lunaris exercetur.

Elementum retardationis Lunæ (Probl. 1. calculi prioris) inventum erat $\frac{2Ydu}{V}$, loco Y ponatur ejus valor Probl. præcedente inventus $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$; si, quia jam actum est de retardatione per vim $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ productâ, adhibeatur solummodo quantitas $\frac{F}{a} \times -\frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$ (quæ cum negativa sit ex retardatione sit acceleratio) hinc, accelerationis ex hâc causâ pendentis Elementum est $\frac{2Fdu}{Va} \times \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$, cujus Integralis pro quadrante est $\frac{Fn^2l^2}{Var^5} \times \frac{3r^2c}{8}$ & quadruplicatum pro revolutione integrâ sit $\frac{3Fn^2l^2c}{2Var^3}$. Unde liquet quod cum linea nodorum est in ipsâ lineâ Syzygiarum quo casu n evanescit, tunc motus Lunæ est ipse ille qui præcedentibus Theoriis fuit inventus, quando vero linea nodorum est in lineâ syzygiarum tunc est $n = r$, & est acceleratio $\frac{2Fl^2c}{2Var}$ quæ tum maxima est.

PROBL. III.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari, & lineam Nodorum omnes possibiles positiones cum lineâ Syzygiarum successivè obtinere, Invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario situ nodorum Lunæ.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.

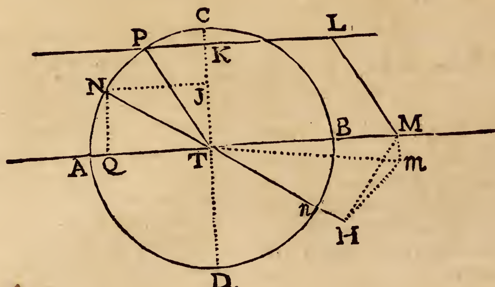
Primò ut inveniatur acceleratio mediocris quæ ex inclinatione plani Lunaris oritur, fingatur Solem immotum stare & lineam Nodorum ab eo recedere in Antecedentia (nodorum autem motum proprium hic omittere licet, cum in Probleмate præcedente omissus sit, sic enim utraque omissio sese compensant.)

Moveatur Nodus ex N per arcum du, acceleratio Lunæ quæ fiet dum describitur du erit ad accelerationem toto mense factam, ut tempus quo Nodus describit arcum du ad totum mensem, sed tempus quo nodus describit arcum du est $\frac{Adu}{c}$, nam ut tota Peripheria c ad arcum du ita annus sidereus A ad tempus quo arcus du describitur, quod erit ergo $\frac{Adu}{c}$, ergo ut mensis synodicus S, ad hoc tempus $\frac{Adu}{e}$, ita acceleratio uno mense factâ quæ inventa est $\frac{3Fl^2n^2c}{2Var^3}$ ad $\frac{3AFl^2n^2du}{2S.V.ar^3}$. Integretur pro quadrante & erit $\frac{3AFl^2r^2c}{2\times8S.Var^3}$ quadruplicetur pro totâ revolutione fiet $\frac{3AFl^2c}{4SVar}$, & hæc erit acceleratio motus medii Lunæ propter orbitæ inclinationem.

Hinc si linea nodorum discedat à lineâ syzygiarum arcu u, & fingatur totam accelerationem proportionaliter tempori distribui, fiat ut tota Peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio $\frac{3AFl^2c}{4S.Var}$, ad accelerationem huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{3AFl^2u}{4S.V.ar}$ sive $\frac{3AFl^2}{2S.Var^2} \times \frac{ru}{2}$. Sed Integralis elementi $\frac{3AFl^2n^2du}{2SVar^3}$ quando arcus NA est u, est $\frac{3AFl^2 \times ANQ}{2.S.V.ar^2}$ (ex Lem. I. calc. 1.) hæc ergo quantitas ex præcedenti substracta dat æquationem sive differentiam accelerationis mediæ & accelerationis veræ

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



veræ, quæ æquatio erit ergo $\frac{3AFl^2}{2SVar^2} \times \frac{ru}{2}$ $-$ ANQ sed $\frac{ru}{2}$ $-$ ANQ est Triangulum NQT, & est NQT$=\frac{nm}{2}=\frac{2nm}{4}$; Hinc æquatio proposita sive Excessus accelerationis mediæ super veram est $\frac{3AFl^2}{8S.Var} \times \frac{2nm}{r}$, quæ est quantitas quâ minuendus est motus medius Lunæ ut ejus locus verior habeatur.

Cor. Hinc cum quantitates $\frac{3AFl^2}{8S.Var}$ sint constantes, & $\frac{2nm}{r}$ sit sinus arcus dupli distantiæ nodi à syzygiâ, æquatio est ubique ut sinus arcus dupli distantiæ nodi à syzygiâ, ergo evanescit in syzygiis & Quadraturis; Maxima est in Octantibus, cumque sit illic $m=n=r\sqrt{\frac{1}{2}}$, est $\frac{2nm}{r}$ $=r$: loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2a}{A^2r}$, æquatio in Octantibus fit $\frac{3M^2l^2}{8S.A.r}$, sed cum Inclinatio sit 5 gr. $19\frac{1}{2}'$ cujus sinus l est $.0928r$, ideoque $\frac{l^2}{r}$ est $.00863r$, & $\frac{3l^2}{8r}=.00325$, cum vero $\frac{M^2}{S.A}$ (per Prob. V. calc. præc.) fit. 0685, hinc æquatio evadit in Octantibus $.000221r$; Denique est $r=57^{gr}.29$, quod ad secundas reductum efficit $206264''$, & ductum per $.000223$ efficit $45''.6$, quam Newtonus $47''$ per Theoriam gravitatis se invenisse profitetur.

DE MOTU APSIDUM.

Newtonus Sectione XI. Lib. I. Princ. ingeniosissimam excogitavit rationem motum Apsidum ad calculum revocandi, fingendo nempe vim externam Solis posse conferri cum vi quæ ex revolutione plani ipsius orbitæ Lunaris oriretur, sicque inveniri curvam per motum corporis in Ellipsi mobili genitam quæ eadem foret cum eâ quæ per vis extraneæ adjunctionem nasceretur; Eidem Methodo mox insistemus & ex eâ Leges motûs Apsidum derivantur accuratissimè quales illas Newtonus statuit; sed fatendum ipsam absolutam ejus motus quantitatem dimidio circiter minorem inveniri illâ quæ per observationes innotescit; Itaque aliam indicare Methodum rem eamdem æstimandi priori illâ non omissâ, inopportunum visum non est.

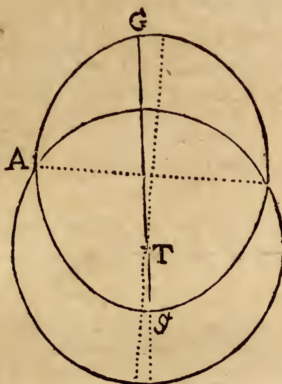
PROBL. I.

Sol supponatur immotus; Linea Apsidum qualemcumque Angulum cum lineâ quadraturarum efficiat, ejusque anguli sinus sit y;

Invenire motum Apogæi dum Luna ab Apogæo ad Apogæum redit.

Sit GAg Ellipsis quam Luna circa Terram T describit; sit G Apogæum, g Perigæum; dicatur r semi-axis major; T distantia Apogæa; $T-2f$ distantia Perigæa. Centro T describatur circulus radio r, eum circulum Luna describeret eodem tempore quo Ellipsim suam describit, & Vis Centralis Terræ in Lunam in eodem circulo revolventem foret $\frac{du^2}{2r}$ ex notâ circuli proprietate.

121.



Portiones du ejus circuli ubique æquales intelligantur, & sumantur in Ellipsi arcus terminati per lineas e centro T per utrumque extremum arcus illius du ductas; liquet, quod dum arcus illi Elliptici describentur, lineolæ per quas Luna ex Tangente ad Ellipsin reducetur erunt effectus vis centralis Terræ & vis Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris conjunctis vel oppositis actionibus Lunam trahentium.

Lineolæ autem propter vim centralem terræ descriptæ erunt ubique, primò in ratione ipsius vis centralis, sive inversè ut quadrata distantiarum à centro, ideoque in distantia X erunt $\frac{r^2du^2}{2rX^2}$; & secundò ut quadrata temporum sive ut quadrata arearum Ellipseos quæ respondent arcubus æqualibus du; illæ vero areæ cum sint inter se similes (ob æquales angulos in T arcubus æqualibus du mensuratos) erunt ut X^2, ideoque tempora erunt ut X^2 eorumque quadrata ut X^4; Ideoque vis centralis Terræ effectus dum describitur area quæ respondet arcui du erit ubique $\frac{r^2du^2}{2rX^2}\times\frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^2du^2}{2r^3}$. In Apogæo erit $\frac{T^2du^2}{2r^3}$, in Perigæo $\frac{T^2du^2}{2r^3}-\frac{4Tfdu^2}{2r^3}$ &c.

Vis Solis in Lunam agens secundum directionem radii orbitæ Lunaris dicatur Y in mediocri distantiâ, & quia crescit ut distantiæ, in distantiâ X fit $\frac{X}{r}$ Y, ejus verò effectus crescit ut quadrata temporum, ideoque per ea quæ dicta sunt, effectus ejus vis dum describitur area quæ respondet arcui du est $\frac{X}{r}\times Y\times\frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^5}{r^5}$ Y, in Apogæo erit $\frac{T^5}{r^5}$ Y, in Perigæo $\frac{T^5}{r^5}$ Y $-\frac{10T^4f}{r^5}$ Y &c.

Sit, ut prius, F vis Solis in Terram in ejus mediocri distantiâ à Terra a, inventum est vim Y esse $\frac{F}{a}\times\frac{3yy}{r}-r$, & vim Lunæ in mediocri distantia esse ad vim Solis F ut A^2r ad M^2a (A ut prius est annus sidereus, M mensis Periodicus, sed sepositâ Solis actione) cum ergo effectus vis Terræ in Lunam in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{rdu}{2}$ sit $\frac{du^2}{2r}$, si fiat ut A^2r ad M^2a ita $\frac{du^2}{2r}$ ad quartum qui erit $\frac{M^2a}{A^2r}\times\frac{du^2}{2r}$, is terminus erit effectus vis Solis quæ per F exprimitur, sicque effectus vis Y in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{rdu}{2}$ erit $\frac{M^2}{A^2r}\times\frac{du^2}{2r}\times\frac{3yy}{r}-r$, & in qualicumque distantiâ X erit $\frac{X^5}{r^5}\times\frac{M^2}{A^2r}\times\frac{du^2}{2r}\times\frac{3yy}{r}-r$.

Hinc fluxio secunda orbitæ Lunaris, hoc est, lineola ad Terram directa, intercepta inter Tangentem & curvam Luna-

De Mundi Systemate.

121.

narem quæ est differentia (vel summa) effectuum vis Centralis Terræ & vis Solis in Lunam dum arcus respondens arcui du percurritur erit ubique $\frac{du^2}{2r} \times \frac{X^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{X^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$.

Hæc fluxio in Apogæo erit $\frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$; In Perigæo vero erit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$; Ubi notandum quod si Sol immotus fingatur, (ut in hyp. Problem. assumitur) & si Perigæum esset è Diametro oppositum Apogæo tunc quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ eadem absolutè foret tam in Apogæo quam in Perigæo.

Si conciperetur quod effectu virium existente in Apogæo $\frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$ vera Ellipsis describeretur, hic effectus virium in Apogæo deberet esse ad earum effectum in Perigæo, primo inversè ut quadrata distantiarum, secundo directè ut quadrata temporum sive ut quartæ dignitates distantiarum, unde illi effectus erunt ut quadrata distantiarum directe hoc est ut T^2 ad $T^2 - 4Tf$, dividatur ergo effectus virium in Apogæo per T^2 & ducatur in $T^2 - 4Tf$ effectus virium in Perigæo esse deberet $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$: Sed in Perigæo ut & in Apogæo ex naturâ Apsidum evanescit fluxio distantiæ X utpote maximæ vel minimæ, ejus autem fluxionis fluxio est is ipse effectus Virium Terræ & Solis, ideo fluens hujus effectus virium reverâ evanesceret, itaque ex ipsis hypothesibus oportebit ut $\int \frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r} = 0$; Sed in Perigæo, spectatâ actione Terræ & Solis, fluxio secunda reperta erat $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$. Itaque excedit eam quantitatem cujus fluens evadit zero quantitate $\frac{du^2}{2r} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{6T^4 f}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$.

Punctum itaque Perigæi non erit in puncto è Diametro opposito Apogæo, sed arcu quodam differet, quem obtinemus quærendo quonam in loco orbitæ Lunaris fluens fluxionis secundæ ejus curvæ evanescat. Observandum autem, quod distantiæ Lunæ à Terrâ, circa puncta Apogæi vel Perigæi non multum mutantur, ideoque si Perigæum arcu p transferatur non magna mutatio exinde orietur in effectu vis centralis terræ, sed sinus y qui occurrit in valore vis Solis evadet, $y + \frac{zp}{r}$ (sumpto z pro cosinu arcus cujus sinus est y, est enim $dy = \frac{z\,du}{r}$ per naturam circuli, cùm hic verò agatur de arcu p non magno, potest poni p loco du, & differentia sinuum pro dy) fiet itaque fluxio secunda orbitæ Lunaris in loco in quo Perigæum esse debebit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy + \frac{6yzp}{r} + \frac{3z^2p^2}{r^2}}{r} - r}$; cujus pars $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$, Fluentem habet æqualem zero; Fluens autem excessus $\frac{du^2}{2r} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times - \frac{T^5}{r^5} \times \frac{6yzp}{r^2} + \frac{6T^4 f}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$ fiat æqualis zero (omissis terminis in quibus f aut p ad duas dimensiones assurgunt) & habebitur valor p, quâtenus designat arcum quo processit Perigæum, siquidem tota fluens fluxionis secundæ orbitæ Lunaris in eo puncto fiet zero.

Hinc itaque divisis terminis per quantitatem communem $\frac{6M^2T^4du}{2Ar^8}$ habetur

hæc

hæc Æquatio $T\, p \times \int \frac{yzdu}{r} = f \times \int \overline{3yydu - rrdu}$, five quia $ydu = -rdz$ fit $Tp \times \int -zdz = f \times \int -3rydz - r^2 du$. Eſt autem $\int -zdz = \frac{1}{2} rr - \frac{1}{2} zz$ & $\int -ydz$ ſegmentum circulare cujus ordinata eſt y, ſive ſector circularis $\frac{1}{2} ru$, dempto vel aſſumpto Triangulo cujus area eſt $\frac{1}{2} yz$; Hinc æquatio evadit $\frac{1}{2} Tp \times rr - zz = f \times \frac{3}{2} r^2 u - \frac{1}{2} ryz - r^2 u$, ſive $Tp \times yy = f \times r^2 u - 3ryz$, unde tandem habetur $p = \frac{rf}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Atque cum hic ſit motus Perigæi quo tempore Luna fertur ab Apogæo ad Perigæum erit motus Apſidis durante unâ revolutione Lunæ ab Apogæo ad Apogæum $\frac{2fr}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Cor. 1. Hinc motus Apſidum nullus eſt cum $ru - 3yz = 0$; in Quadraturis verò fit negativus regrediuntur itaque Apſides; maximus autem eſt in ſyzygiis & poſitivus, tunc enim evaneſcit quantitas negativa $3yz$, fit $u = \frac{1}{4} c$, & $y = r$, unde ille motus fit $\frac{fc}{2T}$ durante unâ revolutione Lunæ.

Cor. 2. Si hunc calculum accuratius inſtituere liceret, attendi poſſet ad motum Solis dum Luna ab Apogæo ad Perigæum movetur, promovetur enim interim Sol 13 circiter gradibus, itaque etſi Luna veram deſcriberet Ellipſim, Perigæum non faceret cum quadratura eumdem angulum quem faciebat Apogæum, ſed 13 gradibus minus diſtaret in conſequentia. Sed inſtituto calculo invenimus parum admodum exinde mutari motum Perigæi in propriâ orbitâ, ita ut ad inſtitutum noſtrum ſufficiat illum aſſumere qualis per Problema repertus eſt.

PROBL. II.

Invenire quantitatem motus Apſidum ſingulo anno.

Sit Apogæum in quadraturâ, & Sole procedente Apogæum inde verſus Syzygiam recedat.

Dicatur α tempus quo Sol revolutionem reſpectu Apogæi Lunæ abſolvit, dicatur π tempus quo Luna ab Apogæo ad Apogæum redit, ſit c tota Peripheria quam Sol Apogæi reſpectu deſcribit, & du arcus ejus exiguus quo Apogæum à quadraturâ receſſiſſe cenſebitur propter Solis motum, tempus quo hunc arcum deſcripſerit erit $\frac{\alpha du}{c}$, & cum tempore π, Apogæum moveatur quantitate $\frac{2fr}{T.yy} \times ru - 3yz$ tempore $\frac{\alpha du}{c}$ procedet quantitate $\frac{2\alpha fr}{\pi.Tc} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3yzdu}{y^2}$, erit autem u arcus qui metitur diſtantiam Apogæi à quadraturâ, y ejus ſinus, & z ejus Coſinus, & $du = \frac{rdy}{z}$ hinc quantitas $\frac{2afr}{\pi.T.c} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3zydu}{y^2}$, fit $\frac{2\alpha fr}{\pi.T.c} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3rdy}{y}$. Ut habeatur fluens quantitatis $\frac{rudu}{y^2}$, ponatur loco u ejus valor $y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8} + \frac{63y^{11}}{2816r^{10}}$ &c. fiet $\frac{rudu}{yy} = \frac{rdu}{y} + \frac{ydu}{6r} + \frac{3y^3du}{40r^3} + \frac{5y^5du}{112r^6} +$ &c. & dividendo rdu per valorem y, qui eſt $u - \frac{u^3}{6rr} + \frac{u^5}{120r^4} - \frac{u^7}{5040r^6}$ eſt $\frac{rdu}{y} = \frac{rdu}{u} + \frac{udu}{6r} + \frac{7u^3du}{360r^3} + \frac{31u^5du}{15120r^5}$; & loco ydu in ſequentibus terminis ponendo $-rdz$ & loco y^2 ejuſque dignitatum ponendo $r^2 - z^2$ ejuſque dignitates, fit $\frac{rudu}{yy} = \frac{rdu}{u} + \frac{udu}{6r} + \frac{7u^3du}{360r^3}$ &c. $- \frac{rdz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{\overline{rr-zz} \times -rdz}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\overline{rr-zz}^2 \times -rdz}{r^6} + \frac{35}{1152}, \frac{\overline{rr-zz}^3 \times -rdz}{r^8} + \frac{63}{2816} \times \frac{\overline{rr-zz}^4 \times -rdz}{r^{10}}$ &c. Cujus quantitatis

De Mundi Systemate.

fluens eſt $r\,\mathrm{L}.\,u + \frac{u^2}{12r} + \frac{7u^4}{1440r^3}$ &c. $+$

121. $\frac{rr-rz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{\frac{2}{3}r^4 - r^3z + \frac{1}{3}rz^3}{r^3} + \frac{5}{112}$

$\times \frac{\frac{8}{15}r^6 - r^5z + \frac{2}{3}r^3z^3 - \frac{1}{5}rz^5}{r^5} + \frac{35}{1152} \times$

$\frac{\frac{16}{35}r^8 - r^7z + r^5z^3 - \frac{3}{5}r^3z^5 + \frac{1}{7}rz^7}{r^7} + \frac{63}{1816} \times$

$\frac{\frac{128}{315}r^{10} - r^9z + \frac{4}{3}r^7z^3 - \frac{6}{5}r^5z^5 + \frac{4}{7}r^3z^7 - \frac{1}{9}rz^9}{r^9}$

cui fluenti ſi adjungatur fluens quantitatis $-\frac{3rdy}{y}$ quæ eſt $-3r\,\mathrm{L}.\,y$ & omne ducatur per $\frac{2afr}{\pi Tc}$ habetur motus Apogæi dum propter Solis motum Apſis receſſit à quadraturâ arcu u.

Si ergo u ſit quadrans, y erit r, & z fiet zero unde hæc expreſſio evadet $\frac{2\alpha fr}{\pi Tc}$

$\times r\,\mathrm{L}.\,\frac{1}{4}c + \frac{\frac{1}{16}c^2}{12r} + \frac{\frac{7}{256}c^4}{1440r^3}$ &c. $+$

$\frac{r}{6} + \frac{3}{40} \times \frac{2}{3}r + \frac{5}{112} \times \frac{8}{15}r + \frac{35}{1152} \times \frac{16}{35}r$

$+$ &c. $- 3r\,\mathrm{L}.\,r = \frac{2\alpha fr^2}{\pi.Tc} \times \mathrm{L}.\,\frac{\frac{1}{4}c}{r^4} + \frac{c^2}{192r^2}$

$+ \frac{7c^4}{368640r^4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9}$

$+ \frac{1}{10 \times 11}$ &c. harum fractionum $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5}$ &c. ſumma variis modis haberi poteſt, & quidem liquet oriri iſtos terminos ex terminis ſeriei quæ exceſſum quadrantis ſupra radium exprimit cum radius eſt Unitas, cujus ſeriei quinque priores termini efficiunt .33905, reſidui .23174; hinc cum quinque primi termini hic aſſumpti evadant propter fractiones per quas ducuntur .26343, & ſequentes per fractiones minores quam $\frac{1}{5}$ ducantur, ii omnes ſequentes ſimul ſumpti non efficient $\frac{.23174}{3}$ ſive .07724, id itaque addatur ad .26343, erit .34067 numerus major quæſito, & .26343 numerus quæſito minor, aſſumatur medium .30205 quantitas propoſita evadit $\frac{2\alpha f}{\pi Tc} \times \mathrm{L}\,\frac{1}{4}c + \frac{c^2}{192} + .30205.$

Si verò dicatur g exceſſus quadrantis ſuper Radium, per naturam Logarithmorum fiet $\mathrm{L}.\,\frac{1}{4}c = g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \frac{1}{4}g^4$ $+$ &c. $= .57079 - .16290 + .06196 - .02652 + .01211 - .00576 = .4496$, unde expreſſio inventa fit $\frac{2\alpha f}{\pi Tc} \times .4496r^2 + \frac{c^2}{192} + .30205r^2 = \frac{2\alpha f}{\varpi T} \times .75165r^2 + \frac{c}{192} = \frac{\alpha f}{\varpi T} \times \frac{1.5033r^2}{c} + \frac{c}{96}$, ſive quia eſt $\frac{c}{96} = 3^{gr}.75$, & $\frac{r^2}{c} = \frac{r}{6.28,188} = 9^{gr}.1189$ & $\frac{1.5r^2}{c} = 13^{gr}.6783$, habetur motus Apogæi durante quadrante $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 17^{gr}.4283$ & durante totâ revo- $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 69^{gr}.7132$, ſed ut totum tempus α qualecumque ſit, ad tempus annuum A, ita motus $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 69^{gr}.7132$ ad motum annuo tempore factum qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{A}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$; Præterea ſit P menſis Periodicus Lunæ fiatque ut A ad P ita $\frac{f}{T} \times \frac{A}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$ ad motum Apſidum tempore Periodico Lunæ, qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{P}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$, & ut P ad ϖ ita $\frac{f}{T} \times \frac{P}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$, ad motum Apſidum menſe Anomaliſtico ϖ qui erit $\frac{f}{T} 69^{gr}.7132$, & ut 360 ad $360 + \frac{f}{T} \times 69^{gr}.7132$ ita P ad menſem Anomaliſticum ϖ qui ergo erit $\mathrm{P} \times 1 + \frac{f}{T} \times \frac{69^{gr}.7132}{360}$; Ideoque motus annuus Apogæi erit

$\frac{f}{T} \times \frac{\mathrm{A} \times 69.7132}{\mathrm{P} \times 1 + \frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360}}$, ſed annus Tro-

picus

picus eſt $13\frac{1}{3}$ P proxime, hinc motus Apogæi fit $\frac{f}{T} \times \frac{13\frac{1}{3} \times 69.7132}{1 + \frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360}}$.

Excentricitas f orbitæ Lunaris eſt quidem variabilis, de ejus legibus poſthac; Excentricitatis valorem mediocrem aſſumit Newtonus .05505 ſi Radius ſit 1, Ill. Caſſinus eam paulo minorem facit nempe 05430; ex Legibus autem variationis excentricitatis patebit quod loco f ſcribi debet .05147 & loco T, 1.05147 unde motus Apſidum fiet

$$\frac{.04895 \times 13\frac{1}{3} \times 69^{gr}.7132}{1 + \frac{.04895 \times 69.7132}{360}} = \frac{45^{gr}.4997}{1.0126} = 44.9$$

circiter; qui quidem motus invenitur per obſervationes 40^{gr}.

DE MOTU APSIDUM

Secundum Newtoni methodum.

Hic revocanda ſunt ea quæ in Sectione IX. Lib. I. dicta ſunt de motu corporum in orbibus mobilibus.

LEMMA I. Prop. XLIV. Lib. I.

Concipiatur planum Orbitæ alicujus uniformiter revolvi, dum corpus quoddam ipſam orbitam propter vim centralem aliquam percurrit, id corpus in ſingulo puncto duplici vi centrali urgebitur, propriâ nempe quâ urgetur in centrum virium, & eâ quæ ex revolutione Plani orbitæ pendet, Hæc ubique erit inverse in triplicatâ ratione diſtantiæ à Centro.

Demonſtrationem vide Propoſitione ſuprà indicatâ.

LEMMA II.

Si vis Solis in Lunam agens, ſit quantitas quæ in mediocri diſtantiâ ſit conſtans, dicaturque Y, creſcat vero ut diſtantia à Terrâ, vis Terræ in diſtantiâ mediocri ſit V, Dico quod (ponendo orbitam Lunarem circulo ſatis finitimam eſſe) motus Lunæ concipi poteſt quaſi fieret in Ellipſi ſimili illi quam reverâ deſcribit, ſed cujus Planum foret mobile, ita ut integrâ revolutione Apſis ejus orbitæ promoveretur quantitate $360^{gr}. \times \sqrt{\frac{r^3 V - T^3 Y}{r^3 V - 4T^3 Y}}$; Demonſtratio eſt in exemplis tertiis ad Propoſitionem XLV, ſed eam demonſtrationem hic breviter trademus. 121.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI.

Sit G Lunæ Apogæum, GK arcus quam minimus quem Luna in propriâ orbitâ dato exiguo tempore deſcriberet, transferatur vero Luna cum ſuo Plano ita ut ejus Apſis transferatur in γ dum Luna ex G in K moveri debuiſſet; motus Lunæ in G ex duobus compoſitus cenſeatur, nempe ex motu ſecundum Tangentem per velocitatem acquiſitam, & ex motu per vim centralem genito quævis ſimul ac ſemel in puncto G agere cenſeatur, hic motus per GR repræſentetur, motus ſecundum Tangentem per RK, fiat vero RK ad Rm, ut angulus GTK ad GTK + GTγ, & ſi nulla vis centralis ex revolutione plani oriretur, Luna foret in m cum debuiſſet eſſe in K, ſed quia Tm eſt longior quam TK ſumatur Tn = TK & reverâ Luna erit in n, & erit mn effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ dum Luna deſcripſiſſet arcum GK.

De Mundi Systemate.

121.

Radio TK centro T describatur circulus quem mT producta secet in t & mK producta secet in S, erit $mn \times mt = mK \times mS$ per Cor. Prop. XXXV. III. Elem. Eucl. ideoque erit $mn = \frac{mK \times mS}{mt}$ & si fingatur hunc circulum quam proxime coincidere cum Arcu orbitæ Lunaris GK, eodemque tempore describi quo arcus describeretur, erit GR effectus vis centralis Terræ dum Luna descripsisset arcum GK, & per notam proprietatem circuli hic arcus foret $\frac{RK^2}{2GT}$.

Ergo cum effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ, & effectus vis centralis terræ eodem tempore producti sint mn & GR, vires illæ erunt uti mn & GR, sive ut quantitates ipsis æquales $\frac{mK \times mS}{mt}$ & $\frac{RK^2}{2GT}$ sed cum mt sit quamproxime 2GT, sitque $mS = mR + RK$, & $mK = mR - RK$, istæ vires sunt ut $mR^2 - RK^2$ ad RK^2, si itaque dicatur T distantia maxima Lunæ, T—X alia distantia quævis, r mediocris distantia, V vis terræ in eâ mediocri distantiâ, erit $\frac{r^2}{T^2}$ V vis centralis terræ in distantia T, ideoque, cum sit RK^2 ad $mR^2 - RK^2$ ut vis gravitatis ad vim ex revolutione plani genitam hæc erit, $\frac{r^2V \times mR^2 - r^2V \times RK^2}{T^2 \times RK^2}$.

In puncto K aut alio quocumque ubi TK est T—X, vis gravitatis est $\frac{r^2}{\overline{T-X}^2}V$, & quoniam vires ex revolutione Plani genitæ sunt inverse in triplicatâ ratione distantiarum, vis plani est $\frac{Tr^2V \times mR^2 - Tr^2V \times RK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ quæ si addatur vi gravitatis fit $\frac{Tr^2VRK^2\ Xr^2VRK^2 + Tr^2VmR^2 - Tr^2VRK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$

Sed cum in eo puncto vis gravitatis sit $\frac{r^2}{\overline{T-X}^2}$ V, & vis substractitia Solis sit ut distantiæ, ideoque sit $\frac{T-X}{r}$ Y, si reducantur ad communem denominatorem $\overline{T-X}^3$ fient $\frac{Tr^2V - Xr^2V - \frac{T^4Y}{r} + \frac{4T^3XY}{r}}{\overline{T-X}^3}$

Ut autem æquipolleat Plani revolutio cum substractione vis Solis, ita determinandæ sunt quantitates RK^2 & mR^2, ut expressiones harum virium sint ubique æquales, & 1°. quidem cum X sit zero, vis gravitatis cum vi Plani est $\frac{Tr^2V \times mR^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ & vis gravitatis substractâ vi Solis remanet $\frac{Tr^2V - \frac{T^4Y}{r}}{\overline{T-X}^3}$. Oportet ergo ut sit

$mR^2 =$

$mR^2 = \frac{\overline{RK^2}}{r^2V} \times r^2V - \frac{T^3Y}{r}$. Termini vero reliqui in quibus est X sunt $-\frac{Xr^2VRK^2}{\overline{T.X}^3 \times RK^2}$ & $-\frac{Xr^2V + 4T^3X\frac{Y}{r}}{T-Y^3}$. Oportet ergo ut sit $RK^2 = \frac{\overline{RK}^2}{r^2V} \times r^2V - 4T^3\frac{Y}{r}$.

Itaque ut vis revolutionis plani vi gravitatis permixta, idem efficiet ac vis substractitia Solis, oportet ut sit mR^2 ad RK^2 ut $r^2V - \frac{T^3Y}{r}$ ad $r^2V - \frac{4T^3Y}{r}$, sive ut sit mR ad RK ut $\sqrt{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2V - 4\frac{T^3Y}{r}}$ unde cùm sit mR ut motus Lunæ & Apogæi conjunctim & RK ut motus Lunæ, si Luna descripserit 360gr. fiet ut $\sqrt{r^2V - 4\frac{T^3Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}$ ita 360gr. ad Lunæ & Apogæi motum conjunctim, qui erit ergo

$$360 \times \sqrt{\frac{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}} = 360\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3Y}},$$

itaque si ex hoc valore tollantur $360^{gr.}$ Residuum erit motus Apogæi integrâ revolutione Lunæ. Q. E. O.

THEOR. I.

Invenire motum Apogæi Lunaris, supponendo orbitam Lunarem esse circulo finitimam.

Describat Luna arcum du, & eo durante vis Y constans maneat, & spectatur du quasi portio Ellipseos descriptæ, si vis Y durante totâ revolutione crevisset sicut distantiæ; Motus Apsidis durante totâ revolutione C, foret (per Lemma 2.) $c\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3r}} - c$, ideoque durante tempore quo arcus du percurritur foret $du\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3Y}} - du$, sit $r = T$, & sumatur valor quantitatis $\sqrt{\frac{V-Y}{V-4Y}}$ is erit $1 + \frac{3Y}{2Y}$, hinc itaque elementum motus Apsidum est $\frac{3r}{2V}du$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. fit $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3yydu}{r} - rdu$, cujus Integralis pro quadrante est $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3r^2c}{8r} - \frac{rc}{4}$ & pro circulo $\frac{3F}{2Va} \times \frac{rc}{2}$ & cum $\frac{F}{V}$ sit $\frac{MM}{rAA}$ evadit, $\frac{3MM}{4AA}c$ sive cum $\frac{MM}{AA}$ sit fere .0055 est motus Apsidum $.0041c = 1^d.476$ sive $1^d28'.33''$, & quia is absolvitur mense Synodico, ut habeatur motus Apogæi annuus, fiat ut .0808 ad 1, ita $1^d.476$ ad $18^{gr}.267$. sive $18^{gr}.16'$. quod est circiter dimidium veri motus Apsidis ut observat Newtonus.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.

THEOR. II.

Invenire Leges motus Apogæi Lunæ supponendo Orbitam Lunarem esse Ellipticam.

Distantia Lunæ Apogæa dicatur A, Perigæa dicatur P, sinus anguli Apogæi & lineæ quadraturarum sit y, vis Solis in Apogæo agens erit per demonstrata $A \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & vis Solis agens in Perigæo, erit $P \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & y in utroque casu est eadem quantitas, dicatur itaque C hæc quantitas $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$; siquidem est constans; Vis Solis substractitia aut addititia in Apogæo ac Perigæo erit AC vel PC; hoc est, erit ut quantitas constans C, ducta in distantiam A vel P; si itaque fingatur in punctis intermediis, eam vim esse etiam eandem constantem C, per distantiam ductam, aut saltem variationem quantitatis C compensari tunc per Cor 2. Prop. XLV., & Exempla tertia ejusdem, erit motus Lunæ ab Apside ad Apsidem $360 \times \sqrt{\frac{V-C}{V-4C}}$, si V sit

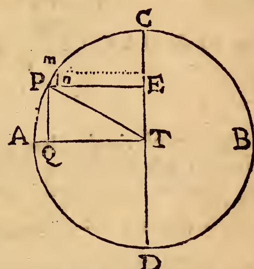
DE MUNDI SYSTEMATE.

fit ut vis gravitatis terræ in data diſtantia, eſt vero $360 \sqrt{\frac{V-C}{V-4C}} = 360 \times 1 + \frac{3C}{2V}$,

121. ideoque motus Apſidis erit $360 \times \frac{3C}{2V}$ tota revolutione Synodico-Anomaliſticâ quam pro ſynodicâ ſumimus.

Loco C litteram Y quæ in toto calculo deſignabat quantitatem $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ reſumamus, & fingatur talem eſſe Apogæi motum ut ubique ſit proportionalis motui $360 \times \frac{3Y}{2V}$ durante menſe Synodico quod quidem ex prædictis conſequitur, fingaturque Solem immotum ſtare & Apogæum ejus reſpectu in Antecedentia regredi, totamque revolutionem reſpectu Solis tempore α abſolvere, ſit ergo c tota peripheria, Apſis percurret reſpectu Solis arcum du tempore $\frac{\alpha du}{c}$; Ideo tempore ſynodico S percurret $360^{gr.} \times \frac{3Y}{2V}$ motuo ſuo, tempore $\frac{\alpha du}{c}$ percurret $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3Ydu}{2V}$, ſed quia eſt $\frac{Y}{V} = \frac{F}{Va} \times \frac{3yv}{r} - r$ & $\frac{F}{V} = \frac{MMa}{AAr}$, elementum motus Apogæi eſt $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3yydu - r^2du$, cujus integralis eſt (ſi fingatur Apogæum à quadraturâ ad ſyzygiam in antecedentia retrocedere) $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3. rf. ydz - r^2u$ eſt autem autem $f. ydz = CPE$, hinc ſumendo $\frac{\alpha M}{SA}$ pro unitate, eſt $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$ & pro quadrante $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{8}$ & pro circulo $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{2}$ prope ut in præcedenti Theoremate.

Hinc ſi ſumatur motus Apogæi proportionalis tempori, dum Apogæum diſcedet à Sole arcu u, ejus motus eſſe debuiſſet $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{ru}{2}$ cùm revera inventus ſit $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$, hinc æquatio eſt $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{3ru}{2} - 3CPE$, ſed $3CPE = \frac{3ru}{2} \mp \frac{3yz}{2}$ per



conſtr. hinc Æquatio ſit $\frac{3M}{2Ar} \times \pm \frac{3yz}{2}$, ſed $\frac{2yz}{r}$ eſt ſinus arcus dupli diſtantiæ à Sole, hinc itaque hæc æquatio eſt ut ſinus arcus dupli diſtantiæ Apogæi à Sole, unde Lex æquationis habetur, quod ſit maxima in Octantibus, nulla in Syzygiis & quadraturis, poſitiva à quadraturis ad Syzygias negativa inde, ſed ejus quantitas, non per hunc calculum, ſed per obſervationes eſt determinanda; Siquidem, ut obſervatum eſt, Hypotheſes adhibitæ ut ut à motu Apſidum non diſſimiles, attamen ipſius quantitatem dimidio fere minorem exhibent. De his in Notis ſubſequentibus plura.

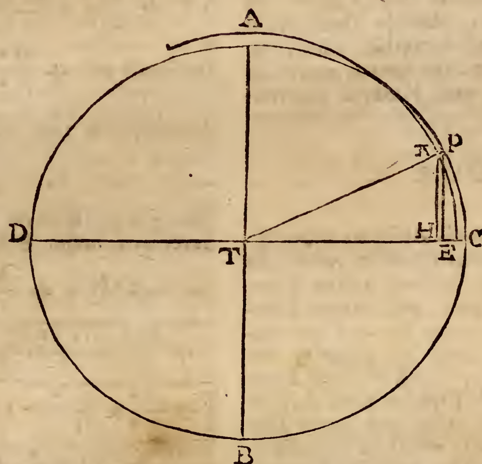
DE EXCENTRICITATE ORBITÆ LUNARIS.

Ipſa Curva quam Luna deſcribit poſſet determinari per calculum adhibita ejus curvæ fluxione ſecunda, quæ obtinetur ſubtrahendo vim Solarem à vi terræ; Audivimus autem Viros in Matheſi Primarios hoc Problema, quod certe non eſt exiguæ difficultatis, ſuum feciſſe; Cum autem nobis videatur Newtonum non aliter hanc curvam inveſtigaſſe quam per approximationes quaſdam, eadem Methodo, tenui noſtro modulo magis accommodata, idem perſequi conabimur.

I. Propoſitione XXVIII. hujus Libri quæ-

quæsivit Newtonus qualis foret orbita Lunaris ex suppositione illam citra actionem Solis circularem esse, & invenit quod si assumatur eam orbitam fieri Ellipsim per Solis actionem ea Ellipsis terram in centro haberet & ejus axis minor foret ad majorem qui secundùm lineam quadraturarum jaceret, ut 69 ad 70.

Hinc deducitur quod si semi-axis major 70 dicatur $r+p$, semi-axis minor 69 sit $r-p$, distantia Lunæ à terra in loco quovis dicatur $r+x$, sit y sinus distantiæ Lunæ à quadratura proxima, z ejus distantiæ Cosinus erit ubivis $x = p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$. 121.



Nam sit $T\Pi = r$, $TP = r+x$, $\Pi H = y$, $TH = z$; propter Triangula similia TPE, $T\Pi H$ est $PE = \frac{r+x}{r} \times y$ & $TE = \frac{r+x}{r} \times z$, unde per naturam Ellipseos est $\frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} \times \overline{r+p}^2 - \frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} \times \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2$; Unde est $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} \times \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2$, sed divisione factâ, omissisque terminis superfluis, est $\frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} = 1 - \frac{4p}{r}$, hinc fit $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 - \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times \frac{4pz^2}{r}$ & quia $y^2 + z^2 = r^2$, & formatis dignitatibus omissisque terminis in quibus p, vel x, ad secundam dimensionem assurgunt habetur $r^2 - 2rp = r^2 + 2rx - \frac{4pz^2}{r} =$ sive loco z^2 scripto $r^2 - y^2$; deletis terminis æqualibus & transpositione factâ & divisione per 2, habetur $rx = \frac{2pr^2}{r} - \frac{2py^2}{r} - rp$ ideoque $x = p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$.

Ex quo sequitur quod in Octantibus x evanescit, illic enim $\frac{2y^2}{r^2} = 1$.

II. Ponatur vero Orbitam Lunarem

De Mundi Systemate.

Ellipticam citra Solis actionem ejusque semi-axem majorem esse Y, excentricitatem dici f, accedere autem vim Solis, sed eam tantùm partem ejus actionis con-
121. siderari quæ secundum orbitæ radium agit, omissâ illâ parte ejus actionis Solaris quæ radio est perpendicularis, in hâc Hypothesi deprehendetur hujus orbitæ figuram variari, & magis oblongam evadere dum Apsides sunt in Syzygiis quam dum sunt in quadraturis, Excentricitatem pariter variabilem esse maximam dum Apsides sunt in Syzygiis, mediocrem cum Apsides sunt in Octantibus, cum sunt in Quadraturis minimam, & ex hâc hypothesi cum priori conjunctâ ejus excentricitatis variabilis Leges & quantitas rudi Minervâ determinari potest.

THEOR. I.

Positis Sole & lineâ Apsidum immotis, item omissâ eâ actionis Solaris parte quæ perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris agit; Dico quod si describatur Ellipsis, cujus Terra sit focus & cujus axis major sit linea inter Lunæ Apogæum & Perigæum interjacens, Orbita Lunaris erit contenta intra eam Ellipsim cum Apsides erunt in Syzygiis, erit vero extra eam Ellipsim cum Apsides erunt in Quadraturis, cum vero Apsides erunt in Octantibus orbita Lunaris cum eâ Ellipsi coincidet.

Resumptis iis quæ in Theor. VII. calculi secundi dicta fuerunt, inventum est quod si distantia Lunæ citra Solis actionem fuisset x, evadit per Solis actionem secundum radium exercitam $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V}$ sive quia est $\frac{Y}{V} = \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{3yv}{r} - r}$, hæc distantia fit $x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{x^4}{r^3}$. Hinc cum distantia Apogæa sit $r + f$, distantia Perigæa sit $r - f$, & ea distantia quæ est perpendicularis in axem. & quæ est semi-lateri recto Ellipseos æqualis $r - \frac{f^2}{r}$; Distantia Apogæa evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 + 4r^3f}{r^3}$. Distantia Perigæa fit $r - f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 - 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 - 4r^3f}{r^3}$ & Distantia perpendicularis est $r - \frac{H}{r} + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4z^2 - 12r^2z^2f^2}{r^5}$; Ponendo z loco y, ut fieri debere ex ipsâ constructione patet, Ergo totus axis major invenitur $2r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{6r^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2r^4}{r^3}$, sive semi-axis est $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - \frac{M^2}{A^2} \times r$; Excentricitas vero est $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2} \times 4f$; Ex Ellipseωn autem naturâ, semi-latus Rectum Ellipseos cujus hic foret axis major & hæc foret excentricitas evaderet $r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r} - \frac{\overline{1 + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{12y^2}{r^2} - 4}}^2}{r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r}} f^2 = r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r} - f^2 \times \frac{1}{r} + \frac{7M^2}{A^2r^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r}$, sed ea distantia perpendicularis est in curva Lunari $r - \frac{f^2}{r} + \frac{M^2}{A^2} + \overline{\frac{3z^2}{r} - r} - \frac{4M^2f^2}{A^2r^2} \times \frac{3z^2}{r} - r$ unde differentia inter distantiam perpendicularem in Ellipsi & eam distantiam in Orbita Lunari est $\frac{3M^2}{A^2r} \times \overline{y^2 - z^2} - \frac{M^2f^2}{A^2r^3} \times \overline{21y^2 - 12z^2 - 3r^2}$, sive omisso hoc ultimo termino propter f^2, ea differentia est $\frac{3M^2}{A^2r} \times \overline{y^2 - z^2}$. Si Apsides sunt in Syzygiis est $y = r$, & $z = o$, unde hæc quantitas est maxima quæ esse possit, unde distantia perpendicularis in Ellipsi excedit distantiam in orbita Lunari quantitate $\frac{3M^2r}{A^2}$; Si Apsides sunt in quadraturis fit $y = o$, & $z = r$, un-

unde hæc quantitas $\frac{3M^2}{A^2r} \times y^2 - z^2$ evadit $-\frac{3M^2r}{A^2}$, ideoque diſtantia perpendicularis in Ellipſi minor eſt diſtantia in Orbita Lunari, unde fit ut Orbita Lunaris contineat intra ſe Ellipſim; Si vero Apſides ſint in Octantibus evaneſcit $y^2 - z^2$, hinc ipſa Orbita Lunaris cum Ellipſi coincidit.

Cor. Ex hoc Theoremate liquet quod omiſſio vis quæ agit perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris, exhibet orbitæ Lunaris mutationem plane oppoſitam illi quæ ex ejus conſideratione deduceretur omiſſâ excentricitate orbitæ, nam ſive Apſides ſint in Syzygiis ſive in quadraturis liquet ex Theoremate præcedenti orbitam Lunæ prolongari ſecundum lineam Syzygiarum, contrahi vero ſecundum lineam quadraturarum, cujus oppoſitum ſtatuebatur Prop. XXVIII. hujuſce, ex conſideratione vis Solaris totius, ſed ſemotâ Excentricitatis orbitæ Lunaris ratione; hinc ergo ut mediocrem quodammodo teneamus viam; jungemus incremento diſtantiæ Lunaris ſecundum Hypotheſim Theor. VII. calculi 2[di]. invento, partem aliquam $\frac{m}{n}$ decrementi ſecundum methodum Newtonianam inventi; Unde ſic medium quoddam inter ambas Hypotheſes obtinebimus. Itaque quævis diſtantia x evadet $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} px \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}} = x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times x^4}{A^2 \times r^3} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$.

PROBL. I.

Poſitis iis quæ in Corollario præcedentis Theorematis ſtatuuntur, & ſuppoſito Orbitam Lunarem, quomodocumque mutatam per Solis actionem, Ellipſi proximam eſſe, Invenire Leges excentricitatis Orbitæ Lunaris.

Primò cum diſtantia Apogea ſit $r + f$, hæc diſtantia loco x ſubſtituta in valore per Coroll. Theor. præcedentis reperto evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3fy^2}{r^5} - \frac{M^2 \times r^4 + 4r^3}{A^2r^3} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; ut habeatur diſtantia mediocris loco x ſcribatur r, ſinus autem ejus diſtantiæ à quadratura proxima eſt quam proxime Coſinus diſtantiæ Apogæi á quadratura proxima, ideoque loco y ſcribatur z, fit $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3z^2}{r} - \frac{M^2r}{A^2} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2z^2}{r^2}}$ quæ ſubſtracta ex diſtantiâ Apogæâ relinquit excentricitatem $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times \overline{y^2 - z^2} + 12rfy^2}{r5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$, quæ omiſſis terminis omittendis fit $f + \frac{3M^2r^2 - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$; Hinc illius excentricitatis hæ ſunt leges, 1°. Excentricitas eſt maxima cum Apſides ſunt in Syzygiis, nam illic y fit r, & $z = o$, hinc excentricitas evadit $f + \frac{3M^2r - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2}$.

2°. Excentricitas eſt minima cum Apſides ſunt in Quadraturis, illic enim eſt $y = o$ & $z = r$, unde Excentricitas evadit $f - \frac{3M^2r - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2}$.

3°. Excentricitas eſt mediocris cum Apſides verſantur in Octantibus, eſtque $= f$; quia $y^2 = z^2$ ſicque evaneſcit $\frac{3M^2r^2 - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI.

121.

 4°. In

De Mundi Systemate.

121.

4°. In aliis quibuscunque locis hâc constructione obtinetur ferè excentricitas, sumatur TC $= f$, CB $= \dfrac{3M^2 r - \frac{2n}{m}A^2 p}{A^2}$, hoc radio CB describatur circulus in quo sumatur BF æqualis duplæ distantiæ Apsidum à Syzygiâ, erit satis proximè CF excentricitas, nam centro T radio TC describatur arcus CM, cum sit perpendicularis in lineam THMF, & is arcus parum discedat à linea recta, punctum M erit medium lineæ HF per 3. 3 Elem. & MF erit æqualis Cosinui CE arcûs BF.

Radius CB ad compendium dicatur g, & quia sinus dimidii arcus BF in circulo cujus radius erat r dicebatur z in hoc calculo, hinc in hoc circulo erit BN $= \frac{g}{r}z$, & juxta nota Trig. Theoremata, ut CB (g) ad BN ($\frac{g}{r}z$) sic FB ($\frac{2gz}{r}$) ad EB $= \frac{2zz}{rr}g$, & CE $= g - \frac{2zz}{rr}g = g \times \frac{rr-2zz}{rr}$, sed $rr - zz = yy$, hinc CE $= g \times \frac{yy-zz}{rr}$, ideoque TF sive TE $= f + \dfrac{3M^2 r - \frac{2n}{m}A^2 p}{A^2} \times \frac{yy-zz}{r^2}$ ut prius inventum fuerat.

Schol. Hæc fictitia Ellipsis nonnihil discederet à loco Perigæi Lunæ per easdem hypotheses determinato, si verò ex distantia Perigæa cum distantia Apogæa collatis excentricitas quæreretur, diversa quidem ejus quantitas obtineretur, sed eædem forent Leges, nam distantia Apogæa foret $r + f + \overline{r + 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ & Perigæa $r - f + \overline{r - 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ hinc axis major esset $2r + 2r \times \frac{Y}{V} + \frac{2n}{m} \times p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ & semi-axis $r + r \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; Excentricitas vero $f + 4f \times \frac{Y}{V}$ sive $f \times \overline{1 + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - r}$. Quæ quidem est maxima cum Apsides sunt in Syzygiis quia illic $y^2 = r^2$ ergo $f \times \overline{1 + \frac{8M^2}{A^2}}$. In quadraturis fit minima quia evanescit y, ideoque fit $f \times \overline{1 - \frac{4M^2}{A^2}}$, hinc mediocris excentricitas est $f \times \overline{1 + \frac{2M^2}{A^2}}$, quod evenit in Octantibus tunc enim $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, ideoque $\frac{3y^2}{r} - r = \frac{1}{2}r$, fit ergo $f \times \overline{1 + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{1}{2}r} = f \times \overline{1 + \frac{2M^2}{A^2}}$. In cæteris locis sumatur T C $= f \times \overline{1 + \frac{2M^2}{A^2}}$ & CB $= \frac{6M^2}{A^2}f$, & si CB dicatur

g

g ut in Probl. præcedente erit $CE=g\times\frac{rr-2zz}{rr}=g\times\frac{rr-2rr+2yy}{rr}=g\times\frac{2yy-rr}{rr}$ ideoque $TE=f\times\overline{1+\frac{2M^2}{A^2}}+\frac{6M^2}{A^2}\times\frac{2yy-rr}{rr}=f\times\overline{1+\frac{2M^2}{A^2r}}\times r+\frac{4M^2}{A^2r}\times\frac{3yy}{r}-\frac{6M^2}{A^2r}\times r=f\times\overline{1+\frac{4M^2}{A^2r}}\times\frac{3y^2}{r}-r$ quæ est Excentricitas reperta, & eadem constructione obtinetur ac in hypothesi Problematis.

Si denique sicut Astronomis solemne est axim majorem constantem assumamus, & semi-axis major dicatur r, qui ex distantiâ Apogæa subducatur ut habeatur Excentricitas, eædem ejus excentricitatis Leges iterum obtinebuntur; erit quippe Excentricitas $f+r+4f\times\frac{Y}{V}+\frac{n}{m}p\times\overline{1-\frac{2y^2}{r^2}}$ sive $f+\frac{M^2}{A^2}\times\frac{3yy}{r}-r+\frac{4M^2f}{A^2r}\times\overline{\frac{3yy}{r}-r}+\frac{n}{m}p\times\overline{1-\frac{2y^2}{r^2}}$; Quæ sit in Syzygiis ubi $y^2=r^2$, $f+\frac{2M^2r}{A^2}+\frac{8M^2f}{A^2}-\frac{2np}{m}$, in Quadraturis ubi y evanescit $f-\frac{M^2r}{A^2}-\frac{4M^2f}{A^2f}+\frac{n}{mp}$. Unde mediocris Excentricitas est $f+\frac{M^2r}{2A^2}+\frac{2M^2f}{A^2}-\frac{np}{2m}$, quæ quidem etiam in Octantibus circiter occurrit quia majores termini $\frac{M^2}{A^2}\times\overline{\frac{3yy}{r}-r}+\frac{4M^2f}{A^2r}\times\overline{\frac{3yy}{r}-r}$ evadunt $\frac{M^2r}{2A^2}+\frac{M^2f}{A^2}$ in Octantibus, nam cum y^2 illic sit $\frac{1}{2}r^2$ fiunt ii termini $\frac{M^2}{A^2}\times\frac{3rr}{2r}-r$, $+\frac{4M^2f}{A^2r}\times\frac{3rr}{2r}-r=\frac{M^2r}{2A^2}+\frac{2M^2f}{A^2}$.

PROBL. II.

Variationis Excentricitatis quantitatem maximam determinare.

Hoc Problema nonnisi per determinationem veræ curvæ quam sequitur Luna potest determinari, quâ non inventâ ad Observationes recurrendum, ut fecisse videtur Newtonus, mediocrem Excentricitatem esse partium 5505 quarum radius sit 100000 assumit, & maximum incrementum vel decrementum assumit $1172\frac{3}{4}$, tam ex Observationibus quàm quod ille numerus ad concinnandam constructionem pro Æquatione Apogæi commodus esset ut suo loco dicemus.

121\. Illust. Cassinus mediocrem illam Excentricitatem facit 5430 Incrementum vero & Decrementum 1086, nec malè hæc consentiunt cum quantitatibus Prob. 1°. inventis, si loco quantitatis indeterminatæ $\frac{n}{m}$ scribatur $\frac{1}{2}$; Nam, id Incrementum aut Decrementum inventum fuerat $\frac{3M^2r-\frac{2n}{m}A^2p}{A^2}$, sive accuratiùs sumptis quantitatibus quæ ad simplicitatem calculi omissæ fuerant cum Excentricitas inventa fuisset $f+\frac{M^2}{A^2}\times\frac{3r^4\times\overline{y^2-z^2}+12r^3fy^2}{r^5}+\frac{M^2}{A^2}\times4f-\frac{2np}{m}\times\frac{y^2z^2}{r^2}$, hæc evadit (cum Apsides sunt in Syzygiis & $z=0$, $y=r$) $f+\frac{M^2}{A^2}\times3r+12f+\frac{M^2}{A^2}\times4f-p$. & cum sunt in Quadraturis ubi $z=r$ & $y=0$, $f-\frac{M^2}{A^2}\times3r+\frac{M^2}{A^2}\times4f+p$, unde mediocris Excentricitas est $f+\frac{M^2}{A^2}\times10f$, & Incrementum vel Decrementum, $\frac{M^2}{A^2}\times\overline{3r+6f-p}$.

Cum itaque sit $\frac{M^2}{A^2}=.0055$ ex priùs inventis, mediocris Excentricitas $\overline{1+\frac{10M^2}{A^2}}\times f$ quam

De Mundi Systemate.

(†) Hisce motuum lunarium computationibus ostendere volui, quod motus lunares per theoriam gravitatis à causis suis computari possint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua medii motus lunæ oriatur à variâ dilatatione orbis lunæ per vim solis, juxta Corol 6. Prop. LXVI. Lib. I. (h) Hæc vis in perigæo solis major est, & orbem lunæ dilatat; in apogæo ejus minor est, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; & æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compensatur, in (i) apogæo & perigæo solis nulla est, in (k) mediocris solis à terrâ distantia ad 11′. 50″ circiter ascendit, in aliis locis æquationi centri solis proportionalis est; & additur medio motui lunæ ubi terra pergit ab aphelio suo ad perihelium, & in oppositâ orbis parte subducitur. Assumendo radium orbis magni 1000

121.

(quam Cassinus invenit 5430 & Newtonus 5505) est 1,055 f, hinc est $f=5147$ secundùm Cassinum & 5218 secundùm Newtonum quod utrumque ductum in .0055, prius efficit 1819.85 alterum 1822.2 cumque p sit 719, id ex priore detractum relinquit 1100.85, ex posteriore 1103.2; qui numeri incidunt inter 1172 & 1086 quos pro Excentricitatis variatione assignant Newtonus aut Hallejus & Cassinus.

(†) * *Hisce motuum* &c. Hæc est enim veritatis ejus Theoriæ fortissima probatio, si ea quæ Mathematicè deducuntur ex eâ Theoriâ apprime consentiant cum Phænomenis in casu maximè composito.

(h) * *Hæc vis in Perigæo Solis major est & orbem Lunæ dilatat*; Vis Solis aliquando adjungitur vi Terræ ut Lunam versus Terram attrahat, aliquando idque sæpiùs & ubi fortiùs agit vi Terræ est opposita, & Lunam à Terrâ distrahit, itaque toto effectu vis Solis simul considerato, Luna per eam vim à Terrâ distrahitur & eò magis quò ea vis Solis major est; ideoque Luna magis à Terrâ distrahitur dum Terra versatur in suo Perihelio quàm ubi versatur in Aphelio: hinc primo casu orbita Lunæ magis est dilatata quàm hoc altero.

(i) * *In Apogæo & Perigæo nulla est* id omninò liquet ex Coroll. 2. Probl. V. prioris calculi, nam ex iis quæ in eo Corollario statuuntur liquet quod ut habeatur Æquatio quovis in loco, hæc proportio est instituenda, ut areæ Ellipseos quam Terrâ describit dimidium ad aream descriptam à Terrâ ab Aphelio (vel Perihelio) usque ad eum locum propositum, ita semestris tardatio ad tardationem mediocri motui adscriptam, sed in hoc casu ea area à Terra descripta est ipsa semi-Ellipsis, ergo etiam tardatio medio motui adscripta est ipsa semestris tardatio; Tum verò sumitur ex Probl. IV. tardatio loco dato conveniens quæ ex tardatione mediocri tollitur, & differentia est æquatio quæsita; sed rursus ea tardatio Aphelio aut Perihelio conveniens est ipsa semestris tardatio, ergo, ex tardatione mediocri motui eo in loco adscripta, detracta nullum est residuum, cum planè sint æquales, ergo æquatio in Apogæo ac Perigæo nulla est.

(k) * *In mediocri Solis distantia &c.* Videntur hæc verba statuere quid constet ex Observationibus, nempe hanc æquationem esse 11′. 50″. ubi maxima est, & esse æquationi centri proportionalem; observa-

1000 & eccentricitatem terræ $16\frac{7}{8}$, hæc ([l]) æquatio, ubi maxima est, per theoriam gravitatis prodiit 11. 49'. Sed eccentricitas terræ paulo major esse videtur, & auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas, $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit 11'. 51''.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

([m]) Inveni etiam quod in perihelio terræ, propter majorem vim solis, apogæum & nodi lunæ velocius moventur quam in aphelio ejus, idque in triplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. ([n]) Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum

servavimus autem Ill. Cassinum hanc æquationem ubi maxima est 9'. 44''. efficere.

(l) * *Hæc æquatio ubi maxima est prodiit* 11'. 49''. Sumptâ Orbitâ Lunari ut circulari, per Theoriam gravitatis prodiit 11'. 47''. imo minor, sive Newtonus aliâ viâ eum calculum instituerit quàm nos, sive alia Elementa assumpserit, sive ex excentricitate Orbitæ Lunaris consideratione hanc quantitatem auxerit, cætera verò ad amussim quadrant.

Eam Æquationem excentricitati Terræ esse proportionatam ex Cor. I. Prob. V. pag. 487., prodit enim ejus valor per quantitates fixas ductas in excentricitatem quæ in calculo dicebatur e; & quamvis quantitas b quæ est $\sqrt{a^2 - e^2}$ in eo valore occurrat, idcircò non est censendum æquationis valorem multùm pendere ex illa dignitate e^2 siquidem in illo termino ea dignitas ferè evanescit respectu a^2.

Liquet etiam ex Cor. 2. ejusd. Probl. cæteras æquationes esse proportionatas æquationi centri Solis: addendas esse motui Lunæ dùm pergit ab Aphelio ad Perihelium, illic enim tardatio vera minor est quam tardatio mediocris, ergo provectior est Luna quam secundùm tardationem mediocrem, addi ergo debet ejus viæ iste tardationis defectus; ex Perihelio pergendo res oppositâ ratione procedet.

(m) * *Inveni etiam &c.* Id utique statuit Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I., illic ostendit Vires Solis esse ut Cubos distantiarum reciprocè, unde cùm sint causæ errorum Apogæi & Nodorum, illi errores sive motus qui suis causis sunt proportionales, debent esse ut cubi distantiarum reciprocè; Hinc dicatur a mediocris distantia Terræ à Sole, distantia quævis alia dicatur $a \pm x$, motus medius diurnus Apogæi in distantia a sit g, motus medius nodi in ea distantia a sit n, in distantia x, motus Apogæi erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} g$ & motus nodi erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} n$ aut formando seriem ex his quotientibus & omissis terminis in quibus altior dignitas quantitatis x occurrit, erit motus Apogæi in quavis distantia, $g \mp \frac{3x}{a} g$, & motus nodi $n \mp \frac{3x}{a} n$. 121.

(n) * *Et inde oriuntur Æquationes annuæ, Æquationi centri Solis proportionales.* Cùm motus Apogæi Lunæ & nodi uniformis non sit cùm Terra ad varias à Sole distantias transfertur, sed addatur aut detrahatur ex eorum motu medio quantitas variabilis $\frac{3x}{a} g$, & $\frac{3x}{a} n$, si quæratur progressus Apogæi Lunæ aut nodi cùm Terra ab Aphelio Solis certâ quantitate dierum discesserit, is progressus ex motu medio Apogæi Lunæ aut nodi rectè non computabitur, quippe singulis diebus præter motum medium quantitate $\frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ processerunt aut recesserunt, summa ergo om-

De Mundi Systemate.

tuum æquationi centri ſolis proportionales. Motus (o) autem ſolis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inversè & (p) maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, eſt 1gr. 56′. 20″ prædictæ ſolis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. (q) Quod ſi motus ſolis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam 2gr. 54′

121\. omnium harum quantitatum erit ſumenda, quæ erunt correctiones ſeu æquationes quibus ex loco medio Apogæi & Nodi ad verum ejus locum deveniemus, illæ verò æquationes æquationibus centri Solis erunt proportionales, nam cùm motus Solis ſit in duplicatâ ratione diſtantiæ inverse (ut exponetur in notâ o proximè ſequenti) ſit m motus medius diurnus Solis in mediocri diſtantia a, in diſtantiâ quavis $a \pm x$ is motus erit $\frac{a}{\overline{a \pm x}^2} m$, ſeu in ſeriem reſolvendo hanc Expreſſionem erit $m \mp \frac{2x}{a} m$, hinc differentia inter motum medium & verum erit $\pm \frac{2x}{a} m$, & ex ſummâ earum differentiarum conflabuntur æquationes centri Solis, cùm ergo æquationes Apogæi & Lunæ ex ſummâ quantitatum $\pm \frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ conſtent, erunt iſtæ æquationes ubivis in punctis correſpondentibus ſeu in æqualibus ab Aphelio Terræ diſtantiis in ratione conſtanti $3g$, & $3n$ ad $2m$: Ideoque erunt ubique proportionales æquationibus centri Solis.

(o) * *Motus Solis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ inversè* ſcilicet motus Solis angularis è Terrâ ſpectatus; nam cùm Sol deſcribat ſemper areas tempori proportionales, arcus quos reverâ deſcribit ſunt ſemper inversè ut diſtantiæ, ſed præterea magnitudines apparentes eorum arcuum e Terrâ ſpectatorum ſunt etiam inversè ut eorum à Terrâ diſtantia, ergo arcus quos Sol ſingulis tempuſculis æqualibus deſcribere videtur è Terrâ, ſunt in duplicatâ ratione diſtantiarum inversè.

(p) *Et maxima Centri Æquatio eſt* 1°. 56′. 20″. Illam 1°. 55′. 50″. facit Ill. Caſſinus.

(q) * *Quod ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè*; Dicatur M motus Solis in diſtantiâ mediocri, quæ dicatur a, & diſtantia quævis alia ſit $a \pm x$; ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiarum inverse, in diſtantiâ $a \pm x$ foret $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} M$ ſive $\frac{a^3 M}{a^3 \pm 3a^2x + 3ax^2 \pm x^3}$ aut formando ſeriem, is motus in diſtantia $a \pm x$ erit $M \pm \frac{3x}{a} M$ omiſſis reliquis terminis ob exiguitatem fractionis $\frac{x}{a}$; ideoque differentia motus in diſtantiâ verâ & motus in diſtantiâ mediocri foret $\mp \frac{3x}{a} m$: In verâ autem hypotheſi quòd Solis motus creſcat in ratione ſubduplicatâ inverſâ diſtantiarum, eodem ratiocinio invenitur quod in quovis loco motus Solis erit $\frac{a^2 M}{a^2 \mp 2ax + x^2}$ & diviſione facta erit is motus $M \mp \frac{2x}{a} M$, & differentia motus veri & motus medii erit $\mp \frac{2x}{a} M$, eritque ergo hæc differentia ad differentiam in priore Hypotheſi inventam ut 2 ad 3 in omnibus locis correſpondentibus; ſed æquationes conflantur ex ſummâ differentiarum motus veri & medii ſumptarum in omnibus locis ab Aphelio uſque ad locum eum ubi æquatio applicatur; cum ergo in utrâque hypotheſi ſingulæ differentiæ motus veri & medii ſint in omnibus punctis correſpondentibus in

54′ 30″. (r) Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi & nodorum lunæ generant, ſunt ad 28r, 54′. 30″. ut motus medius diurnus apogæi, & motus medius diurnus nodorum lunæ ſunt ad motum medium diurnum ſolis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi 19′. 43″, & æquatio maxima medii motus nodorum 9. 24″. (ſ) Additur verò æquatio prior & ſubducitur poſterior, ubi terra pergit à perihelio ſuo ad aphelium: & contrarium fit in oppoſitâ orbis parte.

Per theoriam gravitatis (t) conſtitit etiam quod actio ſolis in lunam

in ratione conſtanti 2 ad 3 erunt etiam ſummæ earum differentiarum in locis correſpondentibus, ipſæ nempe æquationes in eâdem ratione, ergo maxima centri æquatio in hypotheſi verâ motum Solis decreſcere in duplicatâ ratione diſtantiarum eſt ad æquationem maximam in hypotheſi fictitiâ motum Solis decreſcere in triplicatâ ratione diſtantiarum ut 2 ad 3 cum ergo æquatio maxima ſit per Obſervationes 1 gr. 56′. 20″. hæc altera erit $\frac{3}{2} \times$ 1 gr. 56′. 20″. ſive 2gr. 54′. 30″. Q. E. D.

(r) * *Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & nodorum generant ſunt ad* 2gr. 54′. 30″. *ut modus medius Apogæi & Nodi ad motum medium Solis.* Nam ſtatutum eſt motus horum eſſe in triplicatâ ratione diſtantiarum inversè, ſit *g* motus medius Apogæi in mediocri nempe diſtantiâ, *n* motus medius nodorum, & *m* motus medius Solis, decreſcantque in triplicatâ ratione inverſâ diſtantiarum, deprehenditur eodem modo ac in notâ præcedente quod in quolibet loco differentiæ inter motum verum & motum mediocrem erunt $\mp \frac{3x}{a} g$, $\mp \frac{3x}{a} n$, $\mp \frac{3x}{a} m$, Æquationes maximæ ſunt ſumma earum quantitatum ſumptarum ab Apogæo Solis uſque ad mediocrem ejus à Terrâ diſtantiam, itaque illæ Æquationes conſtituuntur per ſeries omnium $\frac{3x}{a} g$, omnium $\frac{3x}{a} n$, & omnium $\frac{3x}{a} m$, qualeſcumque ergo ſint illæ quantitates variabiles *x*, cùm eædem ſint in tribus hiſce ſeriebus ſummæ earum ſerierum ſive Æquationes maximæ, erunt inter ſe ut illæ quantitates *g*, *n* & *m*, per quas omnes partes ſingularum illarum ſerierum ducuntur, illæ verò quantitates ſunt motus medii Apogæi, nodi & Solis, ergo datâ unâ ex his Æquationibus, v. gr. datâ Æquatione maximâ Solis & motu medio Apogæi, nodi & Solis, habentur cæteræ Æquationes maximæ ſtatuendo illas eſſe ad eam Æquationem datam, ut ii motus medii dati.

Liquet verò ex ipſâ hac Demonſtratione, verùm quidem Solis motum medium aſſumi debere, non autem veram ipſius Æquationem ſed eam quæ prodit fingendo Solis motum in triplicatâ ratione diſtantiarum decreſcere.

(ſ) * *Additur verò Æquatio* Apogæi Lunæ *& ſubducitur Æquatio* nodi *ubi Terra pergit a Perihelio ſuo ad Aphelium*; motus Apogæi Lunæ eſt progreſſivus, motus verò nodi eſt retrogradus; Terrâ autem à Perihelio procedente uterque motus major fit motu medio, inde ergo plus procedit Apogæum Lunæ, quàm per motum medium, plus recedit nodus, prior ergo Æquatio addenda, poſterior detrahenda.

(t) * *Per theoriam gravitatis conſtitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major*

DE MUNDI SYSTEMATE.

lunam paulo major ſit, ubi tranſverſa diameter orbis lunaris tranſit per ſolem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea terram & ſolem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Et (u) hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris, pendens à ſitu apogæi lunæ ad ſolem, quæ quidem maxima eſt cum apogæum lunæ verſatur in octante cum ſole; & nulla cum illud ad quadraturas vel ſyzygias pervenit: & motui medio additur in tranſitu apogæi lunæ à ſolis quadraturâ ad ſyzygiam, & ſubducitur in tranſitu apogæi à ſyzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam ſemeſtrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima eſt, aſcendit ad 3′. 45″ circiter, (x) quantùm ex phænomenis colligere

521. *jor ſit ubi tranſverſa Diameter orbis Lunaris tranſit per Solem* &c.

Facile deducitur ex Cor. Theor. IV. calculi primi (pag. 479) quod (exiſtente x diſtantiâ Lunæ à Terrâ, r ejus diſtantiâ mediocri, & y ſinu ejus diſtantiæ à quadraturâ, exiſtente etiam F vis Solis in terram in mediocri ejus diſtantiâ α) actio Solis Lunam trahentis ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris eſt $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$.

Unde ea vis, Lunâ in quadraturis exiſtente, fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times -r$, eſt ergo negativa & Lunam ad Terram attrahit cum verò Luna eſt in ſyzygiis, ea actio Solis fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times 2r$, eſt itaque poſitiva & Lunam à Terra diſtrahit; In locis autem ſimilibus hæ Solis actiones ſunt ut diſtantiæ x Lunæ à Terrâ. Hinc ſi Apſides ſint in ſyzygiis ſit verò Luna in quadraturis, ubi per actionem Solis ad terram trahitur ambæ diſtantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ poſitæ ſunt ſimul æquales lateri recto orbitæ Lunaris; cum verò Luna eſt in ſyzygiis ubi per actionem Solis à Terra diſtrahitur, ambæ diſtantiæ x Lunæ in conjunctione & oppoſitione poſitæ ſunt ſimul æquales axi majori, qui ſemper ſuperat latus rectum.

Si verò Apſides ſunt in quadraturis, & Luna etiam in quadraturis ambæ diſtantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ poſitæ ſimul ſumptæ ſunt æquales axi majori, & cum Lunâ eſt in ſyzygiis, ambæ diſtantiæ x Lunæ in conjunctione & oppoſitione poſitæ ſunt ſimul æquales lateri recto orbitæ Lunaris.

Ergo cum Apſides ſunt in Syzygiis actio Solis quæ Lunam ad Terram attrahit eſt minor, & è contra actio quæ Lunam à Terra diſtrahit eſt major quam cum Apſides ſunt in quadraturis, ideoque orbis Lunaris paulo major fieri debet in priore caſu quam in poſteriore.

De punctis autem inter quadraturas & Syzygias intermediis ab eo quod in his punctis extremis evenit judicari poteſt, ſed potiſſimum ex calculo quo Æquatio ex hâc cauſâ natâ determinatur.

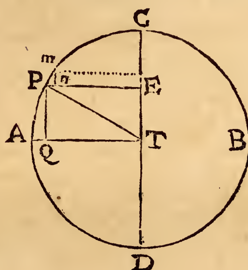
(u) * *Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris* &c. Hujus æquationis calculum ejuſque Leges explicatas habes Probl. VI. calculi ſecundi (pag. 500.) ejuſque Corollariis.

(x) * *Quantùm ex Phænomenis colligere potui* &c. Ex Coroll. 5to. Probl. VI. (pag. 501. in quo quædam menda irrepſerunt à B. L. prius corrigenda) Æquatio hæc 3′. 56″ eſt reperta, quædam autem cau-

ligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri ſolis diſtantiâ à terrâ. (y) Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione diſtantiæ ſolis inversè; ideoque in maximâ ſolis diſtantiâ eſt 3'. 34", LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

cauſæ ſunt cur hæc quantitas pro verâ quantitate adhiberi nequeat, ſed hæc æquatio ex phænomenis ſit colligenda; primò, quantitas f ſive excentricitas Orbitæ Lunaris ſatis certo non eſt cognita, ut conſtat ex iis quæ de excentricitate dicta ſunt, hic autem mediocrem excentricitatem aſſumpſimus 5505 partium quarum radius orbitæ ſit 100000 cum Newtono quam Caſſinus facit tantum 5430 partium, & forte minor aſſumi deberet ſi attendatur ad Excentricitatem Orbitæ Lunaris qualis ea foret citra Solis actionem ex quibus conſiderationibus, liquet æquationem inventam minorem factum iri quam 3'. 56", ſicque magis acceſſuram ad æquationem 3'. 45" quæ ex Phænomenis colligitur: ſecundò cum varias Hypotheſes aſſumpſerimus vero quidem proximas non tamen veras abſolute ut liquet ex Cor. I. Probl. I. (pag. 496) ex iis erroribus ipſæ quantitates abſolutæ mutantur ſed manent earum proportiones ex quibus Leges æquationum pendent ita ut datâ aliquâ ex æquationibus per Phænomena, reliquæ ſatis tuto exinde deduci queant.

(y) * *Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè.* Probl. VI. (pag. 500. col. 2.) hæc æquatio inventa eſt $\frac{15\, A \times F q^9 f^2}{109.73 \times S.\, V.\, a r^8} \times -163.595$ PQT, in quâ expreſſione a repræſentat mediocrem Solis à Terra diſtantiam, in aliâ itaque à Sole diſtantiâ loco a ponatur X, & loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$ quia vis Solis F eſt inversè ut quadrata diſtantiarum, hac ergo ſubſtitutione factâ æquatio fit $\frac{15\, A a^2 F q^9 f^2}{109.73.\, S.\, V X^2.\, X r^8} \times -163.595$ PQT tum loco $\frac{F}{V}$ ſubſtituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ (ut liquet ex Cor. Probl. I. calculi primi, pag. 484) æquatio evadit $\frac{15\, M^2 a^3 q^9 f^2}{109.73 S.A.X^3.\, r^9} \times -163.595$ PQT, & quia in octantibus eſt PQT $= \frac{1}{4} r^2$ æquatio eſt $-\frac{15 \times 163.595 \times M^2 a^3 q^9 f^2}{4 \times 109.73 \times S.\, A\, X^3\, r^7}$, in quâ cum nulla ſit variabilis quantitas præter X^3 in denominatore occurrente, liquet Æquatio- 124.



nem cum Apogæum eſt in Octantibus, hoc eſt æquationem maximam eſſe ut X^3 inversè, hoc eſt *augeri ac diminui in triplicatâ ratione diſtantiæ Solis X inversè; ideoque* &c.

Scilicet poſitâ Excentricitate Orbitæ telluris $.016\frac{11}{12}$, diſtantia maxima eſt $1 + .016\frac{11}{12}$, diſtantia mediocris 1, & diſtantia minima $1 - .016\frac{11}{12}$, itaque ſumendo rationem triplicatam mediocris & maximæ diſtantiæ fiat ut $1 + 3 \times .016\frac{11}{12} + 3 \times .000285\frac{1}{3}$ &c. (1.0516) ad 1, ita 3'45" ad quartum qui erit 3'.34". & ſumendo rationem triplicatam inverſam mediocris & minimæ diſtantiæ fiat ut $1 - 3 \times .016\frac{11}{12} +$

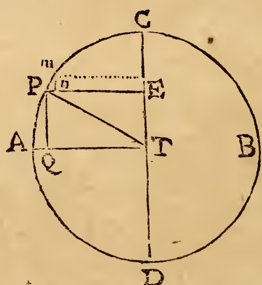
De Mundi Systemate.

$34''$, & in minima $3'. 56''$ quamproxime: ubi vero apogæum lunæ situm est extra octantes, evadit minor; (z) estque ad æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiæ apogæi lunæ à proximâ syzygiâ vel quadraturâ ad radium.

(a) Per eandem gravitatis theoriam actio solis in lunam paulo major est ubi linea recta per nodos lunæ ducta transit per solem, quam ubi linea illa ad rectos est angulos cum rectâ solem ac terram jungente. (b) Et inde oritur alia medii motus lu-

121. $+3\times.000285\frac{1}{2}$ &c. (.950197) ad 1 ita $3'. 45''$. ad quartum qui erit $3'. 56''$.

(z) * *Estque ad æquationem maximam.* Siquidem in quâcumque distantiâ Terræ à Sole, hæc æquatio est $\frac{15 M^2 a^3 r^9 f^2}{109.73 S. A. X^3 x^9} \times - 163.595$ PQT, liquet quod supponendo distantiam X non variari, hæc æquatio erit ubique ut PQT; in octantibus autem PQT est $\frac{1}{4} r^2$, hinc in quovis loco hæc æquatio est ad eam quæ in

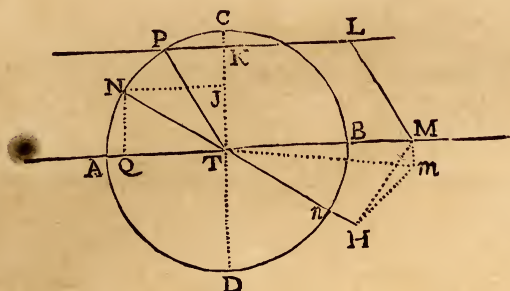


Octantibus obtineretur, manente eâdem distantiâ Solis à Terrâ ut PQT ad $\frac{1}{4} r^2$, sive quia PQT est $\frac{1}{2} zy$ ut $\frac{1}{2} zy$ ad $\frac{1}{4} r^2$, & utrumque ducendo per $\frac{4}{r}$ ut $\frac{2zy}{r}$ ad r, sed $\frac{2zy}{r}$ est sinus duplæ distantiæ puncti P, hoc est Apogæi à Syzygiâ, (aut à quadraturâ perinde enim est ut ex Trigonometriæ Principiis liquet) hinc æquatio in quovis situ Apogæi extra octantes est ad Æquationem maximam quæ obtineretur in Octantibus manente eâdem distantia Telluris à Sole, ut sinus duplæ distantiæ Apogæi Lunæ à proximâ Syzygiâ, ad radium.

(a) * *Per eamdem* &c. Cum linea recta per nodos ducta transit per Solem, tunc Sol versatur in plano ipsius orbitæ Lunaris producto, ejus itaque actio non consumitur in dimovendâ Lunâ ab eo plano, sed tota impenditur ad eam vel à terrâ distrahendam, vel ad terram attrahendam, vel ad eam accelerandam aut retardandam in proprio suo Plano, cum autem linea nodorum est ad angulos rectos cum rectâ solem ac terram jungente, tunc Sol maxime discedit à plano orbitæ Lunaris, hinc pars ejus actionis consumitur in admovendo Plano orbitæ Lunaris ad Eclipticam, & per residuum duntaxat ejus actionis Lunæ errores *in longum* producit; hinc priori casu actio Solis in Lunam paulò major est quam in posteriore, partem autem actionis Solis residuam sublatâ eâ ejus parte quæ in plano orbitæ Lunaris dimovendo consumitur ad calculum vocamus Probl. 1°. Calculi tertii (pag. 502.).

(b) * *Et inde oritur alia motus medii æquatio.* Hujus æquationis quantitatem & Leges Probl. III. Calculi 3i. (pag. 503.) exposuimus, illamque $\frac{3 A. F. l^2}{8 S. V. a r} \times \frac{2nm}{r}$ in-

lunaris æquatio, quam ſemeſtrem ſecundam vocabo, quæque maxima eſt ubi nodi in ſolis octantibus verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in ſyzygiis vel quadraturis, & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi alterutrius à proximâ ſyzygiâ aut quadraturâ: (c) additur vero medio motui lunæ, ſi ſol diſtat à nodo ſibi proximo in antecedentia, ſubducitur ſi in conſequentia, & in octantibus, ubi maxima eſt, aſcen-



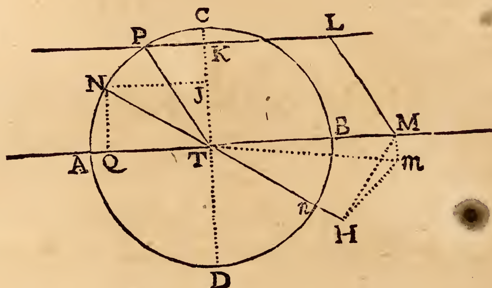
invenimus, ſumendo l pro ſinu inclinationis orbitæ, & n & m pro ſinu & Coſinu diſtantiæ nodorum à Syzygiâ. Hinc cum $\frac{2\,n\,m}{r}$ ſit ſinus duplæ diſtantiæ nodi à Syzygiâ, cæteri verò termini ſint conſtantes hæc æquatio eſt maxima *ubi nodi in Solis octantibus verſantur*, & evaneſcit *ubi ſunt in Syzygiis vel quadraturis & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi à Syzygiâ* &c.

(c) * *Additur verò medio motui Lunæ, ſi ſol diſtat à nodo ſibi proximo in antecedentia ſubducitur ſi in conſequentia.* Ex actione Solis in Lunam, Luna retardatur, ex diminutione verò ejus actionis propter obliquitatem plani orbitæ Lunaris, diminuitur hæc Lunæ retardatio, hoc eſt acceleratio quædam oritur reſpectu motus qui, omiſſâ hac conſideratione, fuerat determinatus; mediocris acceleratio hinc nata, & quæ includitur in medio motu Solis eſt ubique $\frac{3\,A.\,F.\,l^2}{2\,S.\,V\,a\,r^2} \times \frac{r\,u}{2}$, vera autem acceleratio eſt $\frac{3\,A.\,F.\,l^2}{2\,S.\,V\,a\,r^2} \times A\,N\,Q$. Unde æquatio eſt $\frac{3\,A.\,F.\,l^2}{2.\,S.\,V\,a\,r^2} \times \frac{r\,u}{2} - ANQ$ per Probl. III. calculi 3. (pag. 503. & ſeq.) jam itaque ſi $\frac{r\,u}{2}$ ſit major quam ANQ quod evenit in toto quadrante ANC, acceleratio mediocris eſt major vera, & Luna magis proceſſiſſe cenſetur quam revera proceſſit, hinc iſta differentia $\frac{3\,A.\,F.\,l^2}{2\,S.\,V.\,ar^2} \times \frac{r\,u}{2} - A\,N\,Q$ debet detrahi ex ejus loco invento ut verus locus habeatur, in hoc autem caſu Sol qui puncto A reſpondere cenſetur eſt in conſequentia reſpectu nodi N.

Dum verò N verſatur inter C & B, & *n*

DE MUNDI SYSTEMATE. cendit ad $47''$ in mediocri ſolis diſtantiâ à terrâ, (d) uti ex theoriâ gravitatis colligo. In (e) aliis ſolis diſtantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ ſolis à terrâ, ideoque in perigæo ſolis ad $49''$ in apogæo
121. ejus ad $45''$ circiter aſcendit.

Per



n inter A & D, tunc $\frac{ru}{2}$ eſt minor quam ANQ, ſic itaque acceleratio mediocris eſt minor quam acceleratio vera, ideoque differentia $\frac{3\,A.\,Fl^2}{2\,S.V.ar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ addi debet loco medio Lunæ, tunc autem Sol in A eſt in antecedentia reſpectu nodi proximi *n*.

3°. Dum N verſatur inter B & D & *n* in A & C $\frac{ru}{2}$ excedit ANQ, ſive motus mediocris excedit verum ſubduci itaque debet differentia, eſt vero in eo caſu Sol in A in conſequentia reſpectu nodi *n*.

Denique Dum N eſt inter D & A, $\frac{ru}{2}$ minor eſt quam ANQ addi itaque debet æquatio loco medio Lunæ & Sol eſt in Antecedentia reſpectu nodi N.

Ergo æquatio ſubducitur ex medio motu Lunæ cum Sol eſt in conſequentia reſpectu nodi proximi, additur vero ei motui cum Sol eſt in antecedentia.

(d) * *Uti ex Theoriâ colligo*, calculus noſter coroll. Probl. III. contentus, Æquationem maximam $45''.6$ exhibet, qui numerus eſt adeo proximus numero $47''$. quem ex Theoriâ gravitatis collegit Newtonus, ut credere facile ſit ipſum hunc numerum ex Theoriâ gravitatis collegiſſe eâ proximè ratione quæ in calculo (pag. 501.) adhibetur, differentiola enim iſta oriri poteſt ex eo quod, vel angulum inclinationis orbitæ, vel quantitatem *M* menſis Periodici citra actionem Solis conſiderati, paulo majorem fecerit quam nos.

(e) * *In aliis Solis diſtantiis.* Eadem plane eſt demonſtratio ac in notâ (y) præcedente; cum æquatio ſit $\frac{3\,AFl^2}{8\,SVar} \times \frac{2nm}{r}$ in diverſâ Solis à Terrâ diſtantiâ X, loco *a* ſcribatur X, loco F, $\frac{a^2 F}{X^2}$, loco $\frac{F}{V}$, $\frac{aM^2}{rA^2}$, æquatio evadit $\frac{3\,M^2 a^3 l^2}{8\,A.\,S.\,X^3 r^2} \times \frac{2nm}{r}$ & in Octantibus quia $\frac{2nm}{r} = r$, Æquatio eſt $\frac{3\,M^2 a^3 l^2}{8\,A,\,SX^3 r}$, ideoque æquationes in

Octan-

Per (f) eandem gravitatis theoriam apogæum lunæ progreditur quam maximè ubi vel cum ſole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum ſole quadraturam facit. (g) Et eccentricitas fit maxima in priore caſu & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & æquationem principalem apogæi generant, quam ſemeſtrem vocabo. (h) Et æquatio maxima ſemeſtris eſt 12gr. 18′ circiter, quantùm ex obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter lunam in ellipſi circum terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Haileius* centrum ellipſeos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum terram. Et (i) ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progreſſu & regreſſu apogæi & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris lunæ à terrâ in partes 100000, & refe-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Octantibus in diverſâ Solis à Terrâ diſtantiâ, ſunt inter ſe inversè ut X^3, ſi fiat itaque ut Cubus maximæ diſtantiæ Terræ à Sole qui eſt 1.0516, ad Cubum 1 mediocris diſtantiæ, ita 47″ Æquatio pro mediocri diſtantia inventa erit ad 45″ circiter eaque erit Æquatio in maximâ diſtantiâ Solis à Terrâ, & ut .950107 Cubus minimæ diſtantiæ, ad 1 ita 47″ ad 49″ circiter quæ erit Æquatio maxima cum Sol erit in Perigæo. Eâdem etiam ratione ac in notâ (z) oſtendetur quomodo in quâvis Solis à Terrâ diſtantiâ, & in quavis poſitione Nodi reſpectu Solis Æquatio obtineri debeat.

(f) * *Per eamdem gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maximè* &c. Per Methodum ex ipſis Newtoni Principiis derivatam invenimus (pag. 505. & ſeq.) motum Apſidis eſſe ut $3yy-rr$, ſumendo y pro ſinu diſtantiæ Apſidis à quadraturâ, is ergo motus, juxta hunc calculum, evaneſcit cum $y\sqrt{3}=r$, cum nempe y eſt ſinus arcus 35gr.15′, poſitivus verò eſt in ſyzygiis illic enim fit $3yy-rr=2rr$ negativus in Quadraturis illic enim eſt $3yy-rr=-rr$.

(g) * *Et excentricitas fit maxima in priore caſu* cum nempe Apſides ſunt in ſyzygiis & minima in poſteriore, cum nempe *Apſides ſunt in Quadraturis.* Id utique ſtatuitur toto calculo de Excentricitate orbitæ Lunaris ſuperius pag. 512. & ſeq. tradito. 121.

(h) * *Et Æquatio maxima ſemeſtris*, &c. Hanc ex obſervationibus determinandam liquet cum non ſatis feliciter obtineatur abſoluta quantitas motus Apogæi per calculos ſecundum Newtoniana Principia inſtitutos; Methodus autem à nobis indicata eſt admodum incompleta & rudis, & in ea multa quæ conſiderari debuiſſent ſunt omiſſa, hinc cum in cæteris motibus Lunæ & Æquationibus ad votum ſuccedat Theoria Newtoniana, in hoc caſu aliquid adhuc deſiderari, fatendum eſt.

(i) * *Et ex motu in Epicyclo.* Ingeniosè & feliciter conjunctas eſſe unicâ conſtructione Geometricâ Excentricitatis variationes, & motus Apogæi æquationes, ex iis quæ de Excentricitate dicta ſunt pag. 516. intelligi poteſt; Illic enim oſtenditur quod ſi T C ſit excentricitas media f, C B maxima excentricitatis variatio ab excentricitate mediocri, B F arcus duplus diſtantiæ apſidis à ſyzygiâ, tunc linea T F eſt excentricitas, oſtenditur verò, Prob. II. pag. 517. variationem maxi-mam

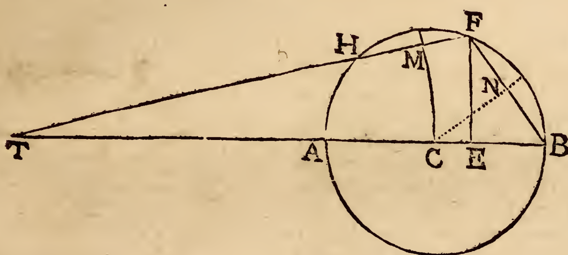
De Mundi Systemate.

referat T terram & TC eccentricitatem mediocrem lunæ partium 5505. Producatur TC ad B, ut sit CB sinus æquationis maximæ semestris $12^{gr}. 18'$ ad radium TC, & circulus BDA centro C, intervallo CB descriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur & secundum ordinem literarum BDA revolvitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci solis ab apogæo lunæ semel æquato, & erit CTD æquatio semestris apogæi lunæ & TD eccentricitas orbis ejus in apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem lunæ motu medio & apogæo & eccentri-

121. mam excentricitatis quæ est A B tam ex observationibus quam consentiente calculo sumi posse 1172 partium quarum Radius orbitæ Lunaris est 100000 & excentricitasTC 5505, simul autem cum constet ex observationibus æquationem semestrem Apogæi $12^{gr}. 18'$ esse, ejus Anguli sinus est partium 1172 Radio existente partium 5505, ut liquet si fiat ut Radius 100000 ad sinum Anguli $12^{o}. 18'$ qui est 21303 ita 5505 ad quartum qui est $1172\frac{3}{4}$ hinc illum numerum pro maximâ variatione excentricitatis selegit Halleius, quia non procul est ab iis quos & observationes & calculus indicant, simulque est sinus anguli maximi quo discedunt Apsides à loco medio, Ergo quando BF est quadrans, ideoque Apsides octante à syzygiâ distant, sinus anguli FTB est ipsa linea CB sive $1172\frac{3}{4}$ dum radius TF est æqualis TC sive 5505, ergo eo in casu angulus FTB est verus discessus lineæ Apsidum à suo loco medio, & jacet TF in verâ positione lineæ apsidum, & cum TF sit excentricitas eo in loco est F in ipsâ positione centri orbitæ Lunaris; Idem proximè eveniet in quovis alio loco F; Nam cum Æquationes Apogæi (pag. 512.) sint ut sinus Arcus dupli distantiæ Apsidis à Sole, & sit FB arcus duplus distantiæ Apsidis à Sole & FE ejus sinus, æquatio maxima $12^{gr}. 18'$. debebit esse ad eam quæ huic loco F competit ut BC ad FE, sed in ea proximè sunt ratione anguli omnes FTB, hinc itaque est quam proximè TF in verâ positione lineæ Apsidum & F centrum orbitæ.

tricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus lunæ locus in orbe & diſtantia ejus à terrâ, (k) idque per methodos notiſſimas.

(l) In perihelio terræ, propter majorem vim ſolis, centrum orbis lunæ velociùs movetur circum centrum C quam in aphelio, idque in triplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inversè. (m) Ob æquationem centri ſolis in argumento annuo comprehenſam, centrum orbis lunæ velocius movetur in epicyclo BDA in duplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inversè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione ſimplici diſtantiæ inversè; ab orbis centro D agatur recta DE verſus apogæum lunæ, ſeu rectæ TC parallela, & capiatur angulus EDF æqualis exceſſui argumenti annui prædicti ſupra diſtantiam apogæi lunæ à perigæo



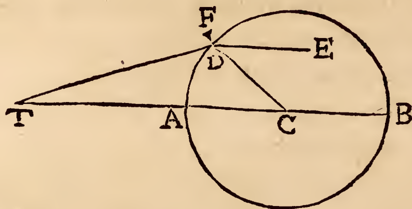
(k) * *Per Methodos notiſſimas.* De iis agitur Lib. I. Prop. XXXI.

(l) * *In perihelio.* Si nulla eſſet vis Solis quieſcerent Apſides orbitæ Lunaris, nec mutaretur ejus excentricitas, motum itaque centri orbitæ Lunaris F in circulo BFHA vi Solari eſſe debitum liquet, omnes verò errores ex vi Solari ortos, eſſe proximè in triplicatâ ratione diſtantiæ terræ à Sole ſæpius obſervatum eſt, hinc motus centri F orbitæ Lunaris in circulo BFHA eâ proportione variari debet.

(m) * *Ob Æquationem centri Solis in argumento annuo comprehenſam* &c. Arcus FB vel arcus BD in figura Textus eſt duplus diſtantiæ Apſidis à ſyzygiâ, hoc eſt, duplus diſtantiæ Apſidis à Sole, itaque punctum F invenitur locum Solis à loco Apſidis tollendo, reſidui in conſequentia duplum eſt arcus BF, & id reſiduum eſt argumentum annuum, fingatur apſidem immotam eſſe ſolem vero moveri, pendebit arcus BF ex motu Solis fietque major quo celerius Sol movebitur, ſed motus Solis eſt inverſe in ratione duplicatâ diſtantiarum Terræ à Sole (not. o), ergo motus puncti F ex hac conſideratione ſequitur rationem inverſam duplicatam diſtantiæ Terræ à Sole. 121.

De Mundi Systemate.

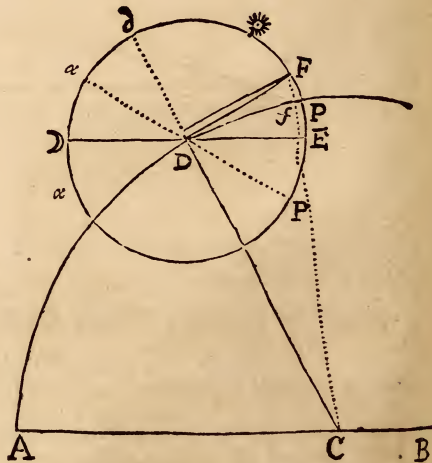
gæo ſolis in conſequentia; vel (n) quod perinde eſt, capiatur angulus CDF æqualis complemento anomaliæ veræ ſolis ad gradus 360. Et ſit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad diſtantiam mediocrem ſolis à terra, & motus medius



diurnus ſolis ab apogæo lunæ ad motum medium diurnum ſolis ab apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & $52'. 27''. 16'''.$ ad $59'. 8''. 10'''.$ conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et

121. (n) * *Vel quod perinde eſt.* Si circa punctum D radio D F deſcribatur circulus E F ☉ d α ☽ P; In quo ſit E Lunæ Apogæum è centro D ſpectatum; ☽ Lunæ Perigæum, α Apogæum Solis, P Solis perigæum, ☉ locus Solis, cum ex Conſtructione ſit d D E $=$ D C B, ideoque duplum argumenti annui, ſive duplum diſtantiæ ☉ E, erit E D C æqualis ſemicirculo dempto 2☉E, ſive erit $\frac{1}{2}c - 2$ ☉E; Itaque ſi ei arcui EDC addatur EDF æqualis annuo argumento dempta diſtantia Apogæi Lunæ a Perigæo Solis, ſive ☉E $-$ PE, fiet C D F $= \frac{1}{2}c -$ ☉ E $-$ P E, ſed cum $\frac{1}{2}c$ ſit æqualis diſtantiæ Perigæi Solis ab ejus Apogæo erit $\frac{1}{2}c =$ P E ☉ α, ex quo itaque detracto P E & E ☉, eſt C D F $=$ ☉α ſive diſtantiæ Solis ab Apogæo in antecedentia, aut quod idem eſt complemento ad 360 gr. arcus α ☽ P E F ☉, qui arcus eſt diſtantia Solis ab Apogæo ſuo, in conſequentia ſumpta, quæ eſt Solis anomalia vera.

Si punctum P foret in conſequentia reſpectu puncti E, tunc E D F faciendus eſſet æqualis argumento annuo addita diſtantia Perigæi Solis à Lunâ, ſicque fieret C D F $= \frac{1}{2}c -$ ☉ $+$ P E & quoniam in eo



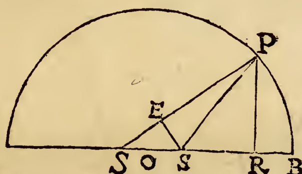
caſu eſt $\frac{1}{2}c =$ P ☉ ☽ α, & $-$ ☉E $+$ PE $= -$ P ☉, erit C D F $=$ ☉ ☽ α, ſive erit diſtantia Solis ab Apogæo in Antecedentia poſito, hoc eſt, complementum ad 360 gr. arcûs α ☽ P E F ☉, qui arcus eſt diſtantia Solis ab Apogæo ſuo in conſequentia ſumpta, quæ eſt Solis anomalia vera.

Et concipe centrum orbis lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum est D, & radium DF, interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli $DABD$. Hâc (o) enim ratione velocitas, quâ centrum orbis lunæ in lineâ quâdam curvâ circum centrum C descriptâ movebitur, erit reciprocè ut cubus distantiæ solis à terrâ quamproximè, ut oportet.

Com-

(o) * *Hâc enim ratione.* Æquationem hujus motus centri orbis Lunaris quæ adhibenda est ut moveatur velocius quam per primam constructionem, idque in simplici ratione distantiæ inversè esse proportionalem æquationi centri Solis constat eadem demonstratione quâ in notis m & n pag. 519. de Æquationibus annuis Apogæi & nodi idem probatum fuit.

Dicatur a mediocris distantia Terræ à Sole, quævis alia distantia dicatur $a \pm x$, motus medius centri orbis Lunaris in distantia a sit o, & quia ille motus est in triplicatâ ratione distantiæ Solis à Terra inversè, in aliâ quavis distantiâ Terræ à Sole erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} o$ & formando seriem, erit $o \mp \frac{3x}{a} o$, sed si fingeretur eum motum sequi proportionem inversam duplicatam distantiarum, inveniretur is motus singulis in locis $o \mp \frac{2x}{a} o$, & ita assumptus fuerat in primâ constructione (vid. not. m præced.), ergo singulo in loco error commissus per hanc fictionem foret $\mp \frac{x}{a} o$; Pariter si Solis motus medius dicatur m ostensum est (not. n pag. 519. 520.) differentiam inter motum medium & verum esse $\mp \frac{2x}{a} m$; Ideoque cum ratio $\mp \frac{x}{a} o$ ad $\mp \frac{2x}{a} m$, sit in singulis punctis x eadem, Æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a} o$ orta erit proportionalis Æquationi ex $\mp \frac{2x}{a} m$ ortæ, hoc est erit proportionalis Æquationi centri Solis; Sed Æquatio centri Solis, est quamproximè proportionalis sinui anomaliæ Solis not. 372. Lib. I. nam illic demonstratur quod si ex utroque foco S & f orbitæ 121.



Solis ducantur lineæ ad punctum P erit BfP anomalia media, & BSP anomalia vera, ideoque angulus SPf erit Æquatio, ducatur ergo ex f in SP perpendiculum fE & ex P perpendiculum PR ob similitudinem Triangulorum SfE & fPR erit, SP ad PR ut Sf ad fE, sive sumendo SP pro radio constanti (quod est proximè verum) erit, ut Radius ad Sinum Anomaliæ veræ ita dupla excentricitas ad sinum æquationis Solis, sive ad ipsam Æquationem, nam in parvis angulis, arcus pro sinubus sumi possunt. Hinc sinus anomaliæ veræ est ad æquationem centri Solis in Ratione datâ radii nempe ad duplam excentricitatem, hinc itaque, Æquatio orta ex errore $\mp \frac{x}{a} o$, erit ut sinus Anomaliæ Solis, sed

An-

DE MUNDI SYSTEMATE.

Computatio motus hujus difficilis eſt, ſed facilior reddetur per approximationem ſequentem. Si diſtantia mediocris lunæ à terra ſit partium 100000, & eccentricitas *TC* ſit partium 5505 ut ſupra: recta *CB* vel *CD* invenietur partium $1172\frac{3}{4}$ & recta *DF* partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad diſtantiam *TC* ſubtendit angulum ad terram quem tranſlatio centri orbis à loco *D* ad locum *F* generat in motu centri hujus: & eadem recta dupli-

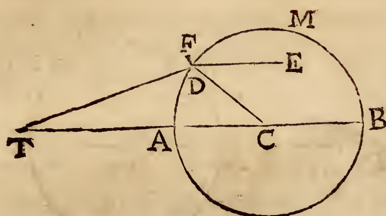
cata

121. Angulus C D F eſt complementum ejus anomaliæ ad 360gr. ſinus autem arcus alicujus & ſinus ejus complementi ad 360gr. ſunt unum & idem, ergo Æquatio ex errore $\mp\frac{x}{a}o$ nata eſt proportionalis ſinui angulorum C D F & ſi ſumatur Radius D F æqualis æquationi maximæ hinc natæ, cæteri omnes ſinus angulorum CDF erunt ipſæ æquationes in datâ Solis anomaliâ, ſi itaque ſumantur à puncto D arcus D f in circulo B D A æquales illis ſinubus, erit f verus locus centri orbitæ Lunaris, & quia ob exiguitatem horum ſinuum reſpectu radii C D, linea per C & f ducta cadit etiam in F ſumi poteſt F ut verus locus centri orbitæ Lunaris.

Invenitur autem Æquatio maxima orta ex errore $\mp\frac{x}{a}o$; ſi attendatur quod Solis motus eſt ubique $m \mp \frac{2x}{a}m$, ſive $m \mp \frac{x}{a} \times 2m$ ideoque ſummam omnium errorum ex errore $\frac{x}{x}o$ fore ad ſummam omnium errorum in ſolis motu genitorum ut o ad $2m$, ſive Æquationem quæſitam eſſe ad Æquationem Solis ut eſt motus centri orbitæ Lunaris per circulum B D A ad duplum motum medium Solis reſpectu ſui Apogæi, ſed quoniam arcus B D ſunt ſemper dupli diſtantiæ Solis ab Apogæo Lunæ mo-

tus

cata in situ parallelo ad distantiam superioris umbilici orbis lunæ à terra, subtendit eundem angulum, quem utique translatio illa generat in motu umbilici, & ad distantiam lunæ à terrâ (p) subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri secunda dici potest. Et hæc æquatio, in mediocri lunæ distantia à terrâ, est ut sinus anguli, quem recta illa DF cum recta à puncto F ad lunam ducta continet quamproximè, & ubi maxima est evadit 2'.

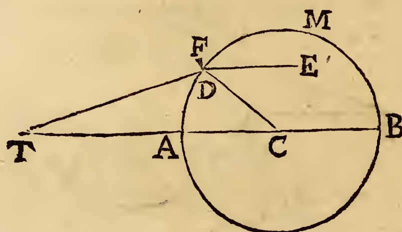


tus diurnus centri orbis Lunaris per circulum B D A est etiam duplus motus Solis ab Apogæo Lunæ, hinc Æquatio quæsita est ad maximam Æquationem Solis ut est radius D C ad distantiam mediocrem Solis à Terra & ut duplus motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad duplum motum diurnum Solis ab Apogæo suo conjunctim, maxima autem Solis Æquatio est ipsa dupla excentricitas orbis magni, hinc Æquatio quæsita sive radius D F est ad duplam excentricitatem ut D C ad distantiam mediocrem Solis à Terra, & ut motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum diurnum Solis ab Apogæo suo conjunctim, undè vicissim est etiam D F ad D C ut dupla excentricitas ducta per motum diurnum Solis ab Apogæo Lunæ, ad distantiam mediocrem Solis à Terrâ ductam per motum diurnum Solis ab Apogæo suo.

(p) * *Subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu Lunæ.* Scilicet tota orbita Lunæ, ipsaque Luna per motum centri orbitæ ex D in F translatum ex proprio loco mota censeri debet in locum alium per lineam ipsius D F duplam ipsique Parallelam, cum itaque distantia mediocris sit partium 100.000, si hæc linea quæ duplicata est 70.4, angulum rectum cum linea à Terra ducta efficiat quo casu maximam æquationem facit, ipsa subtendet angulum 2' 25'' siquidem sinus duorum minutorum est 58.18 sinus trium 87.27. In aliis autem hujus lineæ positionibus respectu lineæ à Terrâ ductæ, anguli quos subtendet erunt ad istum ut est sinus Anguli quem facit cum lineis à Terrâ ductis ad Radium; Nam in Triangulis in quibus duæ lineæ sunt constantes sed earum angulus variabilis, si una ex iis lineis alterius respectu sit minima, Tertia linea pro constante assumi potest, est verò ad minimam lineam, ut sinus anguli variabilis ad sinum anguli oppositi minimæ lineæ; hinc sinus anguli variabilis & sinus anguli minimi sunt in ratione datâ. Ergo ut sinus 121.

De Mundi Systemate.

2'. 25''. (q) Angulus autem quem recta DF & recta à puncto F ad lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum EDF ab anomalia media lunæ, vel addendo distantiam lunæ à sole ad distantiam apogæi lunæ ab apogæo solis.



Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita 2'. 25''. sunt ad æquationem centri secundam, addendam, si summa illa sit minor semicirculo, subducendam si major. Sic habebitur ejus longitudo in ipsis luminarium syzygiis.

Cum

121. sinus Anguli recti sive Radius ad 2'. 25''. ita sinus anguli quem facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad DF, ad angulum quo locus Lunæ mutatus cernitur.

(q) * *Angulus autem quem* facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad DF, & in ipso loco Lunæ posita, æqualis est illi quem facit recta DF & recta à puncto F ad Lunam ducta, saltem proximè quia F est centrum orbitæ Lunaris à quo Terra non multum distat; Fingatur, produci lineam DF & ex puncto F duci lineam Parallelam lineæ DE, quæ ad Apogæum Lunæ tendit, & ex eodem puncto F aliam duci lineam ad Lunam, angulus hujus lineæ cum linea DE erit anomalia media Lunæ ergo angulus hujus lineæ cum linea DF producta erit differentia anguli EDF & anomaliæ mediæ Lunæ, sive quia erat EDF differentia argumenti annui, & distantiæ Apogæi Lunæ à Perigæo Solis si ex Anomalia media Lunæ tollatur argumentum annuum superest distantiæ Lunæ à Sole, cui addi debet distantia Apogæi Lunæ & Perigæi Solis, sive (quia semi circuli additi vel detracti non mutant valores Angulorum eorumque sinuum) distantia Apogæi Lunæ & Apogæi Solis: cætera facile patebunt ex figuræ descriptione; Exemplum esto in conjunctione ubi est ☉ locus Solis & Lunæ, liquet enim quod quando punctum ☉ est in consequentia respectu puncti F, Luna quæ transfertur per lineam parallelam lineæ DF transfertur in Antecedentia; dum è contrà punctum ☉ est in antecedentia respectu puncti F, Luna transfertur in consequentia; est vero F☉=PE, cum ergo AL est major semicirculo, ut in figura, tunc PE sive F☉ est minor semicirculo, est ergo ☉ in consequentia respectu puncti F, hinc subducenda est ea Æquatio; sit verò AE minor semicirculo-

Cum atmoſphæra terræ ad uſque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem ſolis, & refringendo ſpargat eandem in umbram terræ, & ſpargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: (r) Ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipſibus lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria vero lunæ primò in ſyzygiis, deinde in quadraturis, & ultimò in octantibus per phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios ſolis & lunæ ad tempus meridianum in obſervatorio regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommodè ſequentes adhibebit: nempe motum medium ſolis ♑ 20gr. 43′. 40″., & apo-

lo erit PE major ſemicirculo ut & F☉, idéoque eſt ☉ in antecedentia reſpectu F promovetur itaque Luna propter hanc Æquationem; cæterum non tantum in luminarium Syzygiis, ſed ad cæteros Lunæ adſpectus hæc adaptari poſſunt, verum commodius eſt Aſtronomis, Theoriam ſuam ex ſyzygiarum obſervationibus explorare & conſtituere.

(r) * *Ad diametrum umbræ.* Parallaxis eſt angulus qui ſubtenditur per ſemi-Diametrum terræ ex Luna ſpectatæ; Jam vero propter atmoſphæræ actionem in radios lucis idem evenit reſpectu umbræ ac ſi ſemi-Diameter terræ 35 vel 40 milliaribus augeretur, nam radii illâc pergentes rectam viam non ſequuntur, ſed introrſum in umbram conjiciuntur, hinc carens

& apogæi ejus ♋ $7^{gr.}$ $44'$. $30''$, & motum medium lunæ ♒ $15^{gr.}$ $21'$. $00''$., & apogæi ejus ♓ $8^{gr.}$ $20'$. $00''$, & nodi aſcendentis ♌ $27^{gr.}$ $24'$. $20''$.; & differentiam meridianorum obſervatorii hujus & obſervatorii regii *Pariſienſis* $0^{hor.}$ $9^{min.}$ $20^{sec.}$ motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum ſatis accuratè habentur.

221. carent radiis ſolaribus loca quæ trans Atmoſphæram eos recipere deberent, fungitur ergo Atmoſphæra vice corporis opaci, & umbra ea de cauſa dilatari debet quaſi ſemi Diameter terræ in 35 vel 40 milliaribus foret aucta.

ERRATA.

Pag. 400. Not. col. 2. lin. 8. & pag. 402. N. col. 1. l. 2. *pro* 110. *lege* 112. Pag. 498. Not. col. 1. l. 17. & 18. Luna *lege* Terra. *Ibid.* col. 2. l. 8. quæ factam erit *lege* factam, quæ erit. Pag. 500. col. 1. l. 27. *pro* 107.48. *lege* 108.48. Pag. 501. col. 1. linea 5ª. ante ultimam $\frac{1}{2} r^2$ *lege* $\frac{1}{4} r^2$. *Ibid.* lineâ 4ª. ante ultimam & ultimâ & col. 2. lin. 2. *pro* 40.449375 *lege* 40.89875, *ibidem*, *pro* 5.52939 *lege* 5.59082. *Ibid.* lin. 3. *pro* .0011297456r *lege* .0011448782r. *Ibid.* lin. 5. *pro* .06372125 *lege* .065590872. *Ibid.* lin. 6. *pro* 3'82338. & *pro* .82338. *lege* 3'.9354. & .9354. Lin. 7. *pro* 49''4. *lege* 56''. Lin. 8. *pro* 3'.49''. *lege* 3'.56''. Lin. 30. *pro* 3'' *lege* 11''. Pag. 502. col. 1. lin. 28. *pro* graduum 5.19'.36''. *lege* graduum 5°.19'.30''.

Serò quidem hæc tertii libri continuatio in lucem prodit propter varia Editoris negotia, citiùs edetur ultima hujus libri continuatio, quoniam ejus operâ nimis tardâ non utemur in poſterum.



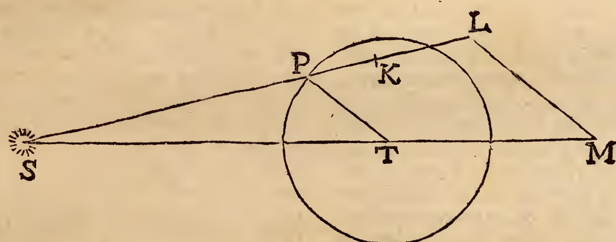
PHI-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO II.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.



SOlis vis *ML* ſeu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1. ad 638092,6. Et vis *TM–LM* ſeu 2*PK* in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro terræ, id eſt, in (z) ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideo-

(z) * *In ratione* $60\frac{1}{2}$ *ad* 1. Quemadmodùm in prop. 25ª. demonſtratum eſt eam partem vis centripetæ Lunaris in Solem quâ motus ejus circà terram perturbatur

121.

De Mundi Systemate.

ideoque vis prior in ſuperficie terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant à ſole. Vi alterâ, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſitâ. (x) Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus diſtant à ſole, ſive elevet eandem in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis, hæc ſumma erit tota ſolis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant à ſole nil ageret.

Hæc eſt vis ſolis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi ſol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſuâ diſtantiâ à terrâ. (a) In aliis ſolis poſitionibus vis ad mare attollendum eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directè & cubus diſtantiæ ſolis à terrâ inversè.

Co-

221. batur & quæ radio orbitæ Lunaris erat proportionalis, eſſe ad vim centripetam Lunæ in terram in duplicatâ ratione temporum periodicorum terræ circà Solem & Lunæ circà terram, ſimili planè modo probatur eam quoquè partem vis centripetæ in Solem quæ analoga eſt radio terræ eſſe ad vim centripetam Lunæ in terram in ratione radii terræ ad radium orbitæ Lunaris directè & ratione duplicatâ temporis periodici terræ circà Solem ad tempus periodicum Lunæ circà terram inversé. Quarè vires Solis ad perturbandos motus corporum propè ſuperficiem terræ ſunt ad vires Solis ad perturbandos motus Lunæ ut radius terræ ad radium orbitæ Lunaris; hoc eſt, ut 1 ad $60\frac{1}{2}$.

(x) * *Summa virium* eſt ad vim gravitatis ut 3 ad 38604600 ſivè ut 1 ad 12868200.

(a) * *In aliis Solis poſitionibus.* Hâc vi aqua maximè deprimitur ubi Sol verſatur in horizonte & maximè elevatur ubi Sol in vertice loci verſatur. Depreſſio autem & elevatio aquarum magis ac magis decreſcit quò altiùs Sol aſcendit ſuprà horizontem, aut à vertice deſcendit. Prætereà hæc depreſſio aut elevatio circa initium & finem lentiùs, circà medium verò celeriùs minuitur; ſed hæc contingent ſucceſſiva aquarum incrementa & decrementa, ſi vis maxima Solis in vertice loci exprimatur per diametrum circuli, hoc eſt, per ſinum verſum 180°. ſeù duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem, in aliis autem Solis poſitionibus vis eadem exhibeatur per ſinus verſos altitudinum duplicatarum; Quarè in variis Solis poſitionibus, vis ad marè attollendum ſumi poteſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem, ſeclusâ tamen perturbatione quæ ex variâ Solis à tellure diſtantiâ oritur. At vis Solis augetur vel minuitur quò propiùs ad terram accedit aut longiùs ab eâ recedit, idque in ratione triplicatâ diſtantiarum inversâ (cor. 14. prop. 66. lib. 1.) conſiderari itaquè poterit, vis Solis ad mare attollendum ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem loci directè & cubus diſtantiæ Solis à Terrâ inverſè. Cæterùm tota hæc propoſitio eleganter admodùm calculo tractata legitur in tribus Diſſertationibus quæ Tom. 3°. adjectæ ſunt.

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ à diurno terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſurâ pedum *Pariſienſium* 85472, ut ſupra in prop. XIX; vis ſolaris de quâ egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1. ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, (b) efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus diſtant à ſole, menſurâ tantùm pedis unius *Pariſienſis* & digitorum undecim cum triceſimâ parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

(c) Vis lunæ ad mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim ſolis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differen-

(b) * *Efficiet ut altitudo aquæ.* Quoniam ex variis pendulorum obſervationibus & nuperrimè inſtitutis gradûs meridiani menſuris ſub circulo polari, terra altior eſt ſub æquatore quam ex Theoriâ Newtonianâ prodiit (prop. 19. lib. hujus) paulò augenda erit altitudo aquæ in hoc corollario definita. Obſervandum autem eſt corollarium illud rigorosè verum non eſſe; Newtonus enim ex differentiâ diametri æquatoris & axis terræ per ſimplicem proportionem colligit altitudinem aquæ ex vi Solis oriundam; uterque tamen caſus eſt longè diverſus, primus ſiquidem pendet à quadraturâ circuli, alter verò refertur ad quadraturam hyperbolæ (ut patet ex cor. 2. prop. 90. lib. 1. & not. 106. lib. hujus). Sed quam parùm à veritate diſcrepet præſens corollarium apparet ex computo inito in Diſſertatione Clariſſ. Macclaurin prop. 5. 121.

(c) * *Vis Lunæ ad Mare movendum.* Vid. cap. 6. num. 10. in Diſſertatione Clariſſ. Bernoullii & prop. 9. in Diſſertatione Clariſſ. Macclaurini.

rentiâ oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore verſantium & mediocriter à terrâ diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æſtus maris ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi* ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æſtus in ſyzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem æſtus in portu *Briſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

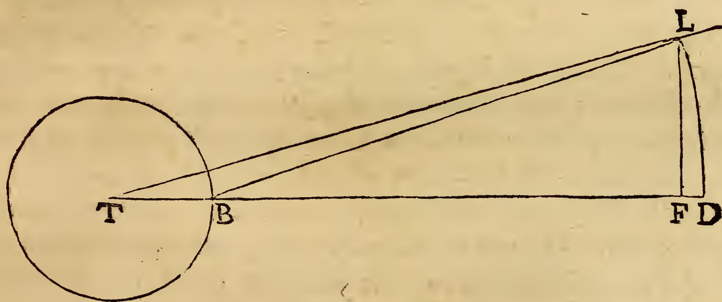
Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æſtus maximi non incidunt in ipſas luminarium ſyzygias, ſed ſunt tertii à ſyzygiis ut dictum fuit, ſeu proximè ſequuntur tertium lunæ poſt ſyzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut à *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt horam à novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam à novilunio vel plenilunio plus minus quadrageſimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam ſeptimam circiter ab appulſu lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè ſequuntur appulſum lunæ ad meridianum, ubi luna diſtat à ſole vel ab oppoſitione ſolis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in conſequentia. Æſtas & hyems maximè vigent, non in ipſis ſolſtitiis, ſed ubi ſol diſtat à ſolſtitiis decimâ circiter parte totius circuitus, ſeu gradibus plus minus 36 vel 37. Et ſimiliter maximus æſtus maris oritur ab appulſu lunæ ad meridianum loci, ubi luna diſtat à ſole decimâ circiter parte motus totius ab æſtu ad æſtum. Sit diſtantiâ illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et (d) vis ſolis in hâc diſtantiâ lunæ à ſyzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum

121. (d) * *Et vis Solis.* Hanc virium proportionem non multùm à verò differre patet ex iis quæ immediatè præcedunt.

motum maris à vi lunæ oriundum, quam in ipsis syzygiis & quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S scribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis lunæ in quadraturis, ob declinationem lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum diminuitur (e) in duplicatâ ratione sinus complementi declinationis quamproximè. Et propterea vis lunæ in his quadraturis est tantùm 0,8570327 L. Est igitur L+0,7986355S ad 0,8570327L−0,7986355S ut 9 ad 5.

(f) Præterea diametri orbis, in quo lunâ sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia



(e) 122 * *In duplicatâ ratione.* Sit TBD planum æquatoris, T centrum telluris, sitque Luna in L, erit angulus LBD, mensura declinationis ab æquatore, seu, ob exiguum angulum TLB, erit declinatio illa quamproximè æqualis angulo LTD, cujus anguli cosinus est TF, sumpto TL, pro radio. Jam vis quæ aquam in loco æquatoris B, directè trahit à centro T, ubi Luna versatur in plano æquatoris in D, est ad vim quæ eamdem aquam directè à centro trahit, ubi Lunæ est in L, ut TL ad TF, hoc est, ut radius ad sinum complementi declinationis LTD, sepositâ vi aquæ centripetâ versus T. Sed, auctâ vi illâ centripetâ, in eâdem ratione minuitur vis altera aquam à centro trahens; Quare, componendo, vis Lunæ in loco D, est ad vim ejus in L, ut quadratum sinûs totiùs TL, ad quadratum sinûs complementi TF, declinationis Lunæ LTD. 122.

(f) * *Præterea diametri orbis.* (Prop. 28. Lib. hujus).

DE MUNDI SYSTEMATE.

tia lunæ à terrâ in ſyzygiis eſt ad diſtantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ à ſyzygiis, ubi æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. (g) Vires autem lunæ ad mare movendum ſunt in triplicatâ ratione diſtantiarum inversè, ideoque vires in maximâ & minimâ harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantia ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. (h) Unde fit $1,017522L + 0,7986355\,S$ ad $0,9830427 \times 0,8570327L - 0,7986355\,S$ ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis ſolis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cum aqua vi ſolis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum triceſimâ parte digiti, eâdem vi lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $\frac{5}{22}$, & vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi luna eſt in perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè ſufficit, & quantitati motuum probè reſpondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut (i) plenus ſit æſtus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor eſſe debet quam graduum nonagin-

122. (g) * *Vires autem Lunæ.* (Cor. 14. Prop. 66. Lib. 1.).

(h) * *Undè fit.* Ut ex hâc analogiâ vis L Lunæ colligi poſſit ducenda ſunt media & extrema, hæcque orietur æquatio $1.017522\,L \times 5 + 0.7986355\,S \times 5 = 0.9830427 \times 9 \times 0.857032\,L - 0.7986355\,S \times 9$; & tranſponendo hæc habetur proportio $S : L = 0.9830427 \times 0.8570327 \times 9 - .017522 \times 5 : 0.7986355 \times 5 + 0.7986355 \times 9$. Jam verò ſumptis horumce numerorum Logarithmis, & quæſitis reſpondentibus numeris in vulgaribus Logarithmorum tabulis, prodit S ad L ut 1 ad 4.4815 quamproximè.

(i) * *Ut plenus ſit æſtus.* (109).

naginta. In mari *Æthiopico* ascensus aquæ intra tropicos minor est quam in zonis temperatis, propter angustiam maris inter *Africam* & australem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus nostris angustis descendere debeat. Eâ de causâ fluxus & refluxus in insulis, quæ à littoribus longissime absunt, perexiguus esset solet. In portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent esse solito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepstowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normannia*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadosorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad littora vero quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo æstus respondet viribus solis & lunæ.

Corol. 2. Cum vis lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perspicuum est quod vis illa sit longè minor quam quæ vel in experimentis pendulorum, vel in staticis aut hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. (k) In æstu solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Co-

(k) * *In æstu solo marino.* Hæ quidem vires ad movendum mare sufficiunt, sed alios effectus sensibiles producere non possunt. Etenim granum unum cum pondere granorum 4000 etiam accuratissimâ librâ comparatum sentiri vix potest, vis autem Solaris est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, summaque virium Solis & Lunæ est ad eandem vim gravitatis ut 1 ad 2032890. Quarè patet vires illas licet conjunctas multò minores esse quam ut pondus corporis cujusvis in Librâ appensi sensibiliter augere vel minuere possint. Unde nec in experimentis pendulorum, Baro- 122.

De Mundi Systemate.

Corol. 3. Quoniam vis lunæ ad mare movendum eſt ad ſolis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per corol. 14. prop. LXIV. lib. 1.) ſunt ut denſitates corporum lunæ & ſolis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas lunæ erit ad denſitatem ſolis ut 4.4815 ad 1 directè, & cubus diametri lunæ ad cubum diametri ſolis inversè: id eſt (cum diametri mediocres apparentes lunæ & ſolis ſint 31′. 16″½ & 32′. 12″) ut 4891 ad 1000. (l) Denſitas autem ſolis erat ad denſitatem terræ ut 1000 ad 4000; & propterea denſitas lunæ eſt ad denſitatem terræ ut 4891 ad 4000 ſeu 11 ad 9. Eſt igitur corpus lunæ denſius & magis terreſtre quam terra noſtra.

Corol. 4. Et cum vera diameter lunæ ex obſervationibus aſtronomicis ſit ad veram diametrum terræ ut 100 ad 365; erit maſſa lunæ ad maſſam terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et (m) gravitas acceleratrix in ſuperficie lunæ erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie terræ.

Corol. 6. (n) Et diſtantia centri lunæ à centro terræ erit ad diſtantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

(o) *Corol* 7. Et mediocris diſtantia centri lunæ à centro terræ in octantibus lunæ erit ſemidiametrorum maximarum terræ 60⅖ quamproximè. Nam terræ ſemidiameter maxima fuit pedum *Pariſienſium* 19658600, & mediocris diſtantia centrorum terræ & lunæ, ex hujuſmodi diametris 60⅖ conſtans, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per corollarium ſupe-

122. Barometrorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis ſenſibiles edent effectus. Idem corollarium eleganter demonſtravit Clariſſ. Eulerus num. 30. Diſſertationis de fluxu & refluxu maris.

(l) * *Denſitas autem Solis.* (Cor. 3. Prop. 8. Lib. hujus).

(m) * *Et gravitas acceleratrix.* Nam gravitas acceleratrix eſt ut maſſa directè & quadratum diſtantiæ à centro, hoc eſt, ſemidiametri inverse (cor. 1. prop. 75. lib. 1.). Ideòque gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ eſt ad gravitatem acceleratricem in ſuperficie terræ ut 1 × 133224 ad 39.788×1000, hoc eſt, ut 1 ad 3 circiter.

(n) * *Et diſtantia centri Lunæ.* (61. Lib. 1.).

(o) * *Coroll.* 7. Computum eodem planè modo initur ac in prop. 4. lib. hujus.

ſuperius) eſt ad diſtantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque diſtantia poſterior eſt pedum 1158268534. Et cum luna revolvatur, reſpectu fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{9}$; ſinus verſus anguli, quem luna tempore minuti unius primi deſcribit, eſt 12752341, exiſtente radio 1000,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illa, qua retinetur in orbe, cadendo in terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi luna cadendo tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,8538067. Et ad ſexageſimam partem diſtantiæ lunæ à centro terræ, id eſt ad diſtantiam pedum 197896573 à centro terræ, corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad diſtantiam pedum 19615800, quæ ſunt terræ ſemidiameter mediocris, grave cadendo deſcribet pedes 15,11175, ſeu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit deſcenſus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in prop. xx. deſcriptam, deſcenſus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* exiſtente exceſſu quaſi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in latitudine *Lutetiæ* cadendo in vacuo deſcribent tempore unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et ſi gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur à motu diurno terræ in illa latitudine; gravia ibi cadendo deſcribent tempore minuti unius ſecundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{2}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* ſupra oſtenſum eſt ad prop. IV, & XIX.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum terræ & lunæ in ſyzygiis lunæ eſt ſexaginta ſemidiametrorum maximarum terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri circiter. Et in quadraturis lunæ diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt $60\frac{5}{6}$ ſemidiametrorum terræ. Nam hæ duæ diſtantiæ ſunt ad diſtantiam medio-

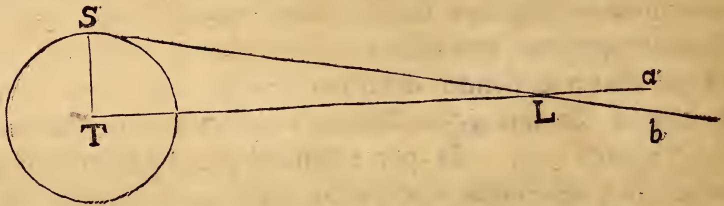
De Mundi Systemate.

mediocrem lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per prop. XXVIII.

Corol. 9. Diſtantia mediocris centrorum terræ & lunæ in ſyzygiis lunæ eſt ſexaginta ſemidiametrorum mediocrium terræ cum decimâ parte ſemidiametri. Et in quadraturis lunæ diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt ſexaginta & unius ſemidiametrorum mediocrium terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri.

Corol. 10. In ſyzygiis lunæ (p) parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, eſt $57'.20''$, $57'.16''$, $57'.14''$, $57'.12''$, $57'.10''$, $57'.8''$, $57'.4''$ reſpectivè.

In



823. (p) 123. * *Parallaxis* Lunæ horizontalis in diverſis latitudinibus ſeu diſtantiis ab æquatore determinari poteſt. Parallaxis Lunæ horizontalis eſt differentia locorum in quibus Luna in horizonte poſita, ex centro & ſuperficie terræ obſervata inter ſtellas fixas conſpicitur. Hæc autem locorum diſtantia æqualis eſt angulo ſub quo videretur ſemidiameter terræ ex loco Lunæ obſervata. Sit Luna in horizonte conſtituta in L; obſervator in ſuperficiei terreſtris loco S, Lunam inter ſtellas referet in b, ſed idem obſervator in centro terræ T poſitus Lunam referet in a. Eſt igitur differentia locorum æqualis aLb, qui æquatur angulo SLT, ſub quo ſemidiameter terræ è loco Lunæ L ſpectatur. Sed quoniam terra eſt figuræ ſphæroidicæ, ſemidiametri ejus in diverſis latitudinibus inter ſe differunt & eſt ſemidiameter maxima ſecundum æquatorem ad minimam ſecundum polos, ſive in latitudine 90° ut 19658600 ad 19573000 circiter, eſtque earum differentia 85472 (prop. 19 lib. huj.) in aliis latitudinibus differentia inter diametrum maximam & quamvis aliam eſt ad differentiam priorem in ratione duplicatâ ſinûs totius ad ſinum cujuſvis latitudinis quamproximè (prop. 20. lib. huj.) hinc in ſyzigiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris, hoc eſt, ubi diſtantia centrorum Lunæ & terræ eſt ſemidiametrorum maximarum terræ 59.366 circiter (cor. 8.) ſub æquatore invenitur dicendo, ut eſt diſtantia Lunæ à terrâ LS = 59.366, ad ſemidiametrum maximam TS = 1, ità ſinus totus ad ſinum anguli TLS, qui eſt $57'\ 20''$. In aliis Lunæ locis minuitur parallaxis in eâdem ferè ratione ac ſemi-

In his computationibus attractionem magneticam terræ non consideravi, cujus utique quantitas perparva est & ignoratur. Siquando vero hæc attractio investigari poterit, & mensuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum maris, & parallaxis lunæ cum diametris apparentibus solis & lunæ ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: (q) licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.

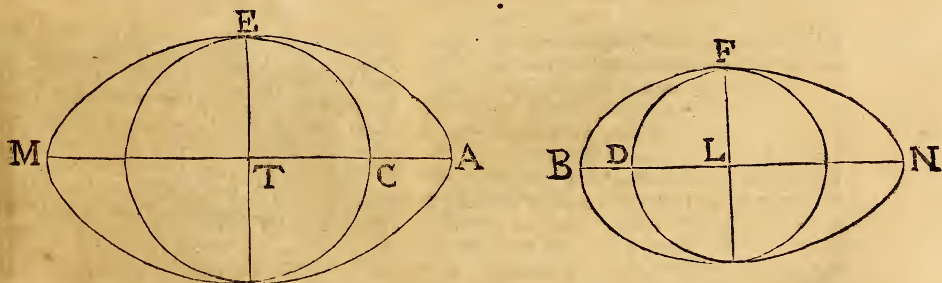
PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire figuram corporis lunæ.

Si corpus lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum esset ad vim lunæ, quâ mare nostrum in partibus & sub lunâ & lunæ oppositis attollitur, (r) ut gravitas acceleratrix lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in lunam, &

semidiametri terræ, & hinc prodeunt parallaxes in latitudinibus graduum 0. 30. 38. 45. 52. 60. 90. quales à Newtono determinantur.

(q) * *Licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.* Theoriæ Newtoni de fluxu & refluxu maris plurima hic potuissemus adjungere quorum ope calculos accuratiùs repetere licuisset. Verùm materiam exhauriunt elegantissimæ dissertationes quas tom. 3. addidimus. 125.



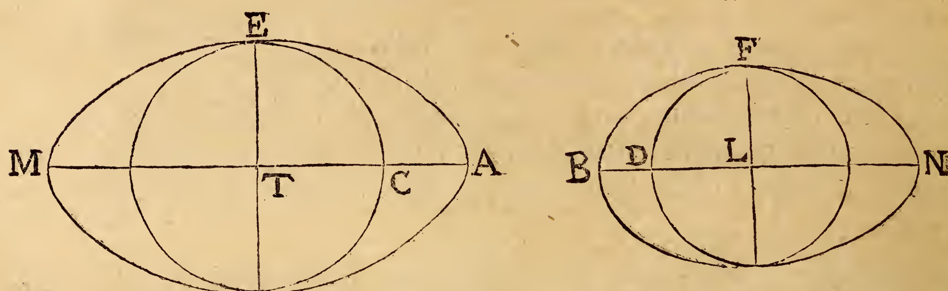
(r) * *Ut gravitas acceleratrix.* Sit T, globus terræ fluido satis profundo E A, coopertus, sitque L, globus Lunæ coopertus fluido F B. Si gravitas acceleratrix Terræ in Lunam æqualis esset gravitati acceleratrici Lunæ in terram, hoc est si æqualis esset materiæ quantitas in Lunâ & in Terrâ, globi duo T, L, sese componerent in figuras sphæroidicas similes quarum axes M A, B N, jacerent in directum

 (106).

De Mundi Systemate.

& diameter lunæ ad diametrum terræ conjunctim; id est, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, seu 1081 ad 100. Unde cum mare nostrum vi lunæ attollatur ad pedes $8\frac{3}{5}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Eáque de causâ figura lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Co-



123. (106). Cum enim omnia hinc inde ponantur æqualia præter ipsam molem, nulla est ratio cur figuræ illæ non sint inter se similes, alteraque in acutiorem sphæroidem desinat. Quare in casu præsenti, erit BL ad LF, ut TA ad TE, & vicissim BD ad AC sicut LF ad TE, hoc est, si æqualis esset gravitas acceleratrix terræ in Lunam atque Lunæ in terram, altitudo fluidi Lunaris in partibus proximis & remotissimis suprà globum Lunæ, esset ad altitudinem fluidi terrestris analogam suprà globum terræ ut diameter Lunæ ad diametrum terræ. Rursùs, si terra & Luna æquales habeant diametros, erunt altitudines fluidi suprà globos ut gravitates acceleratrices respectivè (prop. 74. lib. 1.). Quarè si neque gravitas acceleratrix in Lunam æqualis sit gravitati acceleratrici Lunæ in terram, nec diameter Lunæ diametro terræ æqualis, vis terræ ad elevandum fluidum in partibus citimis & ultimis erit ad vim ipsam Lunæ quâ mare nostrum in partibus & sub Lunâ & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim, sive ut massa Lunæ quæ gravitati acceleratrici est proportionalis ad massam terræ quæ itidem gravitati ejus acceleratrici est proportionalis & ut diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim. De figurâ corporis Lunæ nova quàm plurima atque eximia habentur in dissertationibus de fluxu & refluxu maris.

Corol. (f) Inde vero fit ut eadem semper lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium essent longè tardissimæ: adeò ut facies illa, quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in prop. XVII allatam) respicere, neque statim abinde retrahi & in terram converti.

(f) * *Indè verò fit.* Quoniam maxima diameter Lunæ versùs centrum terræ dirigitur (ex dem.) hinc fit ut eadem semper Lunæ facies in terram obvertatur. Positâ autem Sphæroidicâ Lunæ figurâ, inter varias Lunæ partes non dabitur æquilibrium, nisi Sphærois Lunæ axem suum telluri obvertat (109); quare in alio situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium in minimo scilicet axis majoris suprà minorem excessu, essent longè tardissimæ adeò ut non turbetur Lunaris motûs circà axem æquabilitas, ideóque (per not. in prop. 17.) facies illa quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunaris umbilicum respicere, neque statim abinde retrahi & in terram converti.

124. Clariss. D. De Mairan in elegantissimâ dissertatione de motu diurno telluris circa axem quæ legitur in monum. Paris. an. 1729. exponit admodum ingeniosè prout semper facit, cur eadem Lunæ facies in terram continuò obvertatur, variasque explicat inæqualitates librationis Lunaris in longitudinem. Conjecturam facit Vir Doctissimus homogeneam non esse Lunæ materiam sed hemisphærium inferius superiori gravius supponit; quo posito facilè demonstrat Lunam respectu telluris in situ constanti manere. Observat deindè fieri non posse ut constans maneat Lunæ positio, nisi constans quoque sit velocitas fluidi in quo Lunam ipsam deferri assumit. Sed in omni orbitâ ellipticâ vel excentricâ qualis est orbita Lunæ, variabiles sunt hujusce fluidi velocitates, quarè Luna in eodem situ consistere non potest, sed oscillationes quasdam in longitudinem patitur, ex quibus fiet ut modo nobis detegatur aliqua pars hemisphærii quod occultum esse solet, modo autem nobis abscondatur aliqua pars hemisphærii quod solet esse conspicuum, idque magis vel minus contingere debet pro majori vel minori inæqualitate velocitatum fluidi. Hâc ratione explicari poterit cur Lunaris librationis quantitas in longitudinem major aliquando ab Astronomis observatur quam ex prop. 17. lib. hujus, prodire debet. Verùm tota hæc explicatio ad rem nostram & Newtonianum systema accommodabitur, si vorticum loco substituatur attractio, quemadmodum à Clariss. Daniele Bernoullio factum est, cujus eximiam Dissertationem de fluxu & refluxu maris cap. 3. consulat Lector. 124.

De Mundi Systemate.

LEMMA I.

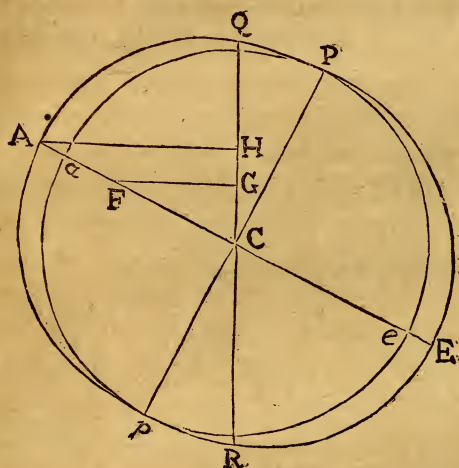
Si APEPp *terram designet uniformiter densam, centroque* C *& polis* P, p *& æquatore* AE *delineatam; & si centro* C *radio* CP *describi intelligatur sphæra* Pape; *sit autem* QR *planum, cui recta à centro solis ad centrum terræ ducta normaliter insistit; & terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ sphæra modo descriptâ altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde à plano* QR, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia à plano: Dico primò, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis & efficacia ad terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod à plano* QR *maximè distat, consistentium vim & efficaciam, ad terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

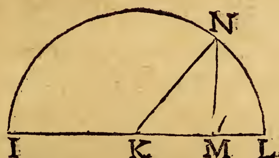
Nam centro *K* diametro *IL* describatur semicirculus *INL*. Dividi intelligatur semicircumferentia *INL* in partes innumeras æquales, & à partibus singulis *N* ad diametrum *IL* demittantur sinus *NM*. Et (t) summa quadratorum ex sinibus omnibus

125. (t) 125. * *Et summa quadratorum.* Divisa intelligatur semi-circumferentia INL, in particulas æquales innumeras nb, NL, NS, bB &c. erectisque sinibus bR, NM, &c. erit sinus bm, seu KR, æqualis sinui NM, & ità de cæteris (prop. 26. lib. 3. elem.). Quarè sinus omnes ut KR, KF, æquales erunt sinibus ut NM, SQ, ac proindè summa quadratorum ex sinibus omnibus NM, æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus omnibus KM. Præterea quadratum semi-diametri KN, æquale est quadratis sinuum KM, MN. Quarè (ob summam quadratorum KM, æqua-



bus NM æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus KM, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris KN; ideoque ſumma quadratorum ex omnibus NM erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris KN.





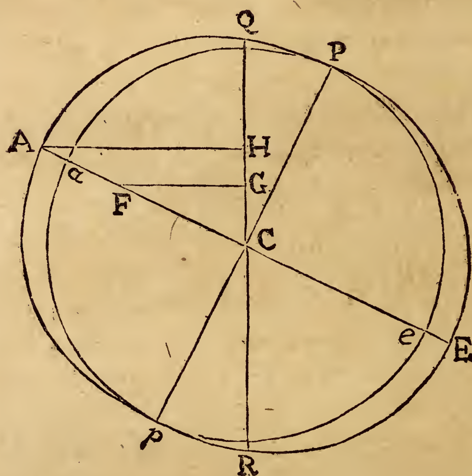
Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & à puncto A perpendiculum AH. Et vis, quâ particula F recedit à plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam CG (u) erit efficacia particulæ F ad terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$,

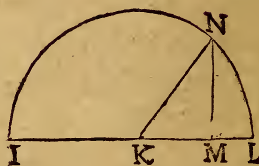
æqualem ſummæ quadratorum N M, ſumma quadratorum ex omnibus ſemidiametris K N, dupla eſt ſummæ quadratorum ex omnibus ſinibus N M, ideòque ſumma quadratorum ex omnibus N M, erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris K N.

(u) * *Erit efficacia.* (47. lib. 1.)

125.

De Mundi Systemate. HC, (x) hoc est, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut summa omnium FCq ad summam totidem ACq, hoc est (per (y) jam demonstrata) ut unum ad duo. *Q. E. D.*





Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter à plano QR, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano æquatoris jacentem.

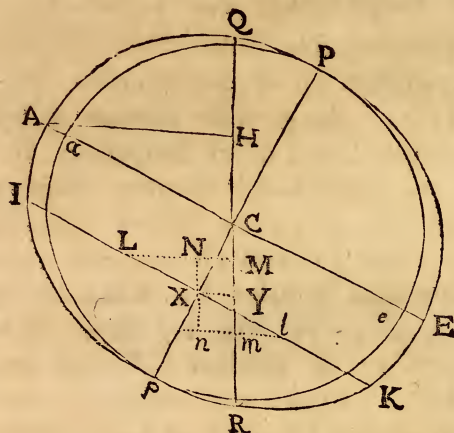
525. (x) * *Hoc est*, ob triangula ACH, FCG, similia.

(y) * *Per jam demonstrata.* (150.)

LEM.

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundò quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo AE uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.



Sit enim IK circulus quilibet minor æquatori AE parallelus, sintque L, l particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum $Pape$ sitæ. Et si in planum QR, (z) quod radio in solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula LM, lm: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum QR, (a) proportionales erunt perpendiculis illis LM, lm. Sit

(z) * *Quod radio in Solem ducto.* (Per hyp. Lem. 1.).

(a) * *Proportionales erunt.* (Per hypothes. ejusdem Lem.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

Sit autem recta Ll plano $Pape$ parellela & biſecetur eadem in X, & per punctum X agatur Nn, quæ parellela ſit plano QR & perpendiculis LM, lm occurrat in N ac n, & in planum QR demittatur perpendiculum XY. (b) Et particularum L & l vires contrariæ, ad terram in contrarias partes rotandam, ſunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc eſt, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$; ſeu $LN \times MC + NM \times MC$ & (c) $LN \times mC - NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ ſeu (d) $2\,LN \times NX$ eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in A conſiſtentium vim $2\,AH \times HC$, (e) ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ ſeu $2\,XY \times CY$ ad particularum earumdem in A conſiſtentium vim $2\,AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum L & l ſimul ſumptarum vis ad terram rotandam eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco A conſiſtentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed ſi circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per lem. 1.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2\,ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2\,CXq$ ad $2\,ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq - 2\,CXq$ ad $2\,ACq$: & propterea (per lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq - 2\,CXq$ ad ACq.

Jam

125. (b) * *Et particularum* L *&* l. (Ex Dem. in Lem. præced.).

(c) * *Et* $LN \times mC - NM \times mC$. Nam ob ſimilitudinem triangulorum $LN : NM = ln : nm$, ſed eſt $NM = nm$; quarè $LN = ln$, ideóque $ln \times mC - nm \times mC = LN \times mC - NM \times mC$ & ob $mC = mM + MC$, erit virium illarum differentia $= LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$.

(d) * *Seu* $2.LN \times NX$. Nam, ob ſimilitudinem triangulorum, eſt $NX = nX$, ideóque Nn ſeu $Mm = 2\,NX$, ac proindè $LN \times Mm = 2\,LN \times NX$.

(e) * *Ut* LXq *ad* ACq. Eſt enim $LN : AH = LX : AC$ & $NX : HC = LX : AC$, ideóque per compoſitionem rationum $LN \times NX : AH \times HC = LXq : ACq$. Simili argumento patet partem nega-

Jam verò si sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK; (f) materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad terram rotandam, erit ut IXq in $IXq - 2CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE consistentis, ut omnia IXq in $IXq - 2CXq$ ad totidem IXq in ACq, (g) hoc est, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in ACq, id est, ut omnia $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$ ad

negativam esse ad vim particularum earumdem in A consistentium ut C X q ad A C q.

(f) * *Materia in perimetro circuli.* Sunt enim zonæ sphæricæ similes ut quadrata radiorum.

(g) *Hoc est, ut omnia* &c. Nam ex centro C, ad punctum I, ducta intelligatur recta C I, erit $IX^2 = CI^2 - CX^2$, sed est $CI = AC$, quare $IX^2 = AC^2 - CX^2$, ac proinde IXq in $(IXq - 2CXq) = ACq - CXq$ in $ACq - 3CXq$.

125.

De Mundi Systemate.

ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc eſt, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio eſt $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio eſt $ACqq - ACq \times CXq$; ac (h) proinde per methodum fluxionum, ut $ACqq \times CX - \frac{4}{3}ACq \times CX$ *cub.* $+ \frac{3}{5}CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{3}ACq \times CX$ *cub.* id eſt, ſi pro CX ſcribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}ACqc$ ad $\frac{2}{3}ACqc$. hoc eſt, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

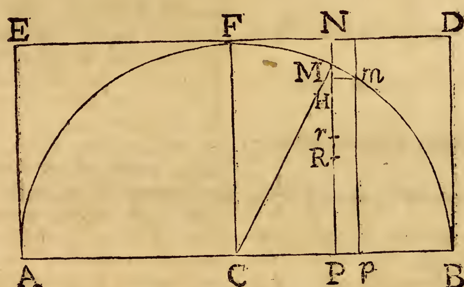
LEM-

125. (h) * *Ac proindè per methodum fluxionum.* Quantitates $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$ & $ACqq - ACq \times CXq$, concipiantur multiplicatæ per fluxionem rectæ CX, ſumptiſque fluentibus, erit fluens prioris quantitatis $ACqq \times CX - \frac{4}{3}ACq \times CX$ cub. $+ \frac{3}{5}CXq$ cub. fluens autem poſterioris quantitatis fiet $ACqq \times CX - \frac{1}{3}ACq \times CX$ cub. & ut habeatur efficacia tota, pro CX ſcribatur Cp vel AC, erit fluens prior ad poſteriorem ut $\frac{4}{15}ACq$. cub. ad $\frac{2}{3}ACq$. cub.

(i) LEMMA III.

Iisdem positis: dico tertiò quod motus terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Est enim motus cylindri circum axem suum immotum revolventis ad motum sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet

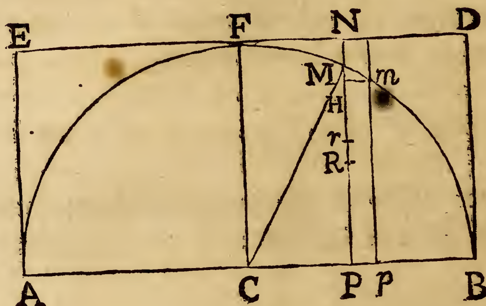


(i) 126. * *Lemma* demonstratur. Revolutione semicirculi A F B, & rectanguli eidem circumscripti A E D B, describantur sphæra & cylindrus circumscriptus. Sit radius C B $= 1$, peripheria circuli hoc radio descripti $= n$, abscissa C P $= x$, ordinata P M $= y$, quælibet ipsius pars P R $= v$, R r $= dv$; peripheria circuli radio P R, descripti $= nv$, [illegible]ulus circularis ex revolutione lineol[illegible] $= nvdv$, velocitas puncti R $= v$, [illegible]s annuli prædicti $= nv^2dv$, motus [illegible]is circuli radio P R, descripti $= \frac{1}{3}nv^3$ [illegible] motus circuli radio P M, descripti $= \frac{1}{3}$ [illegible] y^3, motus circuli radii P N descripti $= \frac{1}{3}n$, motus cylindri totius $= \frac{2}{3}n$.

Sit P p $= dx$ motus annuli solidi revolutione figuræ P M m p descripti $= \frac{1}{3}ny^3dx = \frac{1}{3}ndx \times (1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}ndx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}nx^2dx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}}$. Undè motus solidi revolutione figuræ C F M P, descripti $= \frac{1}{4}n\int dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ +

De Mundi Systemate.

libet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis: & motus cylindri ad motum annuli tenuiſſimi, ſphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum



$+\frac{1}{12}nx(1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}n \times CFMB = \frac{1}{32}nn$, adeóque motus ſphæræ totiùs $= \frac{1}{16}nn$. Eſt igitur motus cylindri ad motum ſphæræ ut $\frac{2}{3}n$ ad $16\,nn$, ſeu ut 16 ad $\frac{3}{2}n$, hoc eſt, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis; nam quadratum diametri 2 eſt 4 & $4 \times 4 = 16$, circulus verò cujus diameter 2, &
126. peripheria n, eſt $\frac{1}{2}n$ & tres hujuſmodi circuli ſunt $\frac{3}{2}n$.

Materia annuli tenuiſſimi ſphæram & cylindrum ad communem eorum contactum F ambientis ſit m, & velocitas erit ut CF, ſive ut 1, adeóque motus $= m$, & proinde motus cylindri ad motum annuli illius ut $\frac{2}{3}n$ ad m, ſive ut $2n$ ad $3m$, hoc eſt, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; baſis enim cylindri eſt circulus $\frac{1}{2}n$ & altitudo diameter AF $= 2$, ideóque cylindrus $= n$. Prædicti annuli materia ſit aan, ideóque motus ipſius circà axem cylindri $= aan$. Revolvatur jam idem annulus circà proprium axem quem exhibeat diameter AB; & particula materiæ annuli reſpondens arcui infiniteſimo Mm, erit $a^2 \times Mm$ & hujus motus $a^2y \times Mm = a^2dx$, ob proportionem $Mm : mH\ (dx) = CM\ (1) : PM\ (y)$. Quarè motus partis FM, annuli eſt a^2x, & factâ $x = 1$, motus quadrantis annuli $= a^2$ eſt motus totius annuli circà proprium axem $= 4a^2$. Eſt igitur motus annuli circà axem cylindri ad ejuſdem motum circà axem proprium ut aan, ad $4aa$, ſeu ut n ad 4, hoc eſt, ut circumferentia circuli n, ad duplum diametri 4. Quamobrem

motus cylindri eſt ad motum ſphæræ ut - - - -	16 ad $\frac{3}{2}n$
motus annuli circà axem cylindri eſt ad motum cylindri ut	m ad $\frac{2}{3}n$
& motus annuli circà axem proprium eſtad ejus motum circà axem cylindri ut	4 ad - n.

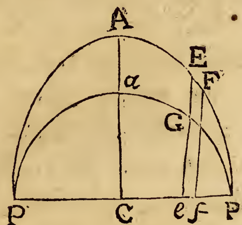
Quarè, per compoſitionem rationum & ex æquo, motus ſphæræ circà axem proprium eſt ad motum annuli ut n^3 ad $64\,m$.

plum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri. LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.

H Y-

$64m$. Est autem n^3 ad $64m$ ut $\frac{2n}{3} \times \frac{3n^2}{16}$ ad $8 \times m$, sed $\frac{2n}{3}$, est quantitas materiæ in terrâ; m, quantitas materiæ in annulo $\frac{3n^3}{16}$ est summa trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli AFB, & 8 est summa duorum quadratorum ex diametro AB. Quare motus terræ totius circum axem jam antè descriptum ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscumque ad duo quadrata ex diametro, id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000, positâ ratione diametri ad peripheriam ut 1 ad 3.141 quamproximè. Q. E. D.

127. Lemma. Semiaxe majori CA & minori CP, describatur semiellipsis PAp, atque radio CP, describatur semicirculus Pap, circà axem Pp revolvi concipiantur tum semicirculus tum semiellipsis, erit sphæra motu semicirculi genita ad sphæroidem semiellipseos revolutione descriptam ut Ca² ad CA². Sit $pe = x$ $Ge = y$, $Cp = r$, $CA = a$, exprimatque $\frac{r}{p}$ rationem radii ad peripheriam, erit $\frac{py}{r}$, peripheria circuli radio Ge descripti. Præterea (ex naturâ ellipseos 248 lib. 1.) Ca (r) : CA (a) = Ge (y) : Ee, ideóque $Ee = \frac{ay}{r}$, hinc peripheria circuli radio Ee descripti $= \frac{pay}{rr}$, ejusdemque circuli area $= \frac{pa^2y^2}{2r^3}$; area autem circuli radio Ge descripti est $\frac{py^2}{2r}$. Quare fluxio sphæroidis fit $\frac{pa^2y^2dx}{2r^3}$, & fluxio sphæræ est $\frac{py^2dx}{2r}$. Sed (ex naturâ circuli) $y^2 = 2rx - xx$; hinc fluxio sphæroidis est $\frac{2pa^2rxdx - pa^2x^2dx}{2r^3}$; & fluxio sphæræ $\frac{2prxdx - pxxdx}{2r}$, sumptisque fluentibus, erit fluens prima ad alteram ut $\frac{pa^2rx^2}{r^3} - \frac{pa^2x^3}{6r^3}$ ad $\frac{prx^2}{2r} - \frac{px^3}{6r}$. Jam loco x, substituatur $2r$, erit sphærois tota, ad totam sphæram ut $\frac{4pa^2r^3}{r^3} - \frac{8pa^2r^3}{6r^3}$ ad $\frac{2pr^3}{r} - \frac{8pr^3}{6r}$, hoc est, ut a^2 ad r^2, 127.



sive in ratione duplicatâ CA² ad Ca². Simili argumento patet sphæram ellipseos semiaxe majori tanquam radio descriptam esse ad ellipsoidem in ratione duplicatâ semiaxis majoris ad minorem.

De Mundi Systemate.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus terrâ omni reliquâ sublatâ, solus in orbe terræ, motu annuo circa solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus punctorum æquinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materiâ rigidâ & firmâ constaret.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire præcessionem æquinoctiorum.

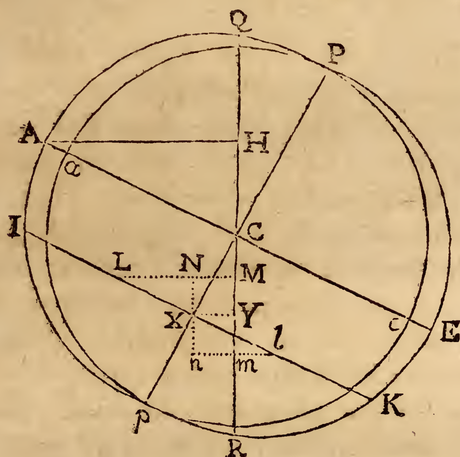
Motus mediocris horarius nodorum lunæ in orbe circulari, ubi nodi sunt in quadraturis, erat $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$, & hujus dimidium $8''. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto sidereo $20^{gr}. 11'. 46''$. Quoniam igitur nodi lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}. 11'. 46''$. in antecedentia; & si plures essent lunæ, motus nodorum cujusque (per corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) forent ut tempora periodica; si luna spatio diei siderei juxta superficiem terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}. 11'. 46''$ ut dies sidereus horarum 23. 56′ ad tempus periodicum lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio nodorum annuli lunarum terram ambientis; sive lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquescant & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit terræ omni $PapAPepE$ quæ globo $Pape$ superior est; & quoniam globus iste ad terram illam superiorem (k) ut aC qu. ad AC qu. $- aC$ qu. id est (cum terræ semidiameter minor PC vel aC sit ad semidiametrum majorem AC ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste terram secundùm æquatorem cingeret & uterque simul

127. (k) * *Ut aCqu. ad ACqu − aCqu.* Globus iste est ad terram totam ut a C², ad A C² (Lem. præc.) ideóque annulus materiæ inter globum & terram interceptus, hoc est, excessus materiæ in terrâ suprà materiam in globo est ut ACqu. − aCqu.

mul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223, ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: (l) motus qui

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.



restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo & globo compositi ad motum $20^{gr}. 11'. 46''.$, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi lunarum (ut supra explicui) atque (m) ideo quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3 *IT in fig. pag.* 411. & 413.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem in morem figuræ *PapAPepE* ad superiorem

(l) * *Motus qui restabit in annulo.* (52. lib. I.).

(m) * *Atquè ideò.* (vid. not. 101. lib. hujus). 127.

illam terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad 20gr. 11'. 46'', ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9''. 56'''. 50iv.

Cæterum hic motus (n) ob inclinationem æquatoris ad planum eclipticæ minuendus, idque in ratione sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$.) ad radium 100000. Quâ ratione motus iste jam fiet 9''. 7'''. 20iv. Hæc est annua præcessio æquinoctiorum à vi solis oriunda.

Vis autem lunæ ad mare movendum erat ad vim solis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et (o) vis lunæ ad æquinoctia movenda est ad vim solis in eâdem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præcessio à vi lunæ oriunda 40''. 52'''. 52iv, ac tota præcessio annua à vi utrâque oriunda 50''. 00'''. 12iv. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præcessio æquinoctiorum ex observationibus astronomicis est annuatim minutorum secundorum plus minus quinquaginta.

Si (p) altitudo terræ ad æquatorem superet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & præcessio æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Des-

127. (n) * *Ob inclinationem.* Pro majori vel minori inclinatione plani æquatoris ad planum Eclipticæ minorem esse vel majorem regressum æquinoctiorum patet ex not. 101. lib hujus. Illud autem decrementum obtinetur, si minuatur motus in ratione sinûs complementi inclinationis ad radium. Sed planum æquatoris inclinatur ad planum Eclipticæ gradibus $23\frac{1}{2}$ circiter, quarè cum motus æquinoctiorum sit tardissimus, satis accurate minuitur motus ille in ratione sinûs 91706. qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$ ad radium 100000.

(o) * *Et vis Lunæ.* (Cor. 18. 19. Lib. I.).

(p) * *Si altitudo terræ.* Quò enim altior erit materia ad æquatorem eò levior sit oportet ut materiam quæ est versus polos in æquilibrio possit sustinere. Cæterum quia in tribus non satis Laudandis Dissertationibus tom. 3. adjunctis, novæ occurrunt quamplurima de figurâ telluris, de viribus Solis & Lunæ, præcessionem æquinoctiorum, eadem quâ hactenus factum est, methodo, accuratius licebit computare.

Descripsimus jam systema solis, terræ, lunæ, & planetarum: supereſt ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.

LEMMA IV.

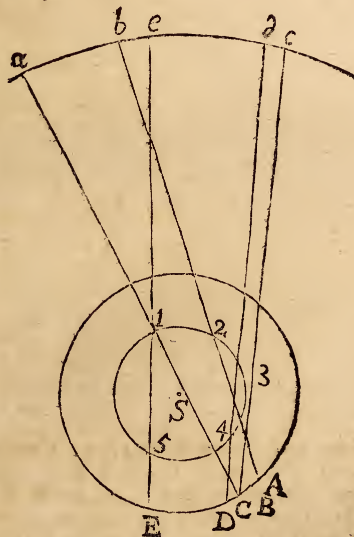
Cometas esse lunâ superiores & in regione planetarum versari.

(q) Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas supra regiones sublunares, sic (r) ex parallaxi annuâ convincitur eorum descensus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si terra eſt inter ipsos & solem; at justo celeriores si terra vergit ad oppositionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si terra versatur inter ipsos & solem; & justo tardiores vel retrogradi, si terra sita eſt ad contrarias partes. (s) Contingit hoc maximè ex motu terræ

(q) * *Ut defectus parallaxeos diurnæ.* Parallaxis diurna cometæ eſt differentia locorum in quibus cometa ex centro terræ, vel ex eo superficiei terræ loco ad quem cometa verticalis eſt & ex quovis alio loco superficiei terræ observatus, inter stellas fixas refertur. Hæc parallaxis diurna, maxima eſt in Lunâ, ubi ea in horizonte constituitur, inde verò magis magisque decrescit quò altius Luna suprà horizontem elevatur. Quia verò hæc parallaxis non observatur in cometis, patet eos esse Lunâ superiores (30.).

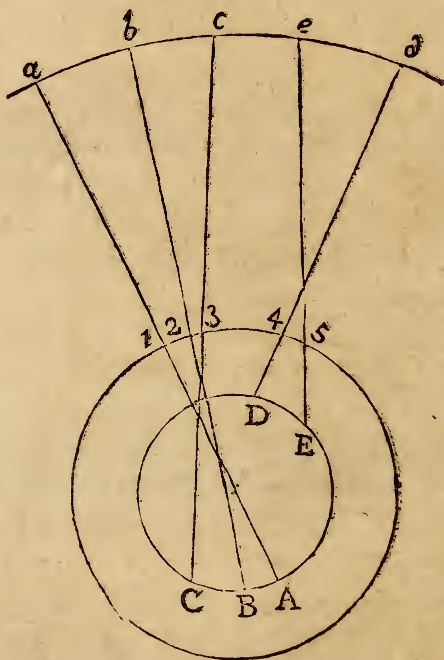
(r) * *Sic ex parrallaxi annuâ.* Parallaxis annua ex motu circà solem oritur, hæcque respicit longitudinem cometæ, hoc eſt, distantiam ejus in Eccliptîcâ à primo arietis puncto. Quomodò ex hâc parallaxi Newtonus colligat cometas descendere in regiones planetarum explicabitur in decursu.

128\. (s) 128. * *Contingit hoc maximè.* Sit S, Sol A B E, orbita telluris & a b c, sphæra fixarum ad quam Planetæ referantur, exhibeatque 1, 2, 3, 4, Planetæ alicujus inferioris orbitam. Moveatur terra ex A, per B, in C, & intereà Planeta ex 1, per 2, in 3, hic Planeta ex a, per b, in c, secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si terra moveatur ex C, per D, in E & planeta ex 3, per 4 in 5, idem planeta per d, in e, retrogredi videbitur.



De Mundi Systemate.

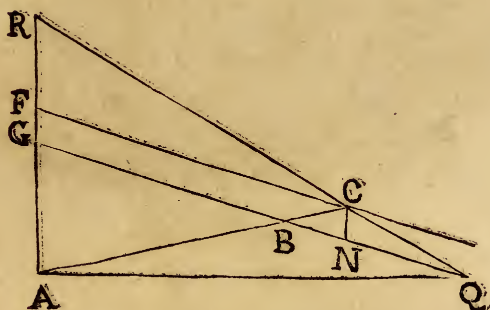
in vario ipſius ſitu, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conſpirante vel contrario nunc retrogradi ſunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, & motu angulari circa ſolem tantò celeriùs fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta



128. Jam verò repræſentet 1, 2, 3 orbem planetæ ſuperioris, ſitque ABC, orbis terræ. Moveatur terrâ ex A, per B, & C in D, planeta autem ſuperior ex 1 per 2 & 3 in 4, hic planeta ſecundum ordinem ſignorum progredi videbitur. At ſi terra moveatur ex D in E, planeta verò ex 4 in 5, idem planeta ex loco d in e, retrogredi apparebit. Quia verò planetæ modò in conſequentia, modò in antecedentia ferri videntur, neceſſum eſt ut modò tardiores, modò celeriores appareant, atque in ipſo veluti motuum æquilibrio, neque in conſequentia neque in antecedentia ſenſibiliter pergant, ſed quaſi ſtationarii videantur. Hæc itaque planetarum phænomena ex motu terræ maximè contingunt, oriri tamen poſſunt etiam aliquantulum ex inæquali planetarum motu.

ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa è terrâ spectatus ob motum suum tardiorem apparet esse retrogradus; sin terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu terræ) fit saltem tardior. At si terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.



129. Lemma. Datis positione tribus rectis Q A, Q B, Q C, ex eodem puncto Q, ductis & in eodem plano jacentibus, ducere rectam AC, ex puncto quolibet A, ità ut partes A B, C B, sint in datâ ratione m, ad n.

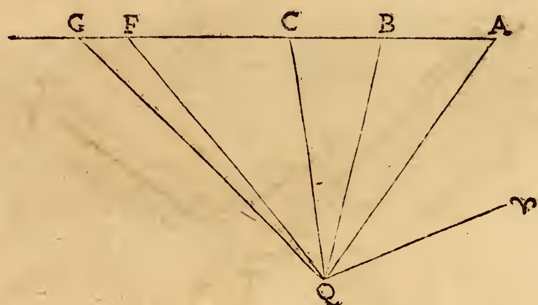
Ex A ducatur utcum que recta A R, rectis Q C, Q B, productis occurrens in G, R, capianturque G F, A G, in datâ ratione m ad n (prop. 12. lib. 6. elem.). Per F, agatur F C parallela rectæ G Q, ipsique Q R occurrens in C, erit juncta A C, recta quæsita. Nam ob parallelas F C, GQ, est A B: B C = A G : G F, sed (per constr.) G F, A G, sunt in datâ ratione m ad n. Quare eandem inter se rationem habent partes interceptæ A B, B C.

129. Idem fit trigonometricè. Nam in triangulo A Q G, datur latus A G, & præterea noti sunt anguli A Q G, Q A G, ideóque dabitur A G, ac proinde innotescit etiam G F, datam habens rationem ad A G (per constr.) quare dabitur recta C N, æqualis & parallela rectæ G F. Rursus in triangulo Q N C, cognitis angulo C Q N, & angulo C N Q, qui æqualis est angulo F G N, hoc est, anguli priùs inventi A G Q, complemento ad duos rectos, atque insuper dato latere C N, innotescet C Q, tandem in triangulo A C Q, datis lateribus Q A, Q C, & angulo intercepto A Q C, invenientur latus C A atque anguli Q A C, Q C A, id est, magnitudo & positio rectæ A C.

De Mundi Systemate. tione vel motu retrogrado diſtantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈ *QA*, ♈ *QB*, ♈ *QC* obſervatæ tres longitudines cometæ ſub initio motus, ſitque ♈ *QF* longitudo ultimò obſer-

130. 130. Lemma. Datis poſitione quatuor rectis QA, QB, RB, RD, in eodem plano jacentibus ducere rectam MK, ità ut MO, ſit ad ON ut *m* ad *n*, & ON ad NK ut *n* ad *r*. Capiatur BG, ad BA, ſicut $n+r$ ad *m*. Item capiatur FB ad BD ut $m+n$ ad *r*. Junctæ rectæ QG, RF, producantur donec concurrant. Per punctum concurſus H, ducatur HK parallela rectæ BD, itemque HM, parallela rectæ RB, erit MK recta quæſita. Nam propter parallelas HM, TN (per conſtr.) erit KN ad NM, ut KT ad TH. Sed quia HK parallela eſt rectæ FD, KT eſt ad TH ut DB ad BF, hoc eſt, (per conſtr.) ut *r* ad $m+n$, ac proinde KN eſt ad NM ut *r* ad $m+n$. Rurſus ob parallelas HK, OX, erit MO ad OK ut MX ad XH, ſed quia HM, parallela eſt rectæ AG, erit MX ad XH ut AB ad BG, id eſt, (per conſtr.) ut *m* ad $n+r$. Eſt igitur MO ad OK ut *r* ad $m+n$. Quare, dividendo & ex æquo, tres rectæ MO, ON, NK, ſunt in eâdem ratione cum tribus quantitatibus *m*, *n*, *r*. Idem fit trigonometricè. Nam rectarum quatuor datarum QA, QB, RB, RD, dantur interſectiones omnes ac proindè rectæ QB, DB, RB, BA, RD, ſunt magnitudine datæ. Præterea dantur etiam BF & BG, utpotè habentes datam rationem ad BD & RA. Jam verò in triangulo RBF, datis lateribus BR, BF, cum angulo intercepto RBF, dantur latus RF & angulus RFB ac proindè etiam datur angulus QFH. Simi-

observatâ, ubi cometa videri desinit. ([a]) Agatur recta ABC, cujus partes AB, BC rectis QA & QB, QB & QC interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur AC ad G, ut sit AG ad AB ut tempus inter observationem primam & ultimam ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur QG. Et si cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque terra vel quiesceret,



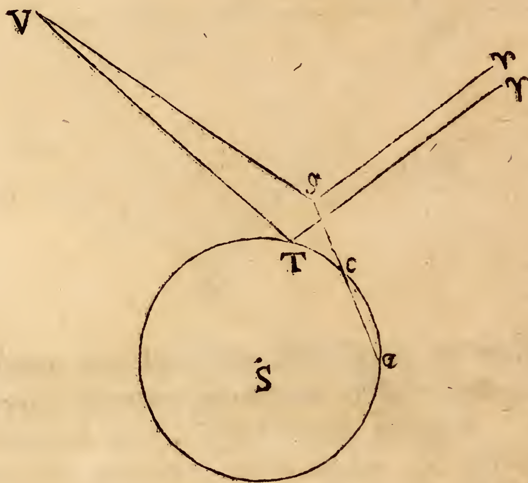
vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progrederetur; foret angulus $♈QG$ longitudo cometæ tempore observationis ultimæ. Angulus igitur FQG, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, si terra & cometa in contrarias partes moventur, additur angulo $♈QG$, & sic motum apparentem cometæ

Similiter in triangulo QBG, datis lateribus QB, BG, & angulo QBG, dabitur angulus BQG; quare in triangulo QFH, datis duobus angulis QFH, FQH, cum latere QF, quod est summa vel differentia rectarum datarum QB, QF innotescet latus QH. Tandem in triangulo QHM, dato angulo HQM qui est summa vel differentia notorum angulorum BQA, HQB, datoque angulo QMH qui æqualis est angulo dato QAB, simulque noto latere QH, innotescent latera HM, QM. Simili prorsus modo invenientur latera RK, HK, in triangulo RKH. Igitur in triangulo MHK, notis lateribus HM, HK, & angulo intercepto MHK, qui æqualis est angulo dato ABQ, innotescent anguli HMK, HKM & basis MK. Datis autem angulis HMQ, HMK, dabitur horum summa vel differentia QMK, hoc est, positio rectæ MK, ob rectam QM, positione datam. Simili modo rectæ QO, RN, RK & anguli quos MK cum his rectis efficit, trigonometrice inveniuntur. 130.

(a) * *Agatur recta ABC.* (129).

De Mundi Systemate.

metæ velociorem reddit: ſin cometa pergit in eaſdem partes cum terrâ, eidem ſubducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti (b) modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu terræ, & idcirco pro parallaxi cometæ meritò habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero cometæ ex hâc parallaxi ſic colligitur. Deſignet S ſolem, acT orbem magnum, a locum terræ in obſervatione primâ, c locum



terræ in obſervatione tertiâ, T locum terræ in obſervatione ultimâ, & T♈ lineam rectam verſus principium arietis ductam. Sumatur angulus ♈TV æqualis angulo ♈QF, hoc eſt, æqualis longitudini cometæ ubi terra verſatur in T. Jungatur ac, & producatur ea ad g, ut ſit ag ad ac ut AG ad AC, & erit g locus quem terra tempore obſervationis ultimæ, motu in rectâ ac uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur g♈ ipſi T♈ parallela, & capiatur angulus ♈gV angulo ♈QG

130. (b) * Uti modò expoſui. (* 8).

♈ *QG* æqualis, erit hic angulus ♈*gV* æqualis longitudini cometæ è loco *g* ſpectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur à tranſlatione terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic ([c]) autem locus *V* orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet. Idem

(c) 131. * *Hic autem locus V.* Recta HV, referat veſtigium cometæ in plano Ecclipticæ, ſintque V, G, E, H, quatuor cometæ loca in plano Eccliptica præcedenti methodo inventa. Sit S, ſol, ABCD, orbis magnus, ſintque A, B, C, D, quatuor terræ loca ad tempora obſervationum nota. In triangulo ASB, dantur latera SA, SB, daturque angulus ASB; differentia ſcilicet locorum terræ è ſole viſorum; quarè dabuntur anguli SAB, SBA, notaque erit in partibus ſemidiametri orbis magni recta AB, chorda nempè arcûs à tellure interim percurſi. Rurſus in triangulo KAB, dantur omnes anguli, nam datur angulus KAB, qui eſt ſum- 131.

De Mundi Systemate.

Idem colligitur ex curvaturâ viæ cometarum. (d) Pergunt hæc

132. summa vel differentia notorum angulorum SBA, SBK. Quarè datur ratio laterum AK, AB, sed data est ratio rectarum SA, AB, dabitur itaque ratio SA ad KA. At (131.) nota est ratio inter KO & KH, innotescet igitur ratio inter SA & KH; Quarè datur AH, distantia cometæ à terrâ in partibus semidiametri orbis magni. Simili planè modo invenientur aliorum locorum distantiæ á terrâ E, G, V, hic autem locus V, ubi cometa videri desinit, ex datis observationibus inito computo per methodum expositam, orbe Jovis inferior esse solet.

132. Cometæ vestigium in plano Eclipticæ jam determinavimus, ut autem veram obtineamus cometæ trajectoriam, ex loco H, ad planum Eclipticæ erecta intelligatur normalis HM, tangens anguli latitudinis cometæ ad datum observationis tempus posito AH, radio, eritque M, locus verus cometæ ad tempus datum; Est enim positio rectæ AH, ejus longitudo & angulus MAH, latitudo. Similiter in loco V, ad idem Eclipticæ planum erigatur normalis VL, æqualis tangenti latitudinis ad idem tempus observatæ, sumpto DV, pro radio, erit L, locus verus cometæ, ideóque juncta recta LM, est ipsa trajectoria quæsita. Patet autem distantiam loci M, ab A, sive rectam AM, esse ad rectam AH, ut secans latitudinis in H, ad radium, & ità porrò de aliis cometæ locis.

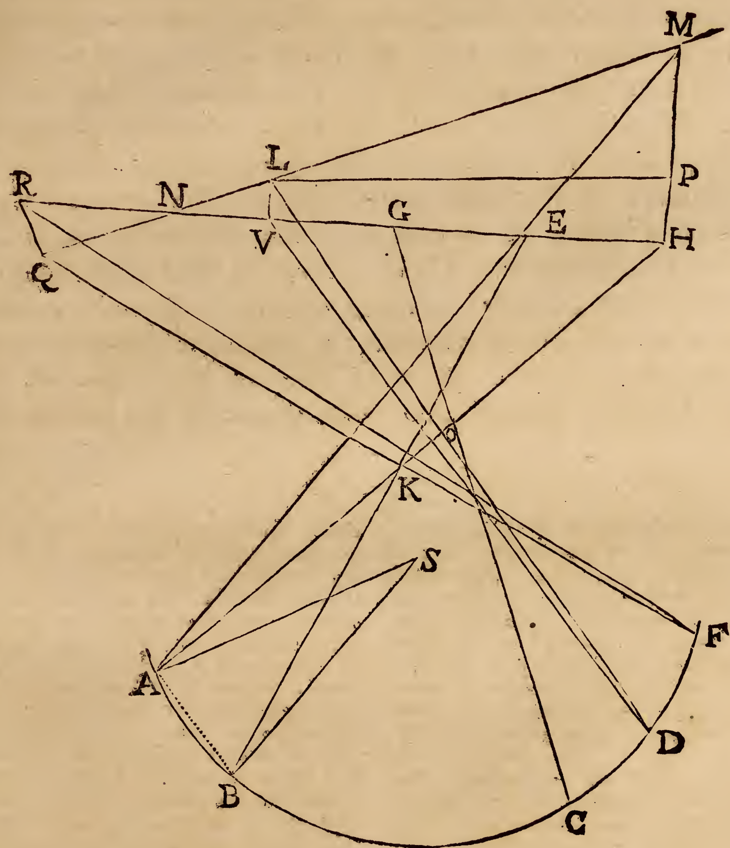
133. Cætera quæ ad motum cometæ pertinent facilè definientur. Invenitur LM, recta scilicet percursa à cometa, dum tellus ab A ad D movetur. Ducatur enim LP ipsi VH parallela cum rectâ ME concurrens in P. In triangulo PLM, præter angulum rectum in P, datur latus LP, æquale lateri VH, atque etiam datur latus PM, æquale differentiæ rectarum datarum MH, LV, quarè dabitur LM. Producatur ML, donec cum HV, concurrat in N, erit N nodus. Præterea NV erit ad VL, ut VH ad PM, itemque LN ad LV ut LM ad MP, & ideò dabuntur LN, LV, capiatur tempus quod sit ad tempus inter observationem in M, & observationem in L, ut NL ad LM, habebitur tempus inter observationem in L, & appulsum cometæ ad nodum, cum enim cometa in lineâ rectâ uniformiter moveri supponatur, tempora sunt ut spatia. Dabitur quoque locus cometæ in nodo versantis, cum enim detur punctum N, & propter tempus cognitum inter observationem in L, & appulsum cometæ ad nodum, detur quoque locus terræ pro hoc momento, dabitur positio rectæ hæc puncta jungentis, hoc est longitudo cometæ in nodo existentis. Tandem ob datam distantiam nodi à loco V datamque latitudinem cometæ in eodem loco, dantur in triangulo sphærico rectangulo latera duo circà angulum rectum ac proindè innotescit inclinatio hypothenusæ, id est, semitæ ipsius cometæ ad Eclipticam.

134. Ex dictis colligitur quâ ratione ad tempus quodlibet propositum definiri possint locus cometæ è terrâ visus, illiusque distantia à terrâ. Determinentur ut suprà vestigium orbitæ in plano Eclipticæ HEVR, ipsaque vera cometæ orbita MLNQ. Capiatur HR ad HV, ut spatium inter observationem primam temporisque datum ad spatium inter observationem primam & quartam. Dato terræ loco ad tempus propositum, putà F, datur positio rectæ FR, ac proinde datur longitudo cometæ quæsita (132). Præterea fiat RQ ad RN, sicut MH ad HN, patet dari latitudinem cometæ ad tempus datum (loc. cit.). His autem datis, obtineri potest distantia cometæ à terrâ (ibid.) in hâc ergò hypothesi quod cometæ in lineis rectis uniformiter moveantur, determinari possunt præcipua motûs cometarum elementa. Hâc de re consulat Lector opusculum Clariss. Viri Dominici Cassini de cometâ an 1664, Davidis Gregorii Astronomiam Physicam & Cassini filii Theoriam cometarum in monumentis Paris. an. 1727.

(d) * *Pergunt hæc corpora.* Est & alia parallaxis proveniens ex motu terræ circà Solem Hæc latitudinem cometarum respicit, hoc est, distantiam eorum ab Ecliptica versus Boream aut austrum, unde fit ut cometæ in sphærâ fixarum à cursu sic-

hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa, quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.



circulari deflectere & lineam admodum irregularem videantur describere. Cum enim planum in quo cometa movetur, cum plano Eccliptica in quo terra fertur, non coincidat, cometa modò suprà Eccliptiçam in Septentrionem ascendit, modò infrà Ecclipticam in austrum descendit. Quia tamen in eodem plano semper incedit, orbem circularem, tellure quiescente, videretur describere, sed quoniam tellus ipsa movetur in plano Eclipticæ, cometa pro diversis terræ locis observatus, modò versùs Boream altius ascendere, modò versùs austrum inferius descendere apparebit. Observationibus compertum est cometas propèmodum in cir-

1346

De Mundi Systemate.

totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quod reſpondet motui terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes cometas ſatis longe infra jovem. Unde conſequens eſt quod in perigæis & periheliis, ubi propiùs adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes Martis & inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum (e) ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à ſole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicatâ ratione diſtantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam à ſole, & in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè & ratione duplicatâ lucis ad lucem inverſè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum

135. circulis maximis pergere, quandiu moventur celerius, at in fine curſûs deflectere ſolent ab his circulis; hæc autem deflexio pendet ex ipſâ trajectoriæ cometarum curvaturâ de quâ infra. Quarè deinceps trademus normam computi quo Newtonus diſparentes cometas ſatis longè infrà Jovem collocavit, nonnullaque afferemus exempla cometarum qui infrà orbes Martis & inferiorum planetarum deſcenderunt.

(e) 135. (*) *Ex Luce capitum.* Intelligantur duæ ſuperficies ſphæricæ concentricæ, minor una, major altera, & in centro utriuſque conſtitutum fingatur corpus aliquod lucidum. Quoniam corpus illud radios ſuos per omnem circuitum diffundit, evidens eſt eandem radiorum quantitatem in concavâ ſuperficie utriuſque ſphæræ contineri, ideóque denſitates radiorum erunt in ratione ſuperficierum ſphæricarum inverſè, hoc eſt, in ratione duplicatâ ſemidiametrorum ſive diſtantiarum à corpore lucido inverſè (14. lib. 1.). Quarè nullâ diſtantiarum habitâ ratione, ſenſatio quæ à radiis nervos opticos percutientibus excitatur, eſt ut quadratum diſtantiæ inverſè. Sed quò remotius eſt lucidum, eo pauciores radii ad oculum perveniunt, idque in duplicatâ ratione diſtantiarum (loco ſuprà cit.) hoc eſt, in duplicatâ ratione diametri apparentis diminutæ. Quarè, componendo, corporis cœleſtis à ſole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur ſplendor in ratione quadruplicatâ diſtantiæ. Erit itaque quadratum diſtantiæ cometæ à ſole ad quadratum diſtantiæ planetæ ab eodem in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione lucis planetæ ad lucem cometæ. Undè diſtantia cometæ à Sole eſt ad diſtantiam planetæ ab eodem in ratione compoſitâ ex ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione ſubduplicatâ Lucis planetæ ad Lucem cometæ.

cum sexdecim pedum à *Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2'. 0''; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11'' vel 12''. Luce vero & claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21'', ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30'': erit distantia cometæ ad distantiam saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inversè, & 12'' ad 30'' directè, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus cometa anni 1665 mense aprili, ut auctor est *Hevelius*, claritate suâ pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum saturnum ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6', at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter capillitii cometarum raro superet 8' vel 12', diameter verò nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hasce ut plurimùm ejusdem esse apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non raró conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est, quod cometæ omnes in periheliis vel infrà Saturnum collocandi sint, vel non longè suprà. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: quâ certe ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quam planetæ, qui hic sunt, illustrantur à stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tantò propius

De Mundi Systemate.

pius ad Solem accedat necesse est; ut copia lucis à se reflexæ planetas æmuletur. Inde verisimile fit cometas longè infra sphæram Saturni descendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex caudis. (f) Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia cometarum, ne fumus à capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, (g) Jovem ipsum splendore suo multùm superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illustrabitur à sole, ideoque erit soli multò propior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem

135. (f) * *Hæ vel ex reflexione fumi sparsi*, ut posteà probabitur.

(g) * *Jovem ipsum splendore suo.* Id variis observationibus confirmat Newtonus in opusculo de mundi systemate. Cometa anni 1679. Decembris 12. & 15. stilo veteri, quo tempore caudam clarissimam emittebat & Luci multorum Jovium per tantum spatium diffusæ ac dilatatæ non imparem, magnitudine nuclei, ut observabat *Flamstedius*, cedebat Jovi, adeóque Soli longè vicinior, quin imò minor erat Mercurio. Nam die 17ª. mensis hujus, ubi terræ propior erat, apparuit Cassino per telescopium Ped. 35. paulò minor globo Saturni. Die 8ª. mensis hujus, tempore matutino, vidit Halleius caudam perbrevem & latam & quasi ex corpore solis jamjam orituri exeuntem, ad instar nubis insolito more fulgentis, nec priùs disparentem quam sol ipse inciperet suprà horizontem conspici. Superabat igitur hic splendor Lucem nubium usque ad ortum solis, & immediato solis splendori solum cedendo vincebat longè lucem omnium stellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipsa Luna in tantâ solis orientis vicinitate cerni solet. Fingamus lucem hancce dilatatam coarctari & in orbem nuclei cometici Mercurio minorem coarctari & splendore longè fortiori jam reddita magis conspicua, Mercurium longe superabit, adeóque erit soli vicinior. Diebus 12. & 15. ejusdem mensis, cauda hæc per spatium longè majus diffusa apparuit rarior, & luce tamen adeò forti ut stellis fixis vixdum apparentibus cerneretur & mox trabis mirum in modum fulgentis speciem exhibuit.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum à terrâ solem versùs, ac decrescente in eorum recessu à sole versus terram. Sic enim cometa posterior anni 1665. (observante *Hevelio*) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque præterierat perigæum; splendor vero capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio*) in fine mensis Julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur usque ad *Sept.* 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. esse tantum $6'$. $5''$ inclusa coma, at *Sept* 2. esse $9'$. $7''$. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in viciniâ solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad terram. Cometa anni 1618. circa medium mensis *Decembris*, & iste anni 1680. circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate solis. Caput cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb.* 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput cometæ posterioris in distantia novem graduum à sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta solem occidentem. *Decemb.* 26. velocissimè

motus

De Mundi Systemate.

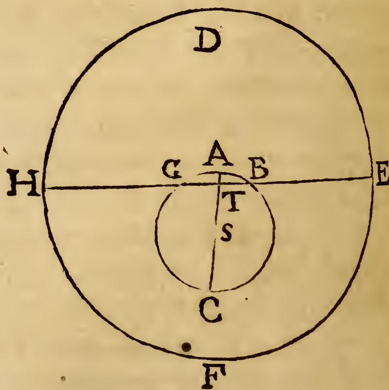
motus, inque perigæo propemodum existens, cedebat ori pegasi, stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut stella quartæ, *Jan.* 9. ut stella quintæ, *Jan.* 13. ob splendorem lunæ crescentis disparuit. *Jan.* 25. vix æquabat stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia à perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à terrâ distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga solis maximè splenduêre, ex altera perigæi parte evanuêre. Igitur ex magnâ lucis in utroque situ differentia, concluditur magna solis & cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux cometarum regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissimè moventur, atque ideo sunt in perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia solis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ (h) luce solis à se reflexâ.

Corol. 2. (i) Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantopere frequentant regionem solis. Si cernerentur in regionibus longè

135. (h) * *Luce Solis à se reflexâ.* Nam à terrâ recedentibus cometis & ad solem accedentibus, augetur eorum splendor, decrescente licet diametro, ut ex præcedentibus observationibus patet.

(i) * *Ex dictis etiam intelligitur.* Referat S solem, T, terram, circulus DEFH, sphæram fixarum. Quoniam cometæ splendent luce solis à se reflexâ, (cor. 1.), ii non videbuntur, nisi à sole ità illustrentur ut oculi nostri hâc luce moveri possint. Prætereà cometæ per caudas suas maximè fiunt conspicui, has autem caudas non emittunt priusquam ad solem aliquantulum incaluerint, quare patet cometas sese conspicuos non præbere nisi ad definitam quandam à sole distantiam accedant. Ponatur itaque sphæra ABCG, soli concentrica ad talem distantiam descripta ut nullus cometa propter illustrationis defectum, detegi possit, priusquam ad sphæræ hujus superficiem pervenerit, juncta recta ST, producatur utrinque donec superficiei huic occurrat in A, & C. Per T, ductum intelligatur planum HE, cui normalis est recta AC, planum illud sphæram dividet in duo hemisphæria quorum unum HFE, est versus solem, alterum verò HDE, soli opponitur. Cometæ omnes in sphæ-



ræ segmento BCG, existentes, videbuntur in hemisphærio versus solem, omnes autem qui versantur in segmento BAG videbuntur in hemisphærio quod soli opponitur.

longè ultra ſaturnum, deberent ſæpiùs apparere in partibus ſoli oppoſitis Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur; & ſol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio ſolem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux ſolaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à ſole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quam ſint ipſo jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa ſolem deſcripti pars longè major ſita eſt à latere terræ, quod ſolem reſpicit; inque parte illâ majore cometæ, ſoli ut plurimum viciniores, magis illuminari ſolent.

Corol. 3. Hinc (k) etiam manifeſtum eſt, quod cœli reſiſtentia deſtituuntur. Nam cometæ vias obliquas & nonnunquam curſui

tur. Quarè ſi ſegmentum B C G, majus ſit ſegmento B A G, plures cometæ videbuntur in hemiſpherio verſus ſolem quam in oppoſito. Jam verò cometæ nudis oculis ſe priùs detegendos non exhibent quam ſint Jove propiores; ponatur itaque S A, circiter $\frac{3}{2}$ diſtantiæ Martis à ſole, hoc eſt, S A ſit circiter dupla ipſius S T, erit ſegmentum B G C pluſquam quadruplo majus ſegmento B A G, ideóque quadruplo vel quintuplo plures cometæ detegentur in hemiſpherio verſus ſolem quam in hemiſpherio oppoſito. At ſi cometæ cernerentur in regionibus longè ultrà Saturnum, foret S A, longè major quam S T, & ideò cometæ ſæpiùs deberent apparere in partibus ſoli oppoſitis, forent enim terræ viciniores qui in ſegmento B A G, verſantur, cæteros verò in ſegmento B C G, ſol interpoſitus obſcuraret. Ex his intelligitur cur cometæ tantoperé frequentant regionem Solis.

(k) * *Hinc etiam manifeſtum eſt.* Clariſſ. Caſſinus in mon. Pariſ. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosè reduxit. Obſervatos plurimorum cometarum motus retrogrados meras eſſe apparentias conjectatur, non ſecus ac directus planetarum circumſolarium motus apparet aliquandò retrogradus. Sed quamvis celeberrimi hujuſce Aſtronomi judicium maximè veneremur, nonnullos tamen cometas motu verè retrogrado contrà ſeriem ſignorum curſum tenuiſſe conabimur oſtendere, ubi hàc de re plura dicendi locus dabitur, poſtquam ſcilicet tradiderimus motuum cometarum elementa Obliquas eſſe nonnunquam cometarum vias & curſui planetarum contrarias fateri non dubitarunt quidam Carteſiani. Verùm quá ratione diverſi illi cometarum motus cum vorticibus conciliari poſſint difficilè intelligitur, cum enim cometæ in regiones planetarum deſcendant, neceſſe videtur ut rapidiſſimo vorticum torrente contrarii cometarum motus maximè perturbentur, citóque deſtruantur, ac tandem cometæ hujuſce torrentis vi rapiantur. At ſummè regulares eſſe cometarum motus & contrà curſum planetarum diutiſſimè conſervari, nonnullis cometarum exemplis deinceps patebit.

DE MUNDI SYSTEMATE.

curſui planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus ſuos, etiam contra curſum planetarum diutiſſimè conſervant. (l) Fallor ni genus planetarum ſint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod ſcriptores aliqui meteora eſſe volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. (m) Capita cometarum atmoſphæris ingentibus cinguntur; & atmoſphæræ infernè denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt, non ipſa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic terra ſi è planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, & corpus firmum ſub nubibus propè deliteſceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata ſunt, quæ ſitum mutant inter ſe, & firmum jovis copus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum ſub atmoſphæris & profundioribus & craſſioribus abſcondi debent.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.

(n) Patet per corol. I. prop. XIII. libri primi, collatum cum prop. VIII. XII. & XIII. libri tertii.

Co-

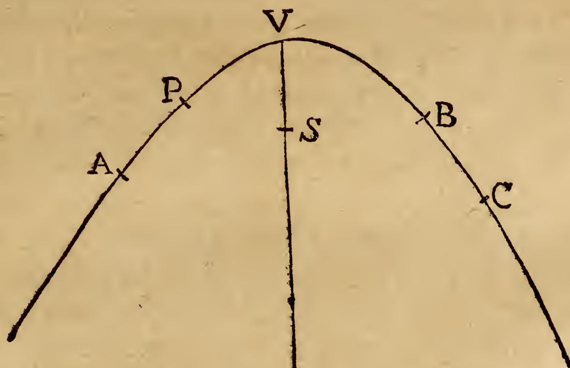
135. (l) * *Fallor, ni genus planetarum ſint.* Quam gravibus fundamentis nitatur hæc ſententia manifeſtum erit poſteà ex variis cometarum phænomenis.

(m) * *Capite cometarum* atmoſphæris ingentibus cingi variis argumentis inpoſterum confirmat Newtonus. Cæterum in ipſis cometarum corporibus non fieri perpetuas mutationes illas in decurſu conſtabit independenter omninò ab illâ opinione quæ cometis ingentes atmophæras tribuit.

(n) * *Patet.* Quoniam cometæ motu ſuo lineas curvas circà ſolem deſcribunt, ut ex obſervationibus conſtat, vi aliquâ à motu rectilineo detorquentur (per leg. I.). Quoniam autem hæc vis quæ planetas à lineis rectis detorquet maximè tendit versùs ſolem ut potè corpus cætera omnia ſyſtematis ſolaris corpore longè ſuperans, eadem quoquè vis in cometis ſolem maximè debet reſpicere. Sed vis acceleratrix in planetis eſt in duplicatâ ratione diſtantiarum à ſole inverſâ (prop. 8. lib. 3.). Quarè eandem quoquè legem obſervare debent cometæ quæ ſunt corpora planetis ſimilia ac proindè (cor. prop. 13. lib. I. & prop. 13. lib. 3.)

come-

Corol. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica planeta.



cometæ non secus ac planetæ in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moventur & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describunt. Hæc ità se habent, si sol è loco suo nullatenus moveatur; sed quamvis sol per attractionem planetarum perpetuo motu agitetur, non tamen longè recedit à communi gravitatis centro planetarum omnium, ideóque etiam cometæ qui in regionibus à sole maximè dissitis commorantur, non magnoperè hujus centri situm turbare possunt. Quarè orbitarum suarum umbilicus non longe distabit à centro solis, ac proindè propositio hæc vera est quamproximè. Quantum accuratè observatis cometarum motibus congruat patebit deinceps.

136. Keplerus aliique post eum astronomi non pauci cometas in lineis rectis moveri posuerunt, & indè cometarum quorumdam loca observationibus satis congrua calculo investigarunt. Res ità succedere potest, si observetur cometa in eâ tantùm orbitæ suæ parte quæ à rectâ non multum differat. Sit APVBC, Sectio conica admodùm excentrica in cujus umbilico altero S collocatum sit solis centrum. Ponamus cometam observari, dum orbitæ suæ partem AP, describit, fieri potest ut reliquo tempore, dum scilicet à loco P, per V, B, ad locum C promovetur, in regiones remotissimas abiens oculis se subducat & sub radiis solaribus delitescat respectu observatoris in tellure circà solem S motâ, vel etiam accidere potest ut, motu telluris ità exigente, cometa percurrens orbitæ partem APVB, sub solaribus radiis abscondatur & tunc primum observetur cum ad locum B pervenerit, lineam BC descripturus. In hoc utroque casu via cometæ à lineâ rectâ parum differet. In primo casu, cometæ à Sole absorpti credentur, quia ad solem accedentes, pro destructis habebuntur. In altero casu, è sole videbuntur emergere, quia tunc primum sese conspicuos præbuerunt, dum à Sole in remotas regiones discedebant. Porrò dum cometa versus solem descendit, putà dum AP percurrit posteà ad solem accedens sub ejus radiis latet, putà dum PVB describit, tandemque dum ad alteras solis partes subitò emergit, usurpatur sæpè pro novo cometa à priori in AP diverso, & duæ rectæ AP, BC pro duabus trajectoriis habentur. Ex his patet cur trajectoriæ rectilineæ, observatis cometarum motibus ple- 136.

DE MUNDI SYSTEMATE.

netarum in (o) axium principalium ratione ſeſquiplicatâ. (P) Ideoque cometæ maximâ ex parte ſupra planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis orbis cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis ſaturni, id eſt, ad annos 30. ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1. ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. (p) Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ ſine erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſint.

Corol. 3. Et propterea (per corol. 7. prop. XVI. lib. 1.) velocitas cometæ omnis, erit ſemper ad (q) velocitatem planetæ cujuſvis circa ſolem in circulo revolventis, in ſubduplicatâ ratione duplæ diſtantiæ planetæ à centro ſolis, ad diſtantiam cometæ à centro ſolis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu ellipſeos in quâ terra revolvitur ſemidiametrum maximam eſſe partium 100000000: & (r) terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eâdem telluris à ſole diſtantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ ſit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$.

136. plerumque reſpondeant. Id fit ſcilicet eò quod aliqua duntaxat portio trajectoriæ pro integrâ trajectoriâ habeatur. At ſi tota ſimul conſideretur tam in aſcenſu verſus ſolem quam in deſcenſu, aliam nullam præter Sectionem conicam ſatisfacere conſtabit.

(o) * *In axium principalium ratione ſeſquiplicatâ.* (Prop. 15 lib. 1.).

(P) * *Ideòque cometæ* maximâ ex parte ſuprà planetas verſantes, quo tempore ſcilicet oculos noſtros fugiunt & eo nomine orbes axibus majoribus quam planetæ deſcribentes tardius revolventur.

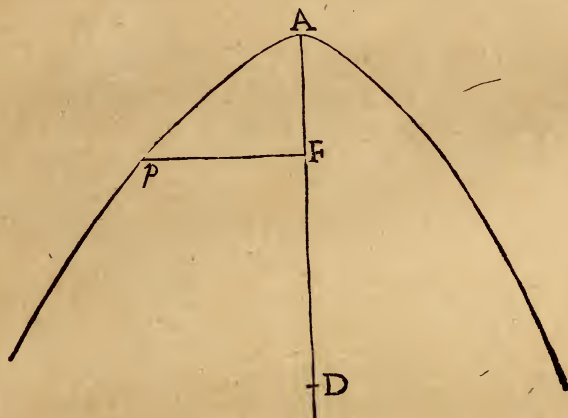
(p) * *Orbes autem parabolis adeò finitimi.* Orbes cometarum ſunt admodum excentrici, ut ex obſervationibus colligitur, & valdè exigua eſt portio orbis quem toto apparitionis tempore deſcribunt, exiguo enim temporis ſpatio ſeſe conſpicuos præbent. Verum ſi in ellipſi centrum ad infinitam ab umbilico diſtantiam removeatur, portio ellipſis cujus abſciſſa finita eſt, abit in parabolam. Quarè elliptici orbes cometarum erunt parabolis valdè finitimi.

(q) * *Ad velocitatem planetæ cujuſvis* circà ſolem in circulo revolventis, hoc eſt, ad velocitatem ejus mediocrem.

(r) * *Et terra.* Fiat hæc analogia: ut eſt tempus periodicum terræ circà ſolem ad totam peripheriam circuli 3.141, ità dies una vel hora una ad partem peripheriæ unâ die vel horâ unâ deſcriptam.

$101364\frac{1}{2}$. (s) In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum reciprocè, ideoque datur. LIBER TERTIUS. PROP. XL. THEOR. XX.

Corol. 4. (t) Unde ſi latus rectum parabolæ quadruplo majus ſit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur eſſe partium 100000000: area quam cometa radio ad ſolem ducto ſingu-



(s) * *In majoribus autem vel minoribus.* (Cor. 6. prop. 4. & prop 15. lib. 1. vel per cor. 6. prop. 16. ejuſdem libri.).

(t) * *Undè ſi latus rectum.* Ex umbilico parabolæ F, ducatur ad axem A D, ordinata P F, erit area A p F, ad aream circuli quartâ parte lateris recti ſeu radio A F deſcripti (theor. 2. de parabolâ lib. 1.) ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Nam ſi radius circuli ſumatur æqualis unitati, erit area circuli ad quadratum diametri, ut 3.14159 ad 4. Sed rectangulum ſub ordinatâ p F & abſciſſâ F A, eſt dimidium hujus quadrati, hoc eſt 2, & area parabolica A p F, hujus rectanguli duæ tertiæ partes, hoc eſt $\frac{4}{3}$ (per theor. 4. de parab. lib. 1.). Quarè area parabolica A p F, eſt ad aream circuli radio A F, deſcripti ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Si igitur velocitas cometæ revolventis in parabolâ eadem eſſet cum velocitate planetæ gyrantis in circulo, in eâdem quoque ratione foret tempus quo cometa deſcribit arcum parabolæ A p, ad tempus periodicum planetæ. Sed velocitas cometæ eſt ad velocitatem planetæ in eâdem diſtantiâ à ſole ut $\sqrt{2}$ ad 1, in hâc igitur ratione diminuenda eſt prior ratio. Undè tempus quo cometa deſcribit arcum parabolicum A p, erit ad tempus periodicum planetæ ut $\frac{4}{3\times\sqrt{2}}$ ad $\frac{3.14159}{1}$. Sivè ut $\sqrt{\frac{16}{9\times 2}}$, hoc eſt, ut $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ad 3.14159. 136.

 Jam

DE MUNDI SYSTEMATE. singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. (u) Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quâvis, erit area diurna & horaria major vel minor in eâdem ratione subduplicatâ.

(x) LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam HN demitte perpendicula quotcunque AH, BI, CK, DL, EM, FN.

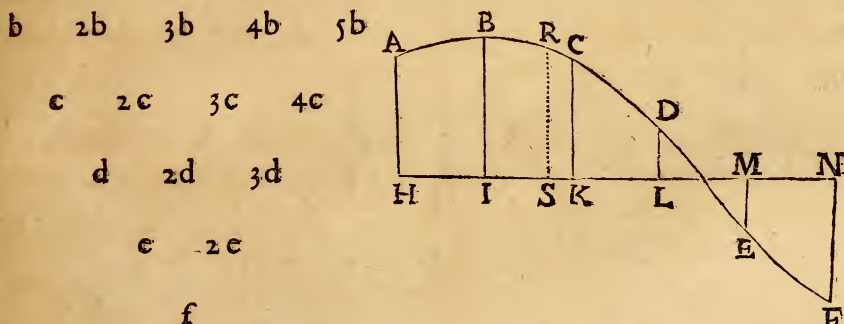
Cas.

136. Jam tempus periodicum terræ circâ solem sit 365.2565 dier. & cometa in perihelio ad distantiam æqualem distantiæ terræ à sole supponatur, tempus quo cometa describet arcum parabolicum A p, per hanc analogiam invenitur: ut est 3.14159 ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$, ità 365.2565 ad tempus quæsitum quod erit 109. dier. 14 hor. 46'. Si quadratum radii ponatur esse partium 100000000, erit area parabolica harum partium 133333333, quas cometa radiis ad solem ductis describit diebus 109. hor. 14.46'. Quarè area quam cometa singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$ & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$.

(u) * *Sin latus rectum.* Tempora quibus cometa in distantiis inæqualibus areas parabolicas similes describeret, sunt ut revolutiones in circulis, ideóque in ratione distantiarum sesquiplicatâ (cor. 6. prop. 4. lib. 1.), id est, majus temporis intervallum requiritur ut cometa in majori parabolâ aream similem describat, minus autem in minori, ac proinde cometa tempore æquali minorem partem parabolæ majoris & majorem parabolæ minoris describeret, idque in ratione sesquiplicatâ distantiarum inversâ, hoc est, positâ ratione distantiarum $\frac{d}{e}$, erit ratio arearum æquali tempore descriptarum ut $\frac{1}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. Sed areæ similes parabolarum inæqualium sunt in ratione duplicatâ laterum rectorum (112. lib. I.). Sive distantiarum quæ sunt laterum rectorum pars quarta (cor. 2. theor. 1. de parab. lib. 1.). Quarè ratio prior in hâc ratione duplicatâ augenda est, totaque ratio composita erit ut $\frac{dd}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{ee}{e\sqrt{e}}$, hoc est, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{e}$, quæ est ratio subduplicata distantiarum sive laterum rectorum. Patet aream minorem fieri in eâdem ratione subduplicatâ, si ratio sesquiplicata distantiarum minuatur in ratione duplicatâ laterum rectorum seu distantiarum.

(x) * *Lemma.* Totum illud Lemma exponitur num. 76. lib. 2.

Cas. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia sunt intervalla HI, IK, KL, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. secundas c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias d, $2d$, $3d$, &c. id est, ita ut sit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, dein $b - 2b = c$, &c. & sic pergatur ad

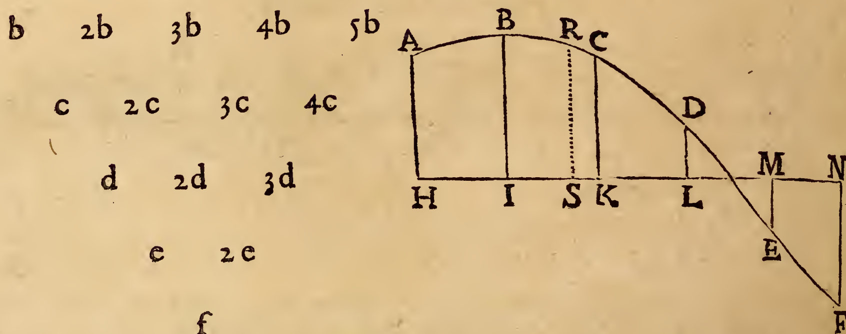


differentiam ultimam, quæ hic est f. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæsitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates esse, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad usque penultimum perpendiculum ME, & præponendo signa negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, & signa affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et signis probe observatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Cas. 2. Quod si punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia sint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; secundas per intervalla bina divisas c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias per intervalla terna divisas d, $2d$, $3d$, &c. quartas per intervalla quaterna divisas e, $2e$, &c. & sic

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. poſtea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Inventis



differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproximè. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum area curvæ illius quadrandæ. (y) Poteſt autem parabola per methodos notiſſimas ſemper quadrari Geometricè.

LEM-

136. (y) * *Poteſt autem Parabola*, per methodos notiſſimas (165. lib. 1.) ſemper quadrari geometricè. Inveniatur itaque æquatio definiens curvam parabolicam quæ tranſibit per curvæ quadrandæ puncta quotlibet; erit area parabolæ hujus eadem quam proximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. Quò plura ſunt puncta curvæ propoſitæ per quæ tranſit curva Parabolica, eò propius area hujus accedit ad aream illius.

LIBER TERTIUS. PROP. XL. THEOR. XX.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes HA, IB, KC, LD, ME observatas quinque longitudines cometæ, HS tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæsita.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

(z) Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

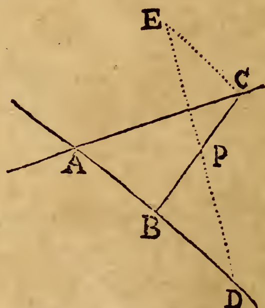
L E M-

(z) 137. * *Si longitudinum observatarum*, (patet per not. in cor. præc.). Methodus Lemmatis præcedentis quæ methodus interpolationum dici solet, in rebus Astronomicis usus habere potest eximios. Hanc methodum adhibuit Clariss. Maierus tom 2. Comment. Acad. Petropol. ad investiganda solstitiorum momenta. Circà tempus solstitii observentur aliquæ Solis altitudines meridianæ, illasque Solis altitudines repræsentent quædam ordinatæ, & tempora inter observationes elapsa ordinatarum intervallis exhibeantur. Deinde transeat Parabola per extremitates ordinatarum, abscissa quæ correspondet minimæ ordinatæ, tempus solstitii determinabit. Cæterum definiri potest tempus solstitii per plures observationes & parabolam plurium dimensionum, vel per tres observationes duntaxat & parabolam conicam, uti fecit Halleius. Verùm in quocumque casu adhibeatur interpolationum methodus, oportet differentias observatas sensibiliter majores esse erroribus qui in ipsâ observatione committi possunt, hâc autem adhibitâ curâ, satis accuratè determinari poterunt plurima astronomiæ phænomena quæ aliâ quidem viâ forent determinatu difficillima. Elegantissimum ejusdem methodi exemplum dedit eximius geometra D. Clairaut in Mem. Paris. an. 1736., ubi determinandæ telluris figuræ modum exponit ex mensurâ plurium meridiani arcuum in diversis latitudinibus captâ. 137.

LEMMA VII.

Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in datâ illâ ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q. E. F.*



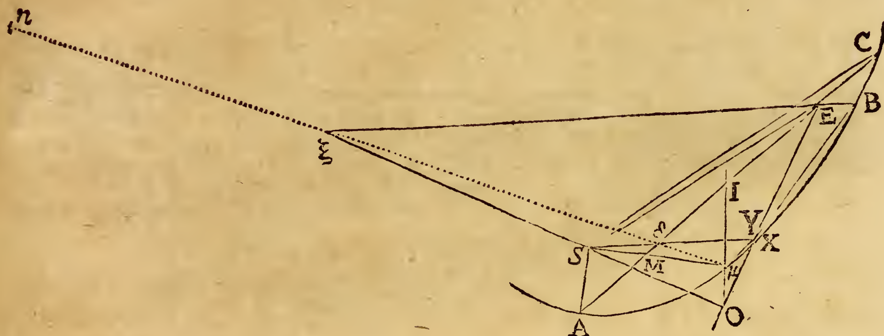
LEMMA VIII.

Sit ABC *parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bisecta in* I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit* Iμ *&* *vertex* μ. *In* Iμ *producta capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius* Iμ. *Jungatur* OS, *& producatur ea ad* ξ, *ut sit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et si cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* ξB *secans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chordâ* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim *EO* secans arcum parabolicum *ABC* in *Y*, & agatur μ*X*, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, & actæ *EO* occurrat in *X*; & (a) erit area curvilinea *AEX*μ*A* ad aream curvilineam *ACY*μ*A* ut *AE* ad *AC*. Ideoque cum trian-

137. (a) * *Et erit area.* Quoniam chorda AC bisecta est in I, erit semisegmentum AμI æquale semisegmento CμIC. Item quia μX tangit parabolam in μ, erit μX, parallela chordæ AC (per Lem. 4. de conic. lib. 1.) ac proinde triangulum

triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eâdem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASCY\mu A$ ut AE ad AC. Cum autem ξO sit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eâdem ratione, erit SX ipsi EB parallela: & propterea si jungatur BX, erit triangulum SEB triangulo XEB æquale.



Unde si ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum EXB, & de summa auferatur triangulum SEB, manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque ideo ad aream $ASCY\mu A$ ut AE ad AC. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis est area $ASBY\mu A$ (b) quamproximè, & hæc area $ASBY\mu A$ est ad aream $ASCY$

lum O I E simile est triangulo O μ X, ideóque ob I O triplam ipsius μ O, erit triangulum I O E trianguli μ O X, noncuplum & triangulum I O E trapezii IμXE, sesquioctavum. Præterea triangulum IAO, est trianguli I A μ, sesquialterum (omittuntur in figurâ aliquæ lineæ ad vitandam confusionem) cum idem sit trianguli utriusque vertex A, sitque basis O I sesquialtera basis μ I; triangulum verò A μ I, subsesquitertium est semisegmenti A μ I (prop. 24. Archimed. de parab vel theor. 4. de parab. lib. 1.). Quarè triangulum A O I est sesquioctavum semisegmenti A μ I, hoc est, in ratione compositâ ex rationibus sesquialterâ & subsesquitertiâ ac proinde triangulum A O I, est ad semisegmentum A μ I, sicut triangulum IOE, ad trapezium μ X I E, & vicissim trapezium μ X I E est ad semisegmentum AμI ut I E ad A I, ac proindè, componendo, area curvilinea A μ X E, est ad semisegmentum A μ I, ut A E, ad A I, ideóque area curvilinea A μ X E est ad segmentum totum A μ C ut A E ad A C. 137

(b) * *Quamproximè.* Ob viciniam punctorum μ, X (ex hyp.).

De Mundi Systemate. $ASCY\mu A$, (c) ut tempus descripti arcus AB ad tempus descripti arcus totius AC. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproximè *Q. E. D.*

Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem μ, est AE ad AC in ratione temporum accuratè (d).

Scho-

(c) * *Ut tempus descripti arcûs.* (prop. 1. lib. 1.).

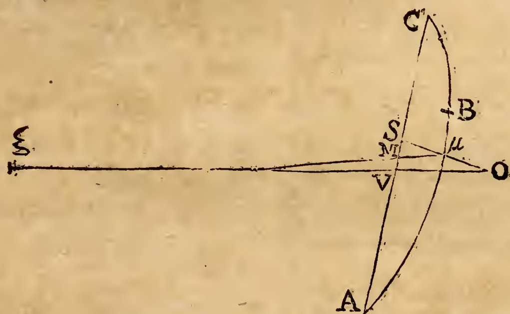
(d) * *Accuratè.* Ideò enim in casu Lemmatis hujus A E non est ad A C in ratione temporum accuratè, quia area $ASBX\mu A$, sumpta est æqualis areæ $ASBY\mu A$, quod verum est duntaxat quamproximè. Sed coincidentibus punctis B, μ, areæ illæ æquales fiunt accuratè, quare in hoc casu A E est ad A C, in ratione temporum accuratè.

138. Quoniam coincidentibus punctis B, μ, chorda A C dividitur in E in ratione temporum accuratè, iisdem verò punctis non coincidentibus, hæc chorda dividitur in ratione temporum quamproximè tantùm, quò propius erit punctum B vertici parabolæ μ, eò magis accuratè dividetur chorda A C in duo segmenta quæ temporum rationem habeant. Observandum est chordam A C magis accuratè dividi in ratione temporum, si B distet à vertice μ versus C quam si ab eodem vertice μ, versus A, æquali intervallo distet. Quoniam enim parabolæ portio μ A vertici principali propior est, ea fit curvior & à tangente μX, magis deflectit quam portio μ C, à vertice μ, remotior. Quarè si investiganda sint tria temporis momenta quibus cometa in parabolæ locis tribus A, B, C, versatur ità ut A E sit ad A C, ut temporum intervalla accuratè, sumenda sunt prædicta tempora ferè æqualia. Nam ob exiguas trajectoriæ parabolicæ portiones astronomicis observationibus subjectas, pun-

Scholium.

Si jungatur $\mu \xi$ ſecans AC in δ, & in ea capiatur ξn, quæ ſit ad μB ut 27 MI ad 16 $M\mu$: acta Bn ſecabit chordam AC in

punctum E, non multum diſtat à chordæ medio puncto I. Oportet autem intervallum illud, ubi cometa tardior eſt, paulò majus eſſe altero; cometa enim exiſtente in μ, ubi chorda A C, dividitur accuratè in ratione temporum; erit recta E C, major quam A E, hoc eſt, tempus quo cometa tunc tardior (cor. 3. prop. 40. lib. huj.) deſcribit arcum BC, majus eſt tempore quo idem cometa factus velocior deſcribit arcum B A. Accuratius itaque eligentur tempora parum inæqualia ut punctum E potius abeat verſus C, quam verſus A, ob rationem modò allatam.



139. Si vertex μ, ſegmenti parabolici $A\mu C$ parum distet à vertice principali, ſitque punctum B proximum puncto μ, recta $S\mu$, ex parabolæ umbilico S, ad verticem μ, ducta dividet chordam A C, in M, fere in ratione temporum, ut ex præcedentibus patet.

140. Si fuerit recta $S\mu$, admodum magna reſpectu abſciſſæ μI, erit S V, tripla ipſius M V. Quoniam enim rectæ S V O, $SM\mu$; in hoc caſu pro parallelis haberi poſſunt, erit I V ad V M ut I O ad μO, hoc eſt, (per conſtr. Lem. 8.) ut 3 ad 1.

141. Iiſdem poſitis, erit $V\xi = 3VS + 3I\mu$; quoniam enim (per conſtr.) $S\xi = 2SO$, erit $O\xi = 3SO = 3SV + 3VO$. Jam utrinque auferatur V O, fiet $V\xi = 3SV + 2VO$. Sed ob rectas VO, $M\mu$ parallelas, V O eſt ad $M\mu$, ut I O ad $I\mu$, hoc eſt, ut 3 ad 2, ideóque $2VO = 3M\mu$. Prætereà rectæ $S\mu$, $I\mu$, æquales conſtituunt angulos cum rectâ tangente parabolam in μ, quæ eſt chordæ A C parallela (per theor. 3. de parab. & lem. 4. de conic.). Quare æquales ſunt anguli $MI\mu$, $IM\mu$, ac proindè recta $M\mu = I\mu$; undè fit $3I\mu = 2VO$, & $V\xi = 3VS + 3I\mu$. 141.

DE MUNDI SYSTEMATE. in ratione temporum (e) magis accuratè quam priùs. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ, si punctum B magis distat à

142. (e) 142. * *Magis accuratè quam priùs.* Sit A vertex principalis parabolæ, S umbilicus, $AS = f$, ideóque latus rectum principale $= 4f$. Ponatur $RB = y$, $rC = x$, erit area $ASBC = \frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$, & area $ASBA = \frac{y^3 + 12f^2y}{24f}$ (theor. 4. de parab.); ac proinde area ASBC, est ad aream ASBA, ut $\frac{x^3+12f^2x}{24f}$ ad $\frac{y^3+12f^2y}{24f}$, seu ut $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$, id est, in ratione temporum accuratè. Prætereà est $AC = \sqrt{Ar^2 + rC^2} = \frac{\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f}$; quarè si fiat $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$ ut $\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$ ad $AE = \frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$, erit quoque recta AC ad hanc rectam AE, in ratione temporum accuratè.

Jam verò investigandus est valor rectæ AE, qui prodit ex constructione Lemmatis præcedentis. Ex umbilico S, erigatur ad μO perpendicularis Sm, hæc erit æqualis ordinatæ $q\mu$. Deinde (theor. 1. de parab.) $q\mu$, dimidia est ipsius rC, seu $\frac{1}{2}x$, & $\mu m = qS = \frac{xx - 16ff}{16f}$. Præterea est $\mu I = 2\mu O$ (per constr.) & $\mu I = \frac{AI^2}{4S\mu}$ (165 & theor. 2. de parab.). Sed est $AI^2 = \frac{x^4 + 16f^2x^2}{64f^2}$, & $S\mu^2 = \left(\frac{x^2 - 16f^2}{16f}\right)^2 + \frac{1}{4}xx$, quare est μO seu $\frac{AI^2}{8S\mu} = \frac{x^4 + 16f^2x^2}{32fx^2 + 512f^2x}$, ac proindè $mO = \mu O - m\mu = \frac{x^4 + 16f^2x^2}{32fx^2 + 512f^2x} + \frac{16ff - xx}{16f}$, ideóque $SO = \sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4 + 16f^2x^2}{32fx^2 + 512f^2x} + \frac{16ff - xx}{16f}\right)^2}$, & $\xi O = 3\sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4 + 16f^2x^2}{32fx^2 + 512f^2x} + \frac{16ff - xx}{16f}\right)^2}$. Insuper ex puncto ξ, ad abscissam AR erectâ perpendiculari ξV, ob similitudinem triangulorum SmO, $S\xi V$, fit $SO : q\mu = \xi S : \xi V$, ideóque $\xi V = x$. Præterea $SO : mO = S\xi : SV$, ac proinde $SV = 2mO$, hincque prodit $AV = AS + 2mO$, & $VR = AR - AS - 2mO$. Sed ob triangulorum similitudinem $\xi V (x) : BR (y) = Vf : Rf$, & componendo, $\xi V + BR : BR = Vf + Rf : Rf$, quare $Rf = \frac{VR + BR}{\xi V + BR}$, datur itaque Rf, per x & y. Præterea $fB^2 = RB^2 + Rf^2$, sed $RB : Bf = \xi V : \xi f = \frac{\xi V \times Bf}{RB} = \frac{x \times \sqrt{RB^2 + Rf^2}}{y}$, & hinc $\xi B = \sqrt{RB^2 + Rf^2} + \frac{x \times \sqrt{RB^2 + Rf^2}}{y}$. Deinde in triangulo ABC, dantur latera AB, AC, & prætereà datur latus BC; ductâ enim Bg perpendiculari ad rC, erit $BC = \sqrt{Bg^2 + gC^2} = \sqrt{Rr^2 + (RB - rC)^2}$; datur itaque perpendicularis $Bb = \sqrt{\frac{3}{4}BC^2}$. Insuper ducatur AV perpendicularis ad AB, ob similitudinem triangulorum AVf, BRf, erit $Af : AV = Rf : RB$, ideóque $AV = \frac{RB \times Af}{Rf}$. Denique ductâ Bb, perpendiculari ad AC, similia erunt triangula EAV, Bbe, ac proinde $Bb : bE = AV : AE$, & invertendo $Bb : AV = bE : AE$, atque, componendo $Bb + AV : AV = bE + AE : AE$, hinc $AE =$ Ab

C

à vertice principali parabolæ quam punctum μ; & citra, si minus distat ab eodem vertice.

$\frac{Ab \times AV}{Bb + AV}$. Jam loco Ab, Bb, AV, substitutis eorum valoribus modò inventis prodit AE, paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

Investigandus superest valor rectæ Ae, qui prodit ex constructione scholii hujus. Quoniam similia sunt triangula ξSh, $\xi O\mu$, erit $\xi S : Sh = \xi O : O\mu$, hinc $Sh = \frac{\xi S \times O\mu}{\xi O}$; Sed inventa est suprà recta Sq, invenietur itaque qh, ac proindè etiam $h\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2}$. Prætereà $\xi S : SO = \xi h : h\mu$, quarè $\xi h = \frac{S\xi \times \sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$, ac proindè tota 142

recta $\xi\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2} + S\xi \times \frac{\sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$.

Deindè (per constr.) fit $\xi n = \frac{27\, MI \times \mu B}{16\, M\mu}$.

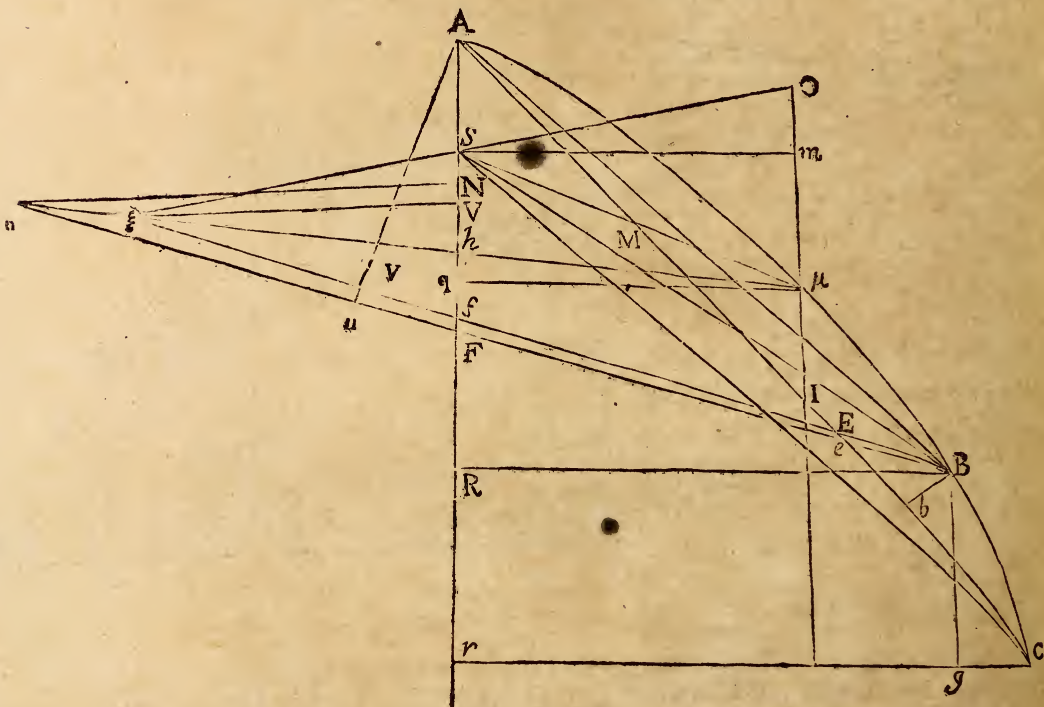
Sed $AM : MI = AS : I\mu$, ac proindè, componendo $AM + MI : MI = AS + I\mu : I\mu$, invenietur itaque MI, ideóque tota recta $n\mu$. Insuper $h\mu : qh = hr : hM$, invenietur itaque hN, ac proindè & Nn; ob triangulum hrN, rectangulum.

DE MUNDI SYSTEMATE.

lum. Praetereà (ex praeced.) inventa est hR, ideóque etiam datur nR. Jam fiat rN : NF = BR : RF, & invertendo Nr : RF = rN : BR, atque componendo NF + RF : RF = rN + BR : BR, hinc

142. $RF = \frac{BR \times NR}{rN + BR}$, ideóque datur $BF = \sqrt{BR^2 + RF^2}$. Deinde $BF : BR = rF : FN$, & inde $rF = \frac{BF \times FN}{BR}$, atque recta tota $rB = \frac{BF \times FN}{BR} + \sqrt{BR^2 + RF^2}$.

Ducatur recta A u, perpendicularis ad AB, erit ob triangulorum AuF, RBF, similitudinem AF : Au = RF : RB, ideó-



que $Au = \frac{RB \times AF}{RF}$, & hinc prorsus ut suprà habetur $Ae = \frac{Ab \times Au}{Bb + Au}$. Ex hactenus dictis patet dari rectas AE, Ae, per x, y, & quantitates constantes. Jam loco Ab, Bb, Au, substitutis eorum valoribus analyticis, fit Ae, paulò major quam AE, & paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

Quarè recta Bn, secabit chordam AC, in e, in ratione temporum magis accuratè quàm recta ξ B.

Idem scholium faciliùs demonstrari potest hoc modo. Quoniam $Ae = \frac{Ab \times Au}{Ab + Au} = Ab - \frac{Ab \times Ab}{Au + Bb}$ (ex dem.) erit Ae semper minor quam Ab. Jam verò factâ analogiâ $x^3 + 12f^2x : y^3 + 12f^2y = \sqrt{}$

(f) LEMMA IX.

Rectæ I μ *&* μ M *& longitudo* $\frac{AIq}{4S\mu}$ *æquantur inter se.*

Nam $4 S \mu$ est latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.

LEMMA X.

Si producatur S μ *ad* N *&* P, *ut* μ N *sit pars tertia ipsius* μ I, *&* S P *sit ad* S N *ut* S N *ad* S μ. *Cometa, quo tempore des-*

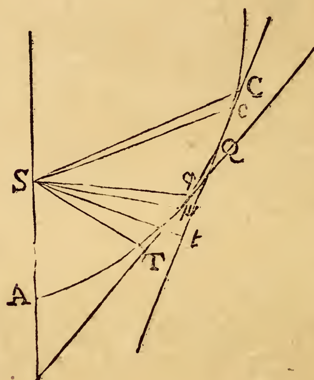
$\frac{\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f} : \frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3 + 12f^2x}}$, si A e æqualis foret huic quarto termino haberetur ratio temporum accuratè (prop. 1. lib. 1.). Sed quartus ille terminus major est rectâ Ae; nam terminus ille major est quam chorda AB, est enim AB $= \frac{\sqrt{y^4 + 16f^2y^2}}{4f} = \sqrt{x^3 + 12f^2x} \times \frac{\sqrt{y^4 + 16f^2y^2}}{4f\sqrt{x^3 + 12f^2x}}$ hæc autem quantitas minor est quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3 + 12f^2x}}$. Sed (per

142. constr.) ità ducitur μ n, ut recta n B semper secet chordam A C in puncto e, quod proximius est puncto C quam punctum E; quarè cum recta A e semper minor sit verâ, major tamen quam A E, hæc magis quam illa ad justum valorem accedet, ac proindè recta n B, secat chordam A C, in ratione temporum magis accuratè quam recta ξ B. Res eodem modo demonstratur, ubicumque sumatur punctum A.

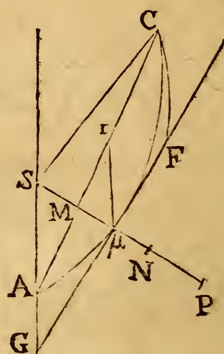
(f) * *Lemma IX.* (Patet per num. 139. lib huj. & theor. 1. & 2. de parab. lib. 1.).

DE MUNDI SYSTEMATE. *describit arcum* A μ C, *si progrederetur eâ semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; (g) area, quam radio ad punctum *S* ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ *ASCμ*. (h) Ideoque contentum sub longitudine in tangente descriptâ & longitudine $S\mu$



142. (g) * *Area quam radio.* Cometa velocitate quam habet in μ, relictâ parabolâ, progrediatur uniformiter in rectâ μQ, quæ parabolam tangit in μ, area SμQ, quam radio ad punctum S, ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ ASCμ, quam eodem tempore describit. Sumantur enim lineolæ Cc, qμ, à cometa descriptæ & à parabolæ umbilico S, ad tangentes Ct, μT, erigantur perpendiculares St, ST, velocitas in C, est ad velocitatem in μ, ut ST ad St (cor. 1. prop. 1. lib. 1.) sed velocitates in C, & μ, sunt ut spatia eodem tempore percursa, putà Cc & qμ; est igitur Cc ad μq ut ST ad St. Quarè triangulum Sμq, æquale est triangulo CSc. Illud autem ubique obtinet in triangulis minimis trilinea ASCμ, SμQ constituentibus. Quia verò æqualia insumuntur tempora ad percurrendas lineas AC, μQ (ex hyp.) ex æqualibus numero triangulis componuntur spatia ASCμ, SμQ, ac proindè triangulum SμQ, æquale est areæ parabolicæ, ASCμ.



(h) * *Ideóque.* Quoniam recta Sμ, cum tangente in μ, & chordâ AC, æquales constituit angulos (Lem. 4. de conicis), spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente & rectâ Sμ, erit ad spatium contentum sub chordâ AC, & rectâ SM, ut area ASCμ, ad triangulum ASC, id est, ut triangulum SAC + segm. parab. CAc ad triangulum SAC, id est, ut triangulum SAC + $\frac{2}{3}$ parallelo-

$S\mu$ esset ad contentum sub longitudinibus AC & SM, ut area $ASC\mu$ ad triangulum ASC, id est, ut SN ad SM. Quare AC est ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Cum autem velocitas cometæ in altitudine SP sit (per corol. 6. prop. XVI. lib. I.) ad ejus velocitatem in

altitudine $S\mu$, in subduplicatâ ratione SP ad $S\mu$ inversè, id est, in ratione $S\mu$ ad SN; (i) longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hâc novâ veloci-

lelogrammi AGFC, ad triangulum ASC, hoc est, ut $AC \times \frac{1}{2} SM + AC \times \frac{2}{3} I\mu$ ad $AC \times \frac{1}{2} SM$, sivè ut $SM + \frac{4}{3} I\mu$ ad SM. Sed μN, sumpta est æqualis $\frac{1}{3} I\mu$, & est $M\mu = \mu I$ (num. 139.). Quarè $MN = \frac{4}{3} I\mu$. Est igitur spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente & rectâ $S\mu$, ad spatium contentum sub chordâ AC, & rectâ SM, ut $SM + MN$ ad SM, hoc est, ut SN ad SM: Unde si longitudo descripta in tangente dicatur l, erit $L \times S\mu : AC \times SM = SN : SM$, ideóque longitudo descripta in tangente erit ad chordam AC, ut $\frac{SN}{S\mu}$ ad $\frac{SM}{SM}$, hoc est, ut SN ad $S\mu$. 142.

(i) * *Longitudo.* Nam longitudines iisdem temporibus uniformi motu descriptæ, sunt ut velocitates (5. lib. I.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

locitate deſcripta, cum ſint ad longitudinem in tangente deſcriptam in eâdem ratione, æquantur inter ſe. *Q. E. D.*

(k) *Corol.* Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam *AC* quamproximè.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine SN ſeu $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ demitteretur, ut caderet in ſolem, & eâ ſemper vi uniformiter continuatâ urgeretur in ſolem, quâ urgetur ſub initio; idem ſemiſſe temporis, quo in orbe ſuo deſcribit arcum AC, deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini $I\mu$ æquale.

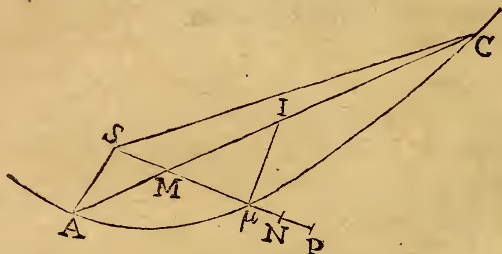
Nam cometa, quo tempore deſcribit arcum parabolicum *AC*, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine *SP* (per lemma noviſſimum) deſcribet chordam *AC*, ideoque (per corol. 7. prop. XVI. lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus ſemidiameter eſſet *SP*, vi gravitatis ſuæ revolvendo, deſcriberet arcum, cujus longitudo eſſet ad arcus parabolici chordam *AC*, in ſubduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in ſolem in altitudine *SP*, cadendo de altitudine illâ in ſolem, deſcriberet ſemiſſe temporis illius ((l) per corol. 9. prop. IV. lib. I.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis *SP*, id eſt, ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$. (m) Unde cùm pondus co-

242. (k) * *Corol.* Si $S\mu$, ſit admodum magna reſpectu μN, tres geometricè proportionales $S\mu$, SN, SP, erunt etiam arithmeticè proportionales quamproximè, id eſt NP, æquabitur μN, ſivè trienti ipſius $I\mu$, ideóque μP, æqualis quamproximè $\frac{2}{3}$ ipſius $I\mu$. Quarè patet collarium.

(l) * *Per corol. 9. prop. IV. lib. I.* Vel per num. 201. ejuſdem lib.

(m) * *Undè cum pondus cometæ.* Gravitas acceleratrix cometæ verſus Solem in diſtantiâ SN, eſt ad gravitatem acceleratricem verſus eundem in diſtantiâ SP, ut SP^2 ad SN^2, hoc eſt, ob proportionales SP, SN, $S\mu$, ut SP ad $S\mu$.

cometæ in ſolem in altitudine SN ſit ad ipſius pondus in ſolem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in ſolem cadendo, deſcri-



bet ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, (n) id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.

Problema hocce longè difficillimum multimodè aggreſſus, compoſui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes (o) æqualibus temporum intervallis

(n) * *Id eſt.* (Lem. IX.).

(o) * *Æqualibus temporum intervallis.* Ratio patet per not. 138. 142.

De Mundi Systemate.

vallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum *E* (in fig. lem. VIII.) incidat in punctum *M* quamproximè, & inde aberret versus *I* potius quam versus *A*. (p) Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus cometæ locus per lemma sextum.

Designet *S* solem, *T*, *t*, *τ* tria loca terræ in orbe magno, *TA*, *tB*, *τC* observatas tres longitudines cometæ, *V* tempus inter observationem primam & secundam, *W* tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri telluris à sole distantiâ, describere posset, quæque (per corol. 3. prop. XL. lib. III.) invenienda est, & *tV* perpendiculum in chordam *Tτ*. In observatâ longitudine mediâ *tB* sumatur utcunque punctum *B* pro loco cometæ in plano eclipticæ, & inde versus

142. (p) * *Si tales observationes.* (Ibid.).

versus solem *S* ducatur linea *BE*, quæ sit ad sagittam *tV*, ut contentum sub *SB* & *St quad.* ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt *SB* & (q) tangens latitudinis cometæ in observatione secundâ ad radium *tB*. Et per punctum *E* agatur (per hujus lem. VII.) recta *AEC*, cujus partes *AE*, *EC*, ad rectas *TA* & *τC* terminatæ, sint ad invicem ut tempora *V* & *W*: & (r) & erunt *A* & *C* loca cometæ in plano eclip-

LIBER TERTIUS. PROP. XII. PROBL. XXI.

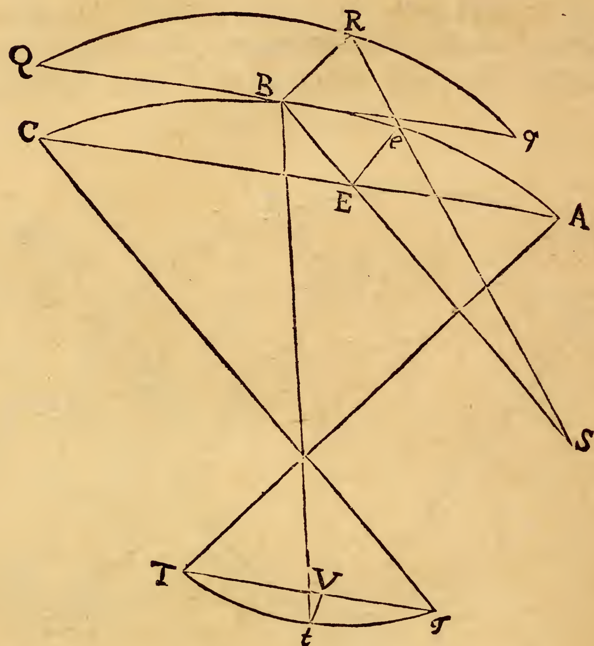
(q) * *Et tangens latitudinis cometæ.* Ex puncto B, ad planum Eclipticæ erecta intelligatur normalis, hæc erit tangens latitudinis cometæ in secundâ observatione, sumpto t B pro radio.

(r) * *Et erunt A & C loca cometæ.* Quoniam (ex hyp) B est vestigium cometæ in plano Eclipticæ, & BR ad planum Eclipticæ normaliter ducta, tangens latitudinis observatæ ex t ad radium t B, patet punctum R esse verum cometæ locum, atque R S distantiam cometæ à Sole in observatione secundâ. Per E, agatur E e, ad B R, parallela quæ (per prop. 8. lib. XI. elem.) normalis est ad planum Eclipticæ, jacetque in plano trianguli S B R, occurrat hæc ipsi S R in e. Jam verò recta R e, est ad rectam t V, in ratione compositâ ex R e, ad B E, & B E ad t V. Sed (per prop. 11. lib. 6. elem.) R e est ad B E ut R S ad B S & B E est ad t V, ut $St^2 \times SB$ ad SR^3. Quarè E e est ad t V, in ratione compositâ ex ratione S R ad BS, & ratione

142

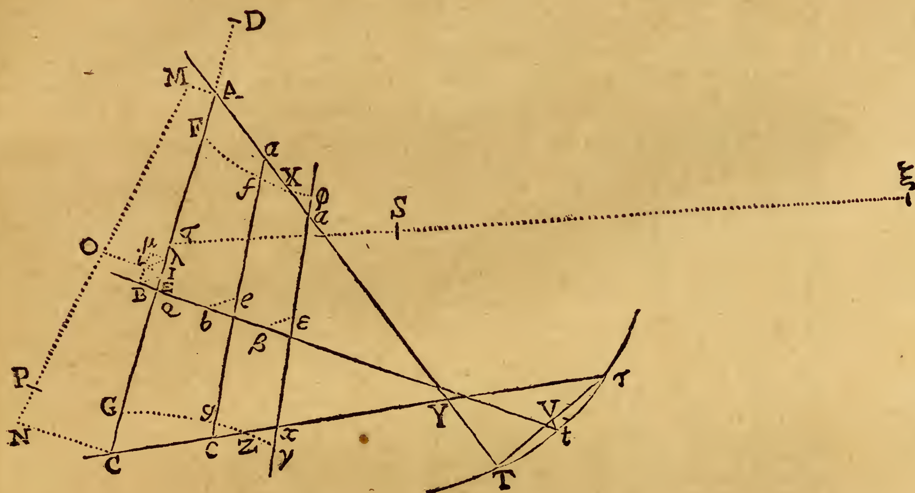
De Mundi Systemate. eclipticæ in obſervatione primâ ac tertiâ quamproximè, ſi modo *B* ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ.

Ad



142. tione $St^2 \times SB$ ad cubum rectæ SB; ratio autem quæ ex iſtis binis componitur eadem eſt cum ratione St^2 ad SR^2, hinc Re eſt ad BE, ut St^2 ad SB^2. Quia verò tV eſt æqualis quamproximè quadrato arcûs Tt per diametrum orbis magni diviſo (182. lib. 1.) erit recta tV, quamproximè ſpatium per quod terra è quiete demiſſa vi ſuæ gravitatis caderet verſus Solem, dum ſemiſſem arcûs Tt, deſcribet, ſi eâdem ubique gravitate acceleratrice uniformiter continuatâ urgeretur quâ urgetur in loco t, (202. lib. 1.). Præterea gravitas acceleratrix verſus ſolem in loco t, eſt ad gravitatem acceleratricem verſus eundem in loco R, ut SR^2 ad St^2, & ſpatia eodem tempore, urgentibus illis viribus deorſum verſus Solem, deſcripta, ſunt inter ſe ut vires (Lem. X. Lib. I.); Quarè recta Re, eſt ſpatium per quod cometa è quiete ex R demiſſus verſus Solem caderet ſemiſſe temporis quo Terra deſcribit arcum Tt, hoc eſt, ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit trajectoriæ ſuæ arcum interceptum inter duas longitudines TA, TC, ideóque punctum R, eſt in arcûs iſtius chordâ. Undè ſi tam arcûs trajectoriæ QRq binis longitudinibus TA, TC terminati quam puncti e, concipiantur veſtigia normalibus ad planum Eclipticæ demiſſis ſignata, nempè A, B, C & E, erit punctum E in chordâ arcûs ABC. Sed chorda arcûs ABC dividitur à rectâ SB ferè in ratione temporum quibus cometa ad Eclipticam reductus, deſcribit arcus AB, BC, (165.) & (per conſtr.) in eâdem ratione dividitur recta AC, nullaque alia hiſce conditionibus poteſt ſatisfacere. Cùm igitur oporteat chordam arcûs qui eſt

Ad AC bisectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipsi AC parallelam. Junge occultam Si secantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per solem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem



$3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto B versus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ sit ad priorem BE in duplicata ratione distantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eâdem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes AE & EC sint ad invicem, ut tem-

est vestigium portionis trajectoriæ inter longitudines T A, T C interceptæ, à rectis T A, T C terminari & per E transire & in E dividi in ratione temporum, cumque recta A C hasce conditiones sola & unica obtineat, evidens est rectam A C esse chordam prædicti arcûs, ac proinde puncta A & C sunt quamproxime vestigia cometæ in plano Eclipticæ in observationibus primâ & tertiâ, si modò B, sit locus ejus rectè assumptus in observatione secundâ.

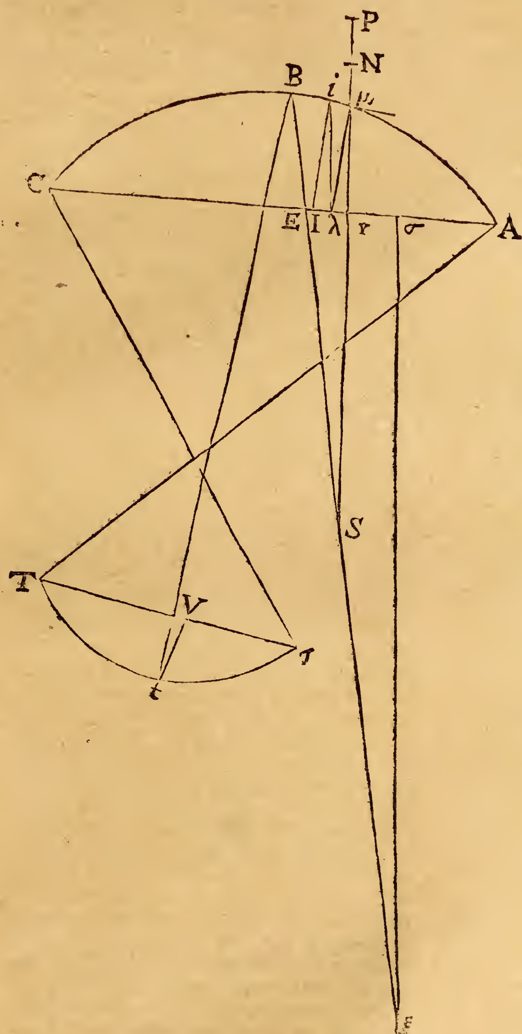
De Mundi Systemate.

tempora inter observationes V & W. Et erunt A & C loca cometæ (f) magis accuratè.

Ad

142. (f) * *Magis accuratè.* Quoniam (per constr. præced.) assumptus est locus B vero non satis proximus, & licet accuratè sumptus fuisset, tamen loca A & C, indè deducta non sunt satis accurate definita, hinc adhiberi debet aliqua correctio. Manente constructione Newtonianâ, concipiantur demissa à singulis trajectoriæ cometicæ punctis perpendicula ad planum Eclipticæ, prædictis perpendiculis in plano Eclipticæ signabitur curva parabolica A B C, cujus umbilicus S. Hujus arcûs A B C, rectis T A, T C comprehensi chorda est quamproximè recta C A, quæ bifariam dividitur in I, (ex dem.). Jam verò in prædicto arcu sumptum est punctum B, non procul à vertice segmenti A B C, nam capta sunt tria observationum tempora æqualibus fere intervallis ab invicem distantia, ita tamen ut tempus sit paulò majus ubi cometa tardiùs movetur. Præterea ducta est recta ad C A parallela concurrens in i cum normali erectâ à puncto I ad rectam C A, junctaque est secans Si, completumque parallelogrammum i I λ μ. Quia verò respectu immensæ Solis distantiæ, evanescit distantia punctorum I, μ; erit μ ferè vertex segmenti A B C. Jungatur μ S, secans chordam A C in Y, erit μY, ferè parallela i λ, ob immensam puncti S distantiam, ideóque $\lambda\gamma$, æqualis rectæ i μ, ac proindè & ipsi i λ. Sed (ex constr.) I σ sumpta est tripla ipsius i λ, quarè est etiam tripla ipsius $\lambda\gamma$ & reliquæ Yσ, ideóque juncta σ S, (165) ea ipsa est recta σ S, quæ exhibetur in Lem, 8. id est, in rectâ σ S, productâ versus S, reperitur punctum ξ, à quo ducta quævis recta chordam A C arcumque C B A secans, chordam secat in segmenta quæ eandem habent rationem cum temporibus quibus respondentes arcus a cometâ describuntur. Sed (ex constr) $\sigma\xi = 3 S\sigma + 3$ i λ & i λ = I μ, sunt enim rectæ i λ, I μ, diametri ejusdem parallelogrammi rectanguli, hinc $\sigma\xi = 3\sigma s + 3$ I μ. Quarè (140) punctum ξ, suprà inventum, illud est ex quo ducta utcumque recta dividit chordam C A in ratione temporum quibus binæ partes arcûs A C ab eâdem rectâ productâ notatæ, à cometâ describuntur. Deletâ igitur, ad vitandam confusionem, priore B E versus S ductâ, acta est nova versus ξ, quæ est ad priorem ut quadratum ipsius S B, ad quadratum ipsius S $\mu + \frac{1}{3}$ i λ, hoc est propter æquales i λ, I μ, ad quadratum ipsius S $\mu + \frac{1}{3}$ I μ, & S B est quamproximè æqualis ipsi S μ. Quarè nova B E, est ad priorem B E, ut S μ^2, ad S N^2, positâ μ N triente ipsius I μ, sivè i λ, ut in constr. Lem. X. Deindè gravitas acceleratrix versus Solem in loco N, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in loco B, vel μ, ut S B^2 vel S μ^2 ad S N^2. Præterea gravitates acceleratrices versus solem in distantiis diversis, manentibus dictis viribus, sunt ut spatia eodem tempore versus solem cadendo descripta; est igitur nova B E, ad priorem B E, ut spatium versus solem cadendo percursum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco N, semisse temporis quo cometa describit arcum longitudinibus T A, T C, comprehensum, ad spatium eodem tempore versus solem cadendo descriptum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco B. Sed æquales sunt hujus analogiæ consequentes, quare æquantur etiam antecedentes, ideóque nova recta B E æquatur spatio à grave cadente versus solem percurso, semisse temporis quo cometa arcum A B C, in Eclipticâ describit, urgente vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in distantiâ S N, à sole obtinet. At (Lem XI.) spatium per quod corpus decidit versus solem semisse temporis quo cometa describit arcum A B C, cum urgetur vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in loco N obtinet

Ad AC bisectam in I erigantur perpendicula AM, CN, IO, quorum AM & CN sint tangentes latitudinum in observatione primâ ac tertiâ ad radios TA & τC. Jungatur MN secans

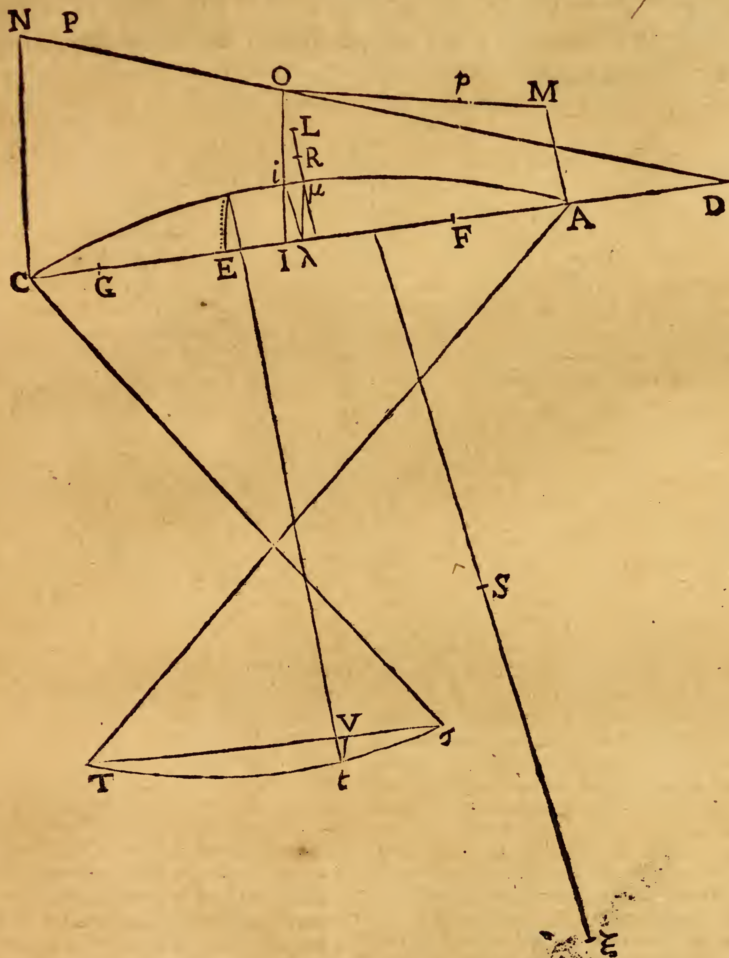


tinet, æquale est rectæ μY, segmento ipsius μS, inter verticem μ & chordam AC intercepto, ac proinde æquatur quamproxime ipsi BE segmento rectæ $B\xi$, inter punctum B ipsi μ proximum & chordam AC comprehenso. Undè punctum E est in chordâ AC magis accurate quam anteà, hoc est, chorda arcûs qui est vestigium portionis trajectoriæ cometicæ in plano Eccliptica, inter longitudines TA, TC interceptæ, per punctum E ultimò inventum transit quamproximè Porrò chorda prædicta per E traducta inter TA, TC, ità locari debet ut AE, sit ad EC, sicut tempus quo cometa describit Eccliptica arcum inter longitudines TA & tB, ad tempus quo arcum inter tB & TC describit (Lem. 8.) sed AC ità (per Lem. 8) acta est per E, ut AE sit ad EC in eâdem illâ ratione, nempe sicut tempus inter observationem primam & secundam ad tempus inter observationem secundam & tertiam. Rectè igitur acta est AC, per E scilicet transiens & divisa in E ut oportebat, ac proinde si modò punctum B, rectè fuerit assumptum pro cometæ vestigio in observatione secundâ, puncta A, C sunt ejusdem vestigia quamproximè in observationibus primâ & tertiâ.

De Mundi Systemate. cans IO in O. Conſtituatur rectangulum $iI\lambda\alpha$ ut prius. In IA productâ capiatur ID æqualis $S\mu+\frac{2}{3}i\lambda$. Deinde in MN verſus N capiatur MP, quæ ſit ad longitudinem ſupra inventam X, in ſubduplicatâ ratione mediocris diſtantiæ telluris à ſole (ſeu ſemidiametri orbis magni) ad diſtantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N, (t) erunt A, B, C tria loca cometæ,

142. (t) * *Erunt A, B, C.* Supereſt jam ut dignoſcatur an punctum B in mediâ longitudine rectè fuerit aſſumptum cometæ veſtigium, ut error hinc ortus, ſi quis fuerit, corrigatur, reliquis quæ hactenus facta ſunt manentibus. Deleto priore parallelogrammo $iI\lambda\mu$, ad priorem minuſque accuratam chordam C A conſtituto, deſcribatur alterum ad poſteriorem & accuratiorem chordam C A, eâdem adhibitâ conſtructione ut priùs. Ex punctis A, I, C, erigantur ad C A normales A M, I O, C N, ſitque A M tangens notæ latitudinis in obſervatione primâ ad radium T A, & C N tangens latitudinis in obſervatione tertiâ ad radium T C; jungatur M N ſecans I O in O. Si erigatur trapezium A C N M normaliter ad planum Eclipticæ manente rectâ C A, erunt puncta M, N loca vera cometæ, ſi modò punctum B ſit ejus veſtigium in plano Eclipticæ in obſervatione ſecundâ, & planum tranſiens per tria puncta M, O, N, eſt planum trajectoriæ cometicæ, ideoque recta M N eſt chorda arcus trajectoriæ parabolicæ à cometâ deſcriptæ inter obſervationem primam & tertiam, & S M, S N ſunt diſtantiæ cometæ à ſole in obſervatione primâ & tertiâ reſpectivè, hoc eſt, diſtantia vera cujuſvis puncti trajectoriæ cometicæ à Sole eſt hypothenuſa trianguli rectanguli cujus alterum latus eſt diſtantia à ſole veſtigii illius puncti in plano Eclipticæ, alterum autem eſt perpendiculum ex iſto veſtigio normaliter ad planum Eclipticæ excitatum & ad punctum trajectoriæ terminatum. Quia verò aliqua ex iſtis perpendiculis ſunt longiora ut N C, quædam breviora ut M A, inter hæc medium quoddam uſurpetur, putà hic I O. Et univerſaliter loquendo, diſtantia cujuſvis puncti trajectoriæ cometicæ à ſole erit quamproximè hypothenuſa trianguli rectanguli cujus alterum latus eſt diſtantia puncti analogi in veſtigio trajectoriæ deſcripto & alterum latus eſt ipſa recta I O. Quibus poſitis in I A, eâve productâ capiatur $ID = S\mu + \frac{2}{3}i\lambda = SR$, factâ $LR = L\mu$, & jungatur D O, hæc quamproximè æquabitur puncti trajectoriæ cujus μ eſt veſtigium diſtantiæ à ſole auctæ duabus tertiis rectæ interjectæ inter punctum iſtud & chordam arcûs trajectoriæ, ipſam ſcilicet M N in trapezio A C N M, id eſt, recta D O æqualis eſt rectæ in plano trajectoriæ cometæ analogæ ipſi S R in ejus veſtigio in plano Eclipticæ, hoc eſt D O æqualis eſt rectæ S R in parabolâ (Lem. X.). Jam (per cor. 3. prop. 40.) conferatur velocitas cometæ, dum in parabolicâ ſuâ trajectoriâ movetur in diſtantiâ à ſole æquali rectæ D O, cum velocitate telluris circà ſolem, & definiatur linea quam cometa, cum prædictâ velocitate æquabiliter motus, percurreret toto tempore quo tellus arcum τ t T deſcribit, ſivè toto tempore quo cometa arcum ABC in Eclipticâ percurrit, in partibus arcûs T t τ à tellure interim percurſi. Id autem facile præſtatur modo ſequenti. Calculo inveniatur longitudo arcûs τ t T à tellure deſcripti inter obſervationem primam & tertiam, poſito quovis numero rotundo pro mediocri diſtantiâ terræ à ſole, longitudo putà M P quæ eſt ad longitudinem priùs inventam X, in ſubduplicatâ ratione diametri orbis magni ad rectam notam D O, quæque proinde datur, eſt ipſa longitudo quæſita, ea nempè quam, cometa æquabiliter latus cum velocitate quam trajectoriam ſuam parabolicam deſcribens habet ad diſtantiam à ſole æqualem rectæ D O, percurreret tem-

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



tempore quo cometa arcum cujus chorda MN reverâ percurrit. Nam (per cor. 3. prop. 40.) velocitas cometæ in hâc distantiâ DO, est ad velocitatem telluris in prædictâ ratione Sed (per Lem. X.) dicta longitudo MP æqualis est chordæ arcûs quem cometa isto tempore reverâ describit; Quare si reperiatur MP æqualis chordæ MN, hoc est, si punctum P incidat in punctum N recte assumptum fuit punctum B in longitudine secundò observatâ pro vestigio cometæ, ideóque erunt A, B, C, tria loca cometæ per quæ orbis ejus in plano Eccliptica describi debet. 142.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tæ, per quæ orbis ejus in plano eclipticæ describi debet. (u) Sin punctum P non incidat in punctum N; in rectâ AC capiatur CG ipsi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad easdem partes rectæ NC jaceant, Ea-

ſ42. (u) * *Sin punctum* P, non incidat in punctum N, in rectâ M N eâve productâ, si opus est, (vid. fig. præced) capiantur M P, N P æquales longitudini prius inventæ, capiantur etiam C G, C F, æquales M P, N P, ità ut G & P ad easdem partes rectæ N C jaceant. Præterea eâdem methodo quâ ex assumpto puncto B, inventa sunt puncta E, A, C, G, ex assumptis aliis punctis b & β, inveniantur nova puncta e, a, c, g, & ε, α, $\varkappa$, γ. Quod si longitudo prius inventa M P, minor fuerit quam M N, aut A G, vel C F, punctum b, sumendum erit propius puncto Y, in quo C τ & A T concurrunt, & ità porrò, ità ut saltem $\alpha\gamma$, minor fiat quam $\alpha\varkappa$. Per puncta G, g, γ, describatur circulus qui rectam τ C, secabit inter G & $\varkappa$, putà in Z, si puncta nova b, β, sumpta fuerint, ut jam diximus. Similiter per puncta F, f, ϕ, describatur circulus rectam T A, intersecans in X, erunt puncta Z, X, loca cometæ ad Eclipticam reducta, sivè cometæ vestigia in observatione primâ & tertiâ, si B sit ejusdem vestigium in observatione secundâ. Idem similiter obtinet in a, c, & b, item in α, $\varkappa$ & β. Jam verò demonstratum est locum B, esse vestigium cometæ in observa-

Eadem methodo, quâ puncta E, A, C, G, ex assumpto puncto B inventa sunt, invenientur ex assumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e, a, c, g & ε, α, κ, γ. Deinde si per G, g, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, secans rectam τC in Z: erit Z locus cometæ in plano eclipticæ. Et si in

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

servatione secundâ, si puncta N, P, coincidant, itemque A & F; quare si reliquis manentibus, coincidant puncta C, G, erit C, vestigium cometæ in observatione tertiâ. Similiter coincidentibus punctis A, F, erit A, vestigium cometæ in observatione primâ. Ut autem puncta illa coinciderent, traductus est circulus transiens per tria puncta G, g, γ, rectam τ C, secans in Z. Cùm igitur punctum Z, sit tam in loco punctorum C, nempe rectâ τ C, quam in loco punctorum G, nempè circulo, quandò punctum C reperitur in Z, punctum G in illo etiam reperietur, id est, in isto casu coincident puncta C, G, ideóque punctum Z est verum cometæ vestigium in plano Eclipticæ in observatione tertiâ, huic enim conveniunt omnes conditiones requisitæ. Similiter ob easdem rationes, punctum X est verum cometæ vestigium in observatione primâ. Quare si ex puncto Z, ad planum Eclipticæ excitata intelligatur normalis Z R æqualis tangenti latitudinis notæ in observatione tertiâ ad radium τ Z, erit R locus verus cometæ in orbe proprio. Similiter ad planum Eclipticæ erigatur perpendicularis X Y, æqualis tangenti latitudinis in observatione primâ ad radium T X, punctum Y, erit alter cometæ locus in orbe proprio. Quarè (per prop. 19. lib. 1.) umbilico S, per loca bina R, r, describatur parabola, hæc erit trajectoria cometæ. Quia verò parabolæ per puncta R, r, & umbilico S, descriptæ duplex positio esse potest (ut patet ex constr. prop. 19. lib. 1.) ex eodem umbilico S, & binis punctis R, r, duæ describi poterunt parabolæ; utra autem pro orbe cometæ sumenda sit ex aliâ quâvis cometæ observatione manifestum erit. Nam locus cometæ qui ex alterâ harum parabolarum colligetur, cum observato loco conveniet, locus autem ex alterâ parabolâ deductus nequaquam observationibus congruet. 1425

De Mundi Systemate.

AC, *ae*, *ακ* capiantur *AF*, *af*, *αφ* ipsis *CG*, *cg*, *κγ* respective æquales, & per puncta *F*, *f*, *φ* ducatur circumferentia circuli *Ffφ*, secans rectam *AT* in *X*; erit punctum *X* alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta *X* & *Z* erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios *TX* & *τZ*; & habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per prop. XIX. lib. I.) umbilico *S*, per loca illa duo describatur parabola, & hæc erit trajectoria cometæ. *Q. E. I.*

(x) Constructionis hujus demonstratio ex lemmatibus consequitur: quippe cum recta *A C* secetur in *E* in ratione temporum,

143. (x) * *Constructionis hujus demonstratio.* Patet ex notis præced.

143. Lemma. Sit angulus rectilineus A Q B datumque punctum S; item sit curva M O N, talis ut per S ductâ quâvis rectâ SE sit BE, anguli lateribus intercepta, æqualis rectæ SO, erit curva MON, hyperbola. Nam ducatur SL, ad BQ, parallela, occurrensque ipsi AQ in L, in rectâ Q L productâ capiatur LZ = LQ, agaturque Z D ad Q B parallela, itemque ducatur O K parallela ad Q Z: ob SO = BE (per hyp.) erit HO = QE. Quare cum sit SH : HO = SL : LE = SL−SH : LE−HO = LH : LQ = LH : HK, erit SH × HK = HO × LH, hoc est, SE

rum, per lemma VII, ut oportet per lem. VIII: & BE per lem XI. sit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per corol. lem. X.) lon-

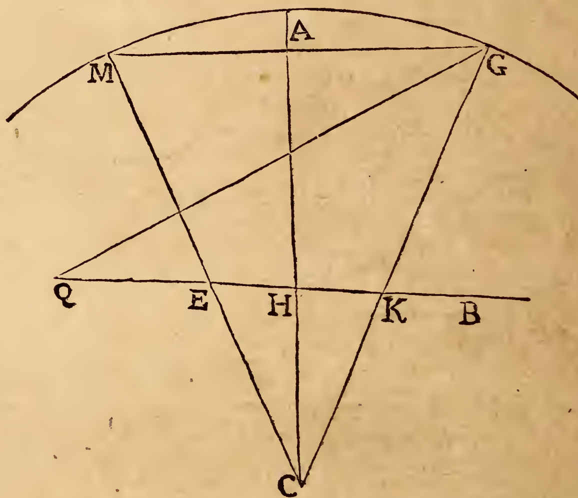
gitudo sit chordæ arcus, quem cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi MN æqualis fuerit, si modo B sit verus cometæ locus in plano eclipticæ.

Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima eli-

SL × HK − LH × HK = KO × LH − HK × LH. Unde erit SL × HK = KO × LH, vel ZL × LS = ZK × KO, ideóque curva MON, est hyperbola cujus asymptoti ZA, ZS (Lem. 1. de con.).

144. Corol. Hinc per datum punctum S, recta linea duci potest ità ut pars rectæ BE, lateribus anguli dati EQB, intercepta, æqualis sit rectæ datæ. Nam descriptâ hyperbolâ MON, centro S, intervallo datam rectam æquante, describatur circulus hyperbolam intersecans in O, & producatur SOE, erit BE, æqualis rectæ datæ SO (143). 144.

DE MUNDI SYSTEMATE. (y) eligere convenit. Si angulus AQt, in quo veſtigium orbis in plano eclipticæ deſcriptum ſecat rectam tB, præter propter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ



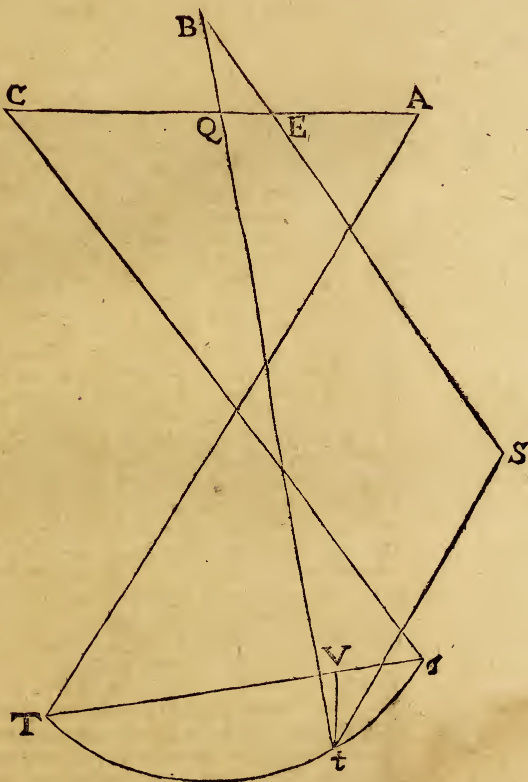
145. 145. Newtonus in arithmetica univerſali præcedentis corollarii conſtructionem quæ fit per conchoidem more veterum, anteponendam eſſe ait conſtructioni quæ Sectiones Conicas adhibet. Quarè veterum conſtructionem utpoté ſimpliciorem hic quoquè ſubjungemus. Sic autem deſcribitur conchois. Agatur nempè recta QB, ad quam erigatur normalis AH, deindè ex puncto C, tanquam polo ità ducantur rectæ quotcumque CM, rectam QB ſecantes in E, ut ſemper ſit EM, æqualis rectæ datæ AE, curva in quâ ſunt puncta M, A dicitur conchois. Jam verò inter latera anguli GQB, ducere oporteat rectam GK, quæ tranſeat per punctum datum C, & æqualis ſit rectæ datæ CK, puncto C tanquam polo & intervallo dato $AH = CK$ deſcribatur conchois quæ occurrat rectæ CG, in G patet fore KG, æqualem rectæ datæ CK. Q. E. F.

(y) * *Eligere convenit.* Si præter propter innoteſcat angulus quem veſtigium orbitæ cometicæ continet cum rectâ terram & cometam in obſervatione ſecundâ conjun-

quæ sit ad $\frac{4}{3} T \tau$ in subduplicatâ ratione SQ ad St. Et agendo rectam SEB, cujus pars EB æquetur longitudini Vt, determinabi-

jungente, sive huic æqualis angulus A Q t (Lem. 4. de con) quem chorda A C continet cum rectâ t B, id quod præstari poterit per num. 133. tunc punctum B, primò assumendum hoc modo determinabitur. Ducatur recta A C, rectis positione datis T A, T C utrinque comprehensa, rectamque t B, positione datam, in angulo æquali dato in Q intersecans quæ sit ad $\sqrt{2} \times$ T t, hoc est, proxime ad $\frac{4}{3}$ T t, in subduplicatâ ratione S t ad S Q, & agatur per S, recta S E B, talis ut pars E B à cruribus anguli A Q B intercepta, æqualis sit rectæ t V (144. 145.) punctum B, ità definitum, est illud ipsum quod commodè primâ vice usurpari poterit pro vestigio cometæ in plano Eclipticæ. Ponatur B, esse vestigium cometæ in plano Eclipticæ & arcum parabolicum per A, C, B transeuntem esse vestigium arcûs trajectoriæ inter observationem primam & tertiam descripti. Jam verò in hypothesi quod gravitas acceleratrix versùs solem eâdem sit in distantiâ telluris à sole, atquè in distantiâ cometæ ab eodem, quæ est hypothesis Galilæi de gravitate à verâ non multum distans, æquales erunt B E, t V, ut pote spatia cadendo versùs solem eodem tempore percursa à cometâ & à tellure, ac proinde erit A C chorda parabolæ ad $\sqrt{2} \times$ T t chordam circuli cujus centrum cum umbilico parabolæ coincidit in subduplicatâ ratione rectæ S t, ad rectam S E, (Cor. 7. prop. 16. lib. 1). Sed sumpta est A C ad $\sqrt{2} \times$ T t in subduplicatâ ratione S t ad S Q, & A C secat rectam t B in angulo A Q t, sicut oportebat, atquè B E æqualis est ipsi t V; Quare recta A C obtinet quamproximè omnes conditiones requisitas ut sit chorda arcûs qui est vestigium trajectoriæ cometicæ inter longitudinem primam T A, & tertiam interceptæ ac proindè punctum B, habet omnes conditiones ut sit proximè vestigium cometæ in observatione secundâ. Rectè igitur determinatum est punctum B, quod primâ vice usurpare licet.

145.



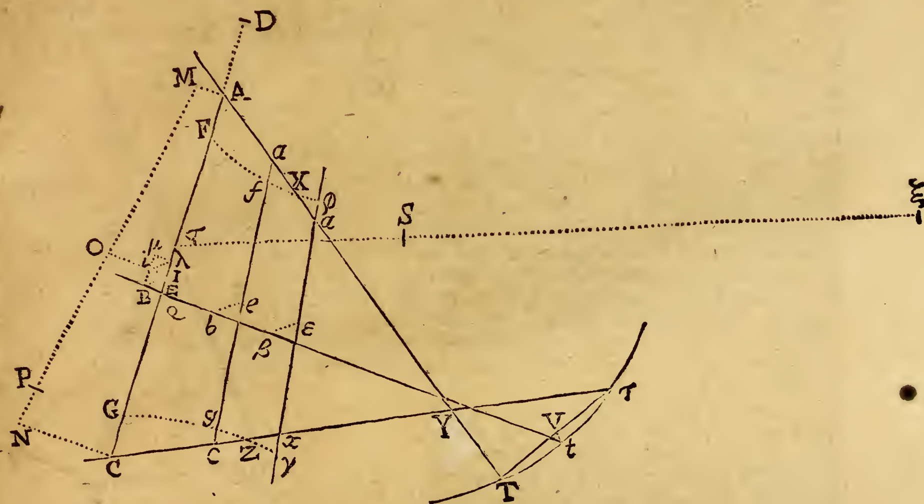
nabitur punctum *B* quod prim vice uſurpare licet. (z) Tum rectâ *A C* deletâ & ſecundùm præcedentem conſtructionem iterum ductâ, & inventâ inſuper longitudine *MP*; in *t B* capiatur punctum *b*, e lege, ut ſi *TA*, *τ C* ſe mutuò ſecuerint in *Y*, ſit diſtantia *Y b* ad diſtantiam *Y B*, in ratione compoſitâ ex ratione *M P* ad *M N* & ratione ſubduplicatâ *S B* ad *S b*. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium *β* ſi mo-

do

145. (z) * *Tum rectâ A C, deletâ.* Determinato puncto B, quod primâ vice licet uſurpare, cætera quæ deinceps aſſumuntur puncta nempè b, β, aliam conſtructionem poſtulant. Nec ſatis eſt quod punctum b, ſumatur propius puncto Y, dum linea M P, minor eſt quam A C vel M N (in fig. Newt.) & contrà. Sed quia ducere oportet rectam A C, quæ ſit æqualis longitudini M P, capiatur in t B, punctum b, eâ lege ut ſit diſtantia Y b, ad diſtantiam YB, in ratione compoſitâ ex ratione M P ad A C, & ratione ſubduplicatâ SB ad Sb. Ex hactenus dictis patet cur prior ratio componens adhibeatur; cum enim invenienda ſit A C, quæ ſit longitudini M P æqualis, ſi illa hâc ſit major aut minor, minuenda erit vel augenda donec æquales fiant, æquarentur autem per ſolam priorem rationem ſi M P foret conſtans. Quia verò variante A C, perpetuò quoque variabilis eſt recta M P, ideò adhibenda eſt altera ratio. Jam in parabolis per puncta A, B, C, & a, b, c, deſcriptis, chordæ arcuum A B C, a b c, in quibus æquales ſunt rectæ B E, b e, ad umbilicum S tendentes inter verticem & chordam interceptæ, ſunt in ratione ſubduplicatâ rectarum S B, S b (ut colligitur ex theor. 1. & 2. de parab.). Prætereà (ex dem.) æquales ſunt rectæ B E, b e quamproximè; ſunt enim ſpatia à cometâ verſus ſolem cadendo in diverſis ab illo diſtantiis eodem tempore percurſa, & veſtigium cometæ in obſervatione ſecundâ proximum eſt vertici arcûs A B C, ſeu veſtigii portionis trajectoriæ à cometâ inter obſervationem primam & tertiam deſcriptæ. Quarè habetur punctum b, co-

meta

dò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia *B l* perexigua obvenerit; postquam inventa sunt puncta *F*, *f* & *G*, *g*,



actæ rectæ *Ff* & *Gg* secabunt *TA* & *τ C* in (*) punctis quæsitis *X* & *Z*.

Exem-

metæ vestigium in plano Eclipticæ, non tamen accuratum, sed verò proximum duntaxat.

(*) * *In punctis quæsitis X & Z.* (Ut patet ex notâ u, in hanc prop.).

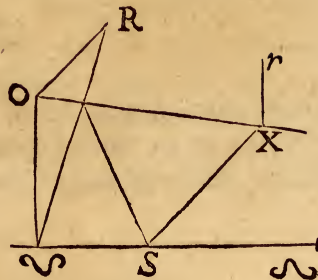
146. Si elliptica cometæ orbita magis accuratè observationibus satisfacere deprehendatur, ea sic poterit describi. Reperiatur vestigium cometæ in plano Eclipticæ in observatione secundâ, eundem ordinem situmque obtinet vestigium illud inter puncta B, b, β, quem punctum Z, inter C, c, κ, vel X, inter A, a, α. Ex vestigio sic invento, ad planum Eclipticæ erigatur normalis quæ est tangens latitudinis in observatione secundâ ad radium æqualem distantiæ inter locum t; dictumque vestigium Hujus perpendiculi extremum punctum signabit locum cometæ in orbitâ propriâ secundò observatum. Denique umbilico S, per puncta X, Z, & punctum modò inventum describatur ellipsis (prop. 20. lib. 1.), hæc erit quæsita cometæ trajectoria. 146.

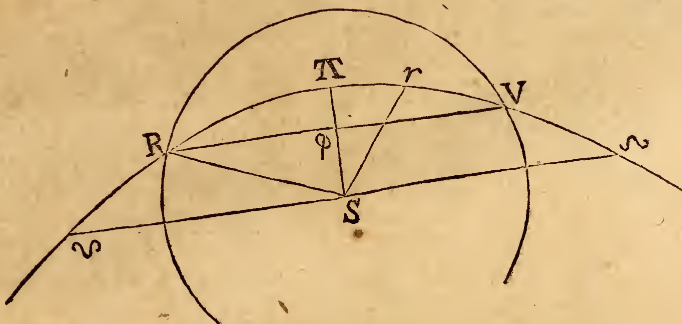
De Mundi Systemate.

147. 147. Ex præcedentis problematis solutione colligi possunt positio lineæ nodorum trajectoriæ & tempus quo cometa nodos tenet. Iisdem manentibus, & per easdem litteras designatis ut suprà, producantur rectæ Z X, R r, donec concurrant in ☊, junganturque S Z, S X, S ☊. Jam verò (ex præced.) data sunt omnia puncta S, Z, X, ideóque trianguli S Z X, tam latera quam anguli ac proinde innotescit etiam angulus S X ☊. Ex loco r, ducatur r O, ad Z X parallela rectæ R Z, occurrens in O, erunt triangula R O r & & r X ☊, æquiangula, ideóque cum ex notis lateribus O r = Z X, & O R, differentiâ notarum rectarum R Z & r X unà cum angulo recto R O r, innotescant reliqua latera & anguli, dabuntur quoque anguli trianguli r X ☊. Sed datur in hoc triangulo latus unum X r, dabuntur ergò & reliqua nempè X ☊ & r ☊. Deindè in triangulo ☊ X S, nota sunt latera X S, X ☊, cùm angulo intercepto S X ☊, innotescet itaque angulus X S ☊ Sed datur (per observ.) positio rectæ S X, sivè angulus quem facit cum T X. Nam in triangulo X T S, dantur latera T S, T X & angulus X T S, distantia inter locum solis cognitum locumque cometæ primò observatum. Unde innotescit T X S, ac proinde & positio rectæ ☊ S ☋, hoc est, dabuntur loca nodorum è sole visa. Quod si æquales fuerint rectæ Z R, X r, nodorum linea parallela est rectæ Z X, ideóque positione cognita.

Ad determinandum tempus quo cometa in nodo versatur, sit R r, trajectoria cometæ (per prop. præced.) descripta, sitque superius inventa nodorum linea ☊ S ☋, trajectoriæ in ☊ & ☊ occurrens, erit (prop. 1. lib. 1.) intervallum temporis inter observationem primam & momentum quo cometa ad nodum ☊ appellit, ad intervallum temporis inter observationem primam & tertiam ut area r ☊ S, ad aream R S r; sed arearum r ☊ S, R S r, nota est ratio (per theor. 4. de parab. vel num. 142.) notum igitur est tempus quo cometa nodum ☊, tenet. Pari modo innotescit tempus quo cometa ad nodum alterum ☋ appellit.

148. Iisdem manentibus, determinabitur inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ. Ex puncto O ad ☊ S ☋, nodorum lineam erigatur perpendicularis O ☊, jungaturque R ☊. In triangulo O S ☊, præter rectum ad ☊, dantur (147.) angulus O S ☊ & latus O S, quare datur O ☊. Deinde in triangulo R O ☊, dantur latera circà rectum O R & O ☊, ideóque notus erit angulus O ☊ R, qui est inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ. 148.





149. Facilè obtineri potest tempus quo cometa perihelium tenet. Umbilico S, per puncta R, r, describatur trajectoria cometæ. Centro S, per alterutrum punctorum putà R, describatur circulus trajectoriæ denuò occurrens in V, jungaturque R V, ad quam ex puncto S demittatur perpendicularis S φ, quæ producatur donec parabolæ occurrat in π, erit π trajectoriæ perihelium; & proindè recta ipsius S π quadrupla, erit ejusdem latus rectum principale. Cum enim umbilicus S, in parabolæ axe reperiatur, circulus centro S descriptus, parabolam intersecabit in duobus punctis ab axe æqualiter distantibus ac proindè axi normalis erit R V intersectiones conjungens; Quarè S φ est axis & π vertex parabolæ, sive trajectoriæ perihelium & quadrupla S π parameter diametri cujus π est vertex (theor. 2. de parab.) hoc est, latus rectum principale. Jam capiatur tempus cujus intervallum ab observatione primâ, dum cometa versabatur in r, est ad intervallum temporis inter observationem primam & tertiam ut area r S π ad aream R r S, habebitur illud ipsum tempus quo cometa perihelium occupat.

150. Hinc etiam cometæ perigæum ejusque tempus determinabitur. Cum enim detur tempus inter observationem primam & tertiam interceptum, quo scilicet data area r R S, à cometa radio ad solem ducto describitur, data quoque erit area uno die similiter descripta. Præterea datur r, locus cometæ in observatione primâ, quarè dabuntur loca cometæ in proprio orbe ad dies singulos. Sed dantur loca telluris in orbitâ suâ, notusque est situs mutuus inter telluris orbitam & cometæ trajectoriam. Undè innotescet tempus quo cometa est terræ proximus, hoc est, tempus quo cometa in perigæo versatur.

Exem-

DE MUNDE SYSTEMATE.

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamſtedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, tabula ſequens exhibet.

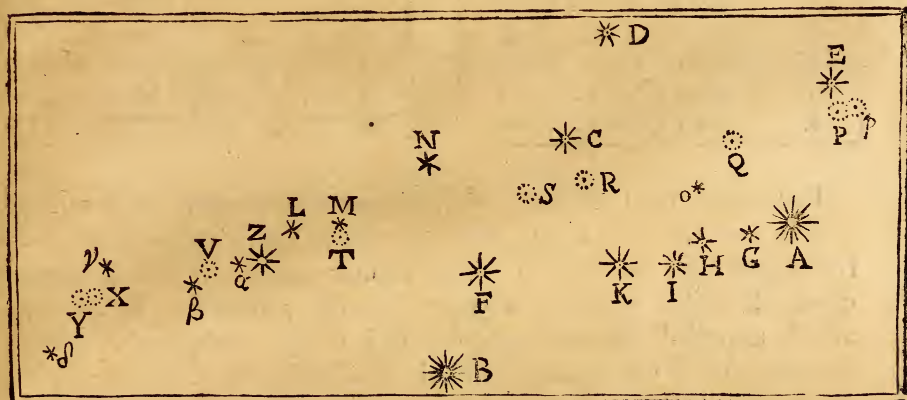
	Tem. appar.	Tem. verum	Long. Solis.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4 . 46	4 . 46 . 0	♑ 1.51.23	♑ 6.32.30	8.28. 0
21	6 . 32½	6 . 36 . 59	11. 6.44	♒ 5. 8.12	21.42.13
24	6 . 12	6 . 17 . 52	14. 9.26	18.49.23	25.23. 5
26	5 . 14	5 . 20 . 44	16. 9.22	28.24.13	27. 0.52
29	7 . 55	8 . 3 . 2	19.19.43	♓ 13.10.41	28. 9.58
30	8 . 2	8 . 10 . 26	20.21. 9	17.38.20	28.11.53
1681. *Jan.* 5	5 . 51	6 . 1 . 38	26.22.18	♈ 8.48.53	26.15. 7
9	6 . 49	7 . 0 . 53	♒ 0.29. 2	18.44. 4	24.11.56
10	5 . 54	6 . 6 . 10	1.27.43	20.40.50	23.43.52
13	6 . 56	7 . 8 . 55	4.33.20	25.59.48	22.17.28
25	7 . 44	7 . 58 . 42	16.45.36	♉ 9.35. 0	17.56.30
30	8 . 7	8 . 21 . 53	21.49.58	13.19.51	16.42.18
Feb. 2	6 . 20	6 . 34 . 51	24.46.59	15.13.53	16. 4. 1
5	6 . 50	7 . 4 . 41	27.49.51	16.59. 6	15.27. 3

His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
1681. *Feb.* 25	8h. . 30′	♉ 26° . 18′ . 35″	12° . 46′ . 46″
27	8 . 15	27 . 4 . 30	12 . 36 . 12
Mar. 1	11 . 0	27 . 52 . 42	12 . 23 . 40
2	8 . 0	28 . 12 . 48	12 . 19 . 38
5	11 . 30	29 . 18 . 0	12 . 3 . 16
7	9 . 30	♊ 0 . 4 . 0	11 . 57 . 0
9	8 . 30	0 . 43 . 4	11 . 45 . 52

Hæ obſervationes teleſcopio ſeptupedali, & micrometro filiſque in foco teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis

tis & poſitiones fixarum inter ſe & poſitiones cometæ ad fixas determinavimus. Deſignet *A* ſtellam quartæ magnitudinis in ſiniſtro calcaneo Perſei (*Bayero* ο) *B* ſtellam ſequentem tertiæ magnitudinis in ſiniſtro pede (*Bayero* ζ) & *C* ſtellam ſextæ magnitudinis (*Bayero* n) in talo ejuſdem pedis, ac *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Z*, α, β, γ, δ ſtellas alias minores in eodem pede.



Sintque *p*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, loca cometæ in obſervationibus ſupra deſcriptis: & exiſtente diſtantiâ *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$ *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$, *DI* $53\frac{5}{11}$ *AK* $38\frac{2}{3}$ *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta tranſibat inter ſtellas *D* & *E*, ſic ut diſtantia ſtellæ *D* ab hâc rectâ eſſet $\frac{1}{6}$ *CD*. *LM* erat ad *LN* ut 2 ad 9, & producta tranſibat per ſtellam *H*. His determinabantur poſitiones fixarum inter ſe.

 Tan-

De Mundi Systemate.

Tandem *Poundius* noster iterum observavit positiones harum fixarum inter se, & earum longitudines & latitudines in tabulam sequentem retulit.

Fixarum	Longitudines. ° ′ ″	Lat boreæ. ° ′ ″
A	♉ 26.41.50	12. 8.36
B	28.40.23	11.17.54
C	27.58.30	12.40.25
E	26.27.17	12.52. 7
F	28.28.37	11.52.22
G	26.56. 8	12. 4.58
H	27.11.45	12. 2. 1
I	27.25. 2	11.53.11
K	27.42. 7	11.53.26

Fixarum	Longitudines. ° ′ ″	Lat. boreæ. ° ′ ″
L	♉ 29 · 33 · 34	12. 7.48
M	29 · 18 · 54	12. 7.20
N	28 · 48 · 29	12.31. 9
Z	29 · 44 · 48	11. 57.13
α	29 · 52 · 3	11 .55.48
β	♊ 0 · 8 · 23	11.48.56
γ	0 · 40 · 10	11.55.18
δ	1 · 3 · 20	11.30.42

Positiones vero cometæ ad has fixas observabam ut sequitur.

Die veneris *Feb.* 25. st. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in *p* existentis distantia à stellâ *E* erat minor quam $\frac{3}{13}$ *A E*, major quam $\frac{1}{5}$ *A E*, ideoque æqualis $\frac{3}{14}$ *A E* proxime: & angulus *A p E* nonnihil obtusus erat, sed ferè rectus. Nempe si demitteretur ad *p E* perpendiculum ab *A*, distantia cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ *p E*.

Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, cometæ in *P* existentis distantia à stellâ *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *A E*, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *A E*, ideoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ *A E*, seu $\frac{8}{39}$ *A E* quamproximè. A perpendiculo autem à stellâ *A* ad rectam *P E* demisso distantia cometæ erat $\frac{4}{5}$ *P E*.

Die solis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in *Q* existentis distantia à stellâ *O* æquabat distantiam stellarum *O* & *H*, & recta *Q O* producta transibat inter stellas *K* & *B*. Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. cometa in *R* existens, stellis

stellis K & C accuratè interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quam $\frac{1}{3} CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3} CK + \frac{1}{8} CR$, ideoque æqualis $\frac{1}{3} CK + \frac{1}{15} CR$ seu $\frac{16}{45} CK$. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. cometæ existentis in S distantia à stellâ C erat $\frac{4}{9}$ FC quamproximè. Distantia stellæ F à rectâ CS producta erat $\frac{1}{24} FC$; & distantia stellæ B ab eâdem rectâ, erat quintuplo major quam distantia stellæ F. Item recta NS producta transibat inter stellas H & I, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quam stellæ I.



Die saturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. p. m. cometâ existente in T, recta MT æqualis erat $\frac{1}{2} ML$, & recta LT producta transibat inter B & F, quadruplo vel quintuplo propior F quam B, auferens à BF quintam vel sextam ejus partem versus F. Et MT producta transibat extra spatium BF ad partes stellæ B, quadruplo propior existens stellæ B quam stellæ F. Erat M stella perexigua quæ per telescopium videri vix potuit, & L stella major quasi magnitudinis octavæ.

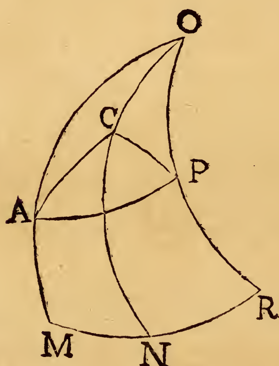
Die lunæ *Mart.* 7 hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. cometæ existente in V, recta $V\alpha$ producta transibat inter B & F, auferens à BF versus F $\frac{1}{10} BF$, & erat ad rectam $V\beta$ ut 5 ad 4. Et distantia cometæ à rectâ $\alpha\beta$ erat $\frac{1}{2} V\beta$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Die mercurii *Mart.* 9. hora $8\frac{1}{2}$ p. m. cometa exiſtente in *X*, recta γX æqualis erat $\frac{1}{4}\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum à ſtellâ δ ad rectam γX erat $\frac{2}{5}\gamma\delta$.

Eâdem nocte horâ 12, cometa exiſtente in *Y*, recta γY æqualis erat $\frac{1}{3}\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum à ſtellâ δ ad rectam γY æqualis erat $\frac{1}{6}\gamma\delta$ vel $\frac{1}{7}\gamma\delta$ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam diſtinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujuſmodi obſervationibus per conſtructiones figurarum & computationes derivabam (a) longitudines & latitudines cometæ, & *Poundius* noſter ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, & loca correcta habentur ſupra. Micrometro parùm affa-



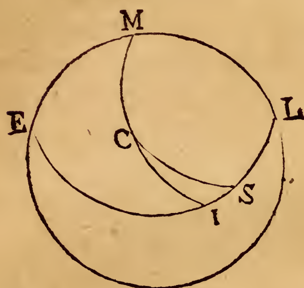
149. (a) 149. * *Longitudines & latitudines.* Si obſerventur diſtantiæ cometæ à duabus fixis quarum longitudines & latitudines notæ ſunt, invenientur cometæ longitudo & latitudo ad tempus obſervationis. Referat MR, portionem Eccliptica cujus polus O, ſint A, P duæ ſtellæ quarum longitudines & latitudines datæ ſunt, ſitque C cometa cujus diſtantia à duabus ſtellis A, P nota ſit. In triangulo AOP, ex datis AO, PO complementis latitudinum ſtellarum & angulo AOP cujus menſura eſt arcus MR differentia longitudinum, dabitur AF diſtantia ſtellarum, atque innoteſcet angulus OPA. Jam verò in triangulo ACP dantur omnia latera, unde invenietur angulus CPA, quo ſubtracto ex angulo OPA relinquetur angulus OPC. Quare dabitur angulus POC cujus menſura eſt arcus NR differentia ſcilicet longitudinum ſtellæ P & cometæ C. Item innoteſcet arcus OC, qui eſt complementum latitudinis cometæ. Eâdem prorſus ratione, ſi obſerventur diſtantiæ cometæ à duabus fixis quarum aſcenſiones rectæ & declinationes notæ ſunt, indè colligentur aſcenſio recta & declinatio cometæ.

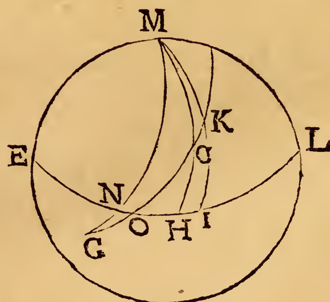
150. Datis declinatione & aſcenſione rectâ alicujus ſtellæ fixæ, inveniri poſſunt declinatio & aſcenſio recta cometæ, modò tamen ſtella & cometa tranſire viciſſim poſſint per campum teleſcopii immoti aut alio quocumque modo obtineatur differentia declinationis & aſcenſionis rectæ inter fixam & cometam (39 lib. 3.) & hinc dabuntur cometæ longitudo & latitudo (17. lib. 3.)

151. Datis cometæ longitudine & latitudine, ſimulque notâ longitudine ſolis, datur diſtantia cometæ à ſole. Sit enim EL portio Eccliptica, Sol in S, latitudo

affabrè constructo usus sum, sed longitudinum tamen & latitudinum errores (quâtenus ex observationibus nostris oriantur) minutum unum primum vix superant. Cometa autem (juxta observationes nostras) in fine motus sui notabiliter deflectere cœpit boream versus, à parallelo quem in fine mensis *Februarii* tenuerat.

Jam





do cometæ C I; in triangulo C I S, ad I rectangulo (7. lib. 3.) datur latus C I, itemque notum est latus I S differentia longitudinum solis & cometæ, ideóque innotescit distantia cometæ à sole C S.

152. Si duobus diebus sese invicem immediatè subsequentibus observentur longitudines H, I & latitudines C H, K I cometæ alicujus, dabitur arcus K C quem cometa motu diurno proprio descripsit. Quoniam enim in triangulo K M C, datur angulus quem metitur arcus I H longitudinum differentia, simulque nota sunt latera K M, C M, quæ sunt datarum latitudinum K I, C H complementa, innotescet arcus K C. Si verò altera latitudo fuerit australis, putà C H, altera Borealis ut G N, latus G M est summa latitudinis G N & quadrantis NM, ac proindè etiam in hoc casu dabitur arcus C G.

153. Iisdem manentibus, inveniri potest nodus O orbitæ cometæ, datis enim in triangulo M C K lateribus M C, MK, cum angulo intercepto M quem metitur longitudinum datarum differentia H I, dabitur angulus M K C, qui ex 180°. subductus, relinquit angulum O K I. Jam verò datis triangulo OKI, ad I rectangulo, latitudine IK, & angulo OKI, invenitur angulus IOK, daturque arcus OI, quo addito longitudini I, obtinetur distantia nodi O à principio arietis. Ex præcedentibus patet datis duabus ascensionibus rectis & declinationibus inveniri quoque motum cometæ proprium, inclinationem orbitæ ad æquatorem & punctum in quo orbita illa æquatorem intersecat. 152;

154. Iisdem positis sit K locus cometæ primò observatus, à loco nodi O subtrahatur longitudo cometæ I, relinquetur arcus OI. Datis in triangulo KOI, ad I rectangulo, lateribus K I, O I, dabitur arcus K O quem cometa à primo observationis die usque ad Eclipticam descripsit. Jam verò arcus K O conferatur cum arcubus descriptis ab initio observationis cometæ in K, ad datum usque aliquod momentum singulis diebus pro arbitrio assumptum. Hinc proportionali parte adhibitâ, circiter colligetur tempus quo cometa secuit Eclipticam. Simili modo invenietur tempus quo trajecit æquatorem.

De Mundi Systemate.

Jam ad orbem cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis, tres quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21. *Jan.* 5. & *Jan.* 25. (b) Ex his inveni St partium 9842,1 & Vt partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo tB partium 5657, inveni SB 9747, BE primâ vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda$ 413: BE ſecundâ vice 421, OD 10186, X 8528,4 MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam tb 5640. Et per hanc operationem tandem diſtantias TX 4775 & τZ 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus deſcendentem in ♋ & aſcendentem in ♑ 1 gr. 53′; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ 61 gr. 20′ $\frac{1}{3}$; verticem ejus (ſeu perihelium cometæ) diſtare à nodo 8 gr. 38′, & eſſe in ♐ 27 gr. 43′ cum latitudine auſtrali 7 gr. 34′; & ejus latus rectum eſſe 236,8, areamque radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585, quadrato ſemidiametri orbis magni poſito 100000000; cometam verò in hoc orbe ſecundum ſeriem ſignorum proceſſiſſe, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. p. m. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum ex tabulâ ſinuum naturalium collectas determinavi graphicè; conſtruendo ſchema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis 16$\frac{1}{3}$ pedis *Anglicani*.

Tan-

155. Si cometa primò obſervetur in eâdem rectâ cum duabus fixis, deinde in aliâ quoque rectâ cum duabus aliis fixis obſervetur, accuratè trajectis per quatuor illas ſtellas duobus filis in ſuperficie globi cœleſtis, interſectio filorum determinabit locum cometæ pro tempore obſervationis. Si eodem modo definiantur alia cometæ loca, illius ſemita in ſuperficie globi cœleſtis delineabitur.

156 156. Accuratè deſignatis in ſuperficie globi cometæ locis, filum duobus locis applicatum per cætera omnia propèmodum tranſire videbitur; Hæc igitur loca fere ſunt in peripheriâ circuli maximi, ideóque cometa ex terrâ in circuli maximi peripheriâ incedere apparebit. Quare ſi filum per duo loca tranſiens extendatur donec Eclipticam & æquatorem ſecet, habebuntur locus nodi, & inclinatio orbitæ cometicæ, ſimulque punctum in quo cometa trajicit æquatorem.

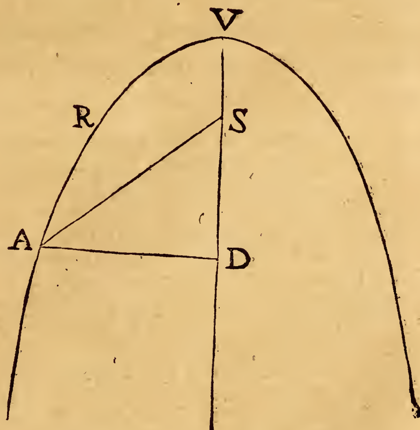
(b) * *Ex his inveni.* Quâ ratione ſequentes determinationes poſſint inveniri vel graphicè vel arithmeticè, patet ex conſtructione prop. præced. & ex iis quæ huic propoſitioni addidimus.

Tandem ut constaret an cometa in orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in tabulâ sequente videre licet. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

	Distant. Cometæ à Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect	Long. Obs.	Lat. Obs	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr.	gr.	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♑ 6 . 32′	8 . 18′½	♑ 6.31⅓	8.26	+ 1	− 7½
29	8403	♓ 13 . 13⅔	28 . 0	♓ 13.11¾	28.10$\frac{1}{12}$	+ 2	− 10$\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17 . 0	15 . 29⅔	♉ 16.59⅞	15.27⅖	+ 0	+ 2¼
Mar. 5	21737	29 . 19¾	12 . 4	29.20$\frac{6}{7}$	12. 3½	− 1	+ ½

Postea vero *Halleius* noster orbitam (c) per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ♋ & ♑ 1gr. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad eclipticam 61gr. 20′

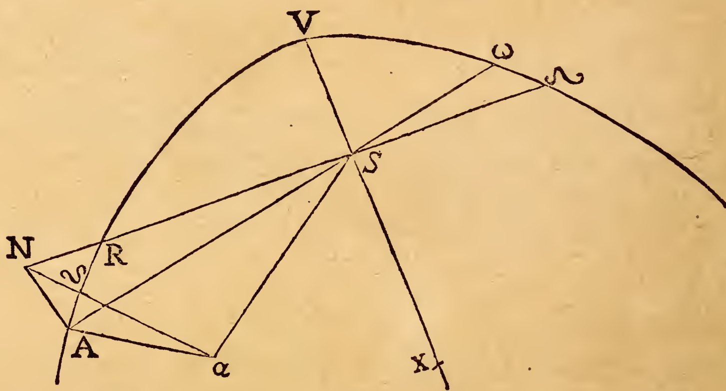
(c) 157. * *Per calculum arithmeticum.* Calculi hujus instituendi methodum exponemus. Sit S Sol, V R A orbita cometæ parabolica, cujus vertex V, sitque VS, distantia umbilici à vertice $=f$, erit parabolæ latus rectum principale $=4f$. Fiat $AD=x$, erit spatium $VRAS=\frac{x^3+12f^2x}{24f}$ (140). Ponatur area illa dato rectilineo æqualis putà bb, habebitur æquatio $24fbb=x^3+12f^2x$. Resolutâ hâc æquatione cubicâ per vulgares algebræ regulas, vel per constructionem geometricam, adhibitis parabolâ & circulo, innotescet ordinatim applicata A D. Datâ autem AD, dabitur VD, (per theor. 2. de parab.) quare nota quoque erit recta composita ex DV & VS, cui æqualis est recta S A, (ibid.), ideóque recta illa dabitur magnitudine. Præterea datur etiam D A, quare nota est ratio inter S A & A D, id est, inter radium & sinum rectum anguli A S D, quem scilicet S A cum axe comprehendit, ideóque datur angulus ille. Sed data est S A longitudine, quare rectæ S A longitudo & inclinatio ad axem calculo determinari possunt.



157.

$20'\frac{1}{3}$, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* $8^d. 0^h. 4'$: distantiam vero perihelii à nodo aſcendente in orbitâ cometæ menſuratam invenit eſſe $9^{gr}. 20'$, & latus rectum parabolæ eſſe 2430 partium, exiſtente mediocri ſolis à terrâ diſtantiâ partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accuratè inſtituto, loca cometæ ad obſervationum tempora computavit, ut ſequitur.

Tem-



158. 158. Referat ☊ ω V, Cometæ trajectoriam in cujus umbilico S collocatur Sol, ſitque ω punctum quod cometa occupavit in aliquâ harum obſervationum quarum ope trajectoria definita fuit. Trajectoriæ hujus ſit axis V X poſitione datus; innoteſcat tempus quo cometa in perihelio V verſatur, ſitque ☊ ☋ linea nodorum poſitione cognitâ. Si cometæ trajectoria inventa fuerit parabolica, capiatur ſpatium quod ſit ad ſpatium ω V S, cognitum (per theor. 4. de parab.) ut intervallum inter tempus datum & ſuprà inventum momentum quo cometa perihelium attingit, ad intervallum inter prædictum momentum & obſervationem cometæ in ω; ponatur ſpatium illud dato rectilineo, putà bb, æquale. Deinde (157.) ipſi bb æquale fiat ſpatium parabolicum VRAS, & inveniatur tam poſitio quam magnitudo rectæ SA reſpectu SV, cujus poſitio & magnitudo reſpectu diſtantiæ aphelii terræ à ſole priùs notæ ſunt. At ſi cometæ trajectoria deprehendatur elliptica, per methodos in prop. 31. lib. 1. expoſitas, ducatur recta SA, talis ut area VRAS, ſit ad totam ellipſeos aream, ſicut intervallum inter tempus datum & momentum quo perihelium occupat integrum cometæ tempus periodicum quod ex dato orbitæ cometicæ axe principali cognitum eſt, dabiturque recta S A tam poſitione quam magnitudine. Jam verò in utroque caſu ex A ad nodorum lineam ☋☊ erigatur normalis A N, rectæ ☋☊ occurrens in N; ex eodem A, ad Eccliptieæ planum demittatur perpendiculum

Tempus verum.		Distantia Cometæ à ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in. Long	Lat.
	d. h. ′		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec.	12. 4.46	28028	♑ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	− 3. 5	− 2. 0
	21. 6.37	61076	♒ 5. 6.30	21.43.20	− 1.42	+ 1. 7
	24. 6.18	70008	18.48.20	25.22.40	− 1. 3	− 0.25
	26. 5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	− 1.28	+ 0.44
	29. 8. 3	14021	♓ 13.12.40	28.10.10	+ 1.59	+ 0.12
	30. 8.10	86661	17.40. 5	28.11.20	+ 1.45	− 0.33
Jan.	5. 6. 1½	101440	♈ 8.49.49	26.15.15	+ 0.56	+ 0. 8
	9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+ 0.32	+ 0.58
	10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+ 0.10	+ 0.18
	13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+ 0.33	+ 0. 2
	25. 7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	− 1.20	+ 1.25
	30. 8.22	155303	13.17.41	16.42. 7	− 2.10	− 0.11
Feb.	2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	− 2.42	+ 0.14
	5. 7. 4½	166686	16.58.25	15.29.13	− 0.41	+ 2.10
	25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	− 2.49	+ 1.14
Mar.	5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+ 0.35	+ 2.24

Apparuit etiam hic cometa menſe *Novembri* præcedente & *Coburgi* in *Saxoniâ* à D^no^. *Gottfried Kirch* obſervatus eſt diebus menſis hujus quarto, ſexto & undecimo, ſtylo veteri; & ex poſitionibus ejus ad proximas ſtellas fixas ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accuratè obſervatis, ac differentia longitudinum *Coburgi* & *Londini* graduum undecim & locis fixarum à *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca cometæ determinavit ut ſequitur.

No-

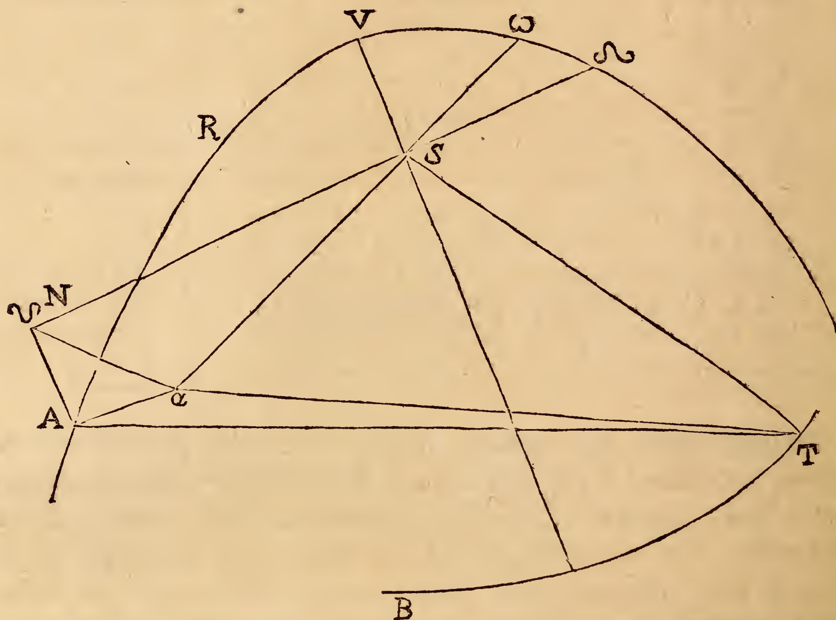
lum eidem rectæ occurrens in a, junganturque a N, a S, erit angulus A N a, inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ ac proinde cognitus (146). Deinde quoniam noti ſunt anguli V S A, V S N, notus quoque erit angulus NSA, horum ſumma vel differentia. Quarè in triangulo rectangulo N a A, datis latere N A, & angulo A N a, innoteſcent reliqua latera N a & A a. Præterea in triangulo rectangulo S N a, dantur latera S N & N a, ideóque dabuntur latus S a, & angulus N S a. Sed (145.) datur poſitio rectæ S N, quarè nota erit poſitio rectæ S a, hoc eſt, cometæ longitudo heliocentrica, ſive locus cometæ heliocentricus ad Eclipticam reductus. Denique in triangulo S A a rectangulo ad a, nota ſunt omnia latera, ac proinde dabitur angulus A S a, latitudo cometæ heliocentrica. Ex his quoque patet viciſſim inveniri poſſe tempus quo cometa datum in orbe ſuo locum tenet. 158.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Novem. 3d. 17h. 2′, tempore apparente *Londini*, cometa erat in ♌ 29gr. 51′. cum lat. bor. 1gr. 17′. 45″,

Novem. 5d. 15h. 58′ cometa erat in ♍ 3gr. 23′ cum lat. bor. 1gr. 6′.

No.



159. 159. Iisdem manentibus sit BT orbis magnus, sitque tellus in T ad tempus datum. Jungantur TA, Ta, erit planum trianguli TAa, ad planum Eclipticæ normale (prop. 18. lib. 11. elem.). Jam in triangulo TSa, in plano Eclipticæ datur latus Sa, (158.), notumque est latus ST, ex theoriâ telluris, & utrumque latus in partibus mediocris distantiæ telluris à sole expressum habetur. Præterea ob latera illa positione cognita, datur angulus TSa, ab illis comprehensus, quare innotescent latus Ta, & angulus STa; Sed datur TS positione, nempe locus solis ad tempus datum, nota igitur est positio rectæ Ta, hoc est, cometæ longitudo geocentrica, sive locus cometæ geocentricus ad Eclipticam reductus. Deindè in triangulo rectangulo AaT, dantur latera duo in partibus mediocris distantiæ telluris à sole expressa (158 & ex theoriâ telluris). Quare innotescet angulus ATa, hoc est, cometæ latitudo geocentrica, itemque dabitur hypothenusa TA, distantia scilicet cometæ à terrâ. Ex his itaque patet quomodo ad data observationum tempora, instituto calculo, loca cometæ possint computari. Clariss. Halleius iisdem usus principiis ad definiendos cometarum motus maximo labore tabulas construxit. Harum tabularum normam videat Lector in ejusdem Celeberrimi Viri opusculo quod inscribitur: come-

Novem. $10^d. 16^h. 31'$ cometa æqualiter distabat à stellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum verò attigit rectam easdem jungentem, sed parum abfuit ab eâ. In stellarum catalogo *Flamstediano* σ tunc habuit ♍ 14gr. 15′ cum lat. bor. 1gr. 41′ ferè, τ verò ♍ 17gr. $3\frac{1}{2}$, cum lat austr. 0gr. 34′. Et medium punctum inter has stellas fuit ♍ 15gr. $39'\frac{1}{4}$, cum lat. bor. 0gr. $33\frac{1}{2}$. Sit distantia cometæ à rectâ illâ 10′ vel 12′ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7′, & differentia latitudinum $7'\frac{1}{2}$, circiter. Et inde cometa erat in ♍ 15gr. 32′ cum lat. bor. 26′ circiter. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Observatio prima ex situ cometæ ad parvas quasdam fixas abundè satis accurata fuit. Secunda etiam satis accurata fuit. In tertia, quæ minùs accurata fuit, error minutorum sex vel septem subesse potuit, & vix major. Longitudo verò cometæ in observatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29gr. 30′. 22″. latitudo borealis 1gr. 25′. 7″. & distantia ejus à sole 115546.

Porro *Halleius* observando quod cometa insignis intervallo annorum 575 quater apparuisset, scilicet mense *Septembri* post cædem *Julii Cæsaris*, anno *Christi* 531 *Lampadio* & *Oreste Coss.* anno *Christi* 1106 mense *Februario*, & sub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ & insigni (præterquam quod sub mortem

cometographia, seu Astronomiæ cometicæ Synopsis.

160. Si cometæ orbitas ellipticas describere & duas Kepleri leges observare ponantur, hoc est, si temporum periodicorum quadrata sint ut cubi mediocrium distantiarum à sole & areæ ellipticæ radiis ad solem ductis sint temporibus proportionales, facilè determinabitur orbitæ cometicæ magnitudo, omnesque motûs cometarum circumstantiæ definientur, quod elegantissimè præstitit D. Bouguer in monum. Paris. an. 1733. Clarissimi Viri methodum hic adjungemus.

Ex datis tribus observationibus à se invicem parum distantibus, inveniatur cometæ velocitas in aliquo orbitæ suæ loco, & exigua ejusdem orbitæ portio determinetur. Quoniam tria observationum tempora parum à se invicem distant, portio orbitæ hoc temporis intervallo descripta considerari poterit tanquam linea recta vel ipsamet tangens orbitæ motu uniformi percursa, ideóque portio hæc rectilinea orbitæ & ipsa cometæ velocitas inveniri poterunt per Lem 4. & per ea quæ huic lemmati addidimus. Idem quoque obtinebitur duplici elegantissimâ methodo quæ in monum. Paris. loco citato legitur. 160.

tem His

tem *Cæsaris*, cauda ob incommodam telluris positionem minùs ap.

160. His præmissis, sit S sol, C c exigua orbitæ cometicæ portio ex tribus observationibus determinata. Quoniam nota est S C, distantia scilicet cometæ à sole atque etiam innotescit angulus S C D, dabitur perpendicularis S D, hujus anguli S C D sinus, sumpto S C, pro radio. Dicatur S C = a, S D = b, designet e, spatiolum C c, tempusculo f percursum, sitque x = A B, seu axi principali ellipseos quam cometa circa solem in umbilico S, positum integro tempore periodico t, describit. Ut determinentur quantitates x & t, conferre oportet motum cometæ cum motu cognito planetæ alicujus. Sit q axis principalis ellipseos quam planeta describit, n tempus periodicum, dicaturque p peripheria circuli cujus diameter est q. Quoniam axis principalis ellipseos est summa maximæ & minimæ distantiæ planetæ à sole, erit distantia mediocris planetæ à sole æqualis dimidio axi principali, hoc est $\frac{1}{2}x$ est distantia mediocris cometæ, & $\frac{1}{2}q$ distantia mediocris planetæ. Jam verò fiat (per leg. 3. Kepleri.) $\frac{1}{8}q^3 : n^2 = \frac{1}{8}x^3 : t^2$ hinc fit $t = \frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}$. Invenienda superest altera expressio temporis periodici t. Quoniam C c, est portio orbitæ admodum exigua, sector C S c, considerari poterit instar trianguli evanescentis cujus area $\frac{1}{2}$ S D × C c = $\frac{1}{2}be$. Quarè, per alteram Kepleri

apparuiſſet:) quæſivit orbem ellipticum cujus axis major eſſet par- LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

pleri regulam, dicatur $\frac{1}{2}$ be eſt ad f, ut area tota ellipſeos ACBI, ad integrum tempus periodicum t, unde habetur $t=\frac{f}{\frac{1}{2}be}\times ACBI$. Nunc ut obtineatur area ACBI, ex puncto C, ad alterum umbilicum F, agatur recta $CF=AB-SC$ $=x-a$ (theor. 3. de ellipſi). Ex eodem umbilico F, ad tangentem Cc productam in E, demittatur perpendicularis FE, ſitque SG parallela rectæ DE, triangula rectangula SCD, FCE ſimilia ſunt, ob angulos SCD, FCE, æquales (theor. 4. de ellipſ.) ideóque SC (a) : SD (b) = FC $(x-a)$: $FE=\frac{bx-ab}{a}$, ac proindè FG, ſeu $FE-SD=\frac{bx-2ab}{a}$.

Deinde (ob eorumdem triangulorum ſimilitudinem) SC (a) : CD $(\sqrt{a^2-b^2})$ =FC $(x-a)$: $CE=\frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2}$, & hinc DE, vel SG, ſeu $CE+CD=\frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2-b^2}=\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. Sed $FG=\frac{bx-2ab}{a}$ (ex dem.), quarè eſt $SF=\frac{\sqrt{b^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2+a^2x^2-b^2x^2}}{a^2}=\sqrt{\frac{a^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2}{a^2}}$; ideóque diſtantia SH vel FH umbilici alterutrius à centro $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2}{a^2}}$. Jam (ob triangulum SIH rectangulum in H, & per theor. 3. de ellipſi) erit $IH=\sqrt{\frac{1}{4}x^2-\frac{a^2x^2+4ab^2x-4a^2b^2}{4a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{ax-a^2}$ ac proindè axis minor $IK=\frac{2b}{a}\sqrt{ax-a^2}$, & factum ex axe majori in minorem $=\frac{2bx}{a}\sqrt{ax-a^2}$. Sed eſt factum illud area rectanguli orbitæ ellipticæ circumſcripti, & præterea (249. lib. 1.) area rectanguli hujus eſt ad aream ellipſeos ut quadratum axis AB, ad aream circuli huic quadrato inſcripti; quarè $q^2:\frac{1}{4}qp=\frac{2bx}{a}\sqrt{ax-a^2}$: $ACBI=\frac{bpx}{2aq}\sqrt{ax-a^2}$. Tandem in ultimâ expreſſione temporis periodici loco areæ ACBI, ſubſtituatur illius valor modo inventus, fiet $t=\frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax-a^2}$, collatiſque duobus ipſius t valoribus, habebitur $\frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}=\frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax-a^2}$, & reductâ æquatione $x=\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q-ae^2n^2}$. Jam ſi in expreſſionibus axis minoris & temporis periodici ſubſtituatur valor ipſius x, erit axis minor $IK=2ben\sqrt{\frac{a}{f^2p^2q-ae^2n^2}}$ & tempus periodicum $=f^3p^3n\times\frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^2p^2q-ae^2n^2}{}^{\frac{3}{2}}$. Hinc patet determinari poſſe omnia quæ ad cometarum motus pertinent.

161. Si formulæ modò inventæ quantitatibus finitis & poſitivis exprimantur, orbita ACBI erit elliptica, ideóque cometa reditum habebit. Quia verò circulus eſt ſpecies quædam ellipſis, cometa circulum quoque poterit deſcribere, in eo autem caſu æquales erunt diſtantiæ SA, SC, SB, axiſque AB duplus fiet diſtantiæ SC, ac proindè $\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q-ae^2n^2}=2a$, & hinc $e=\frac{fp}{n}\sqrt{\frac{q}{2a}}$, valor ſcilicet ſpatioli Cc à cometa tempore f percurſi. Si ea ſit cometæ velocitas ut fiat $ae^2n^2=f^2p^2q$, tunc infinito æquales evadent expreſſiones axis majoris, minoris & temporis periodici; quarè orbita cometæ mutabitur in ellipſim infinite oblongatam ſeu parabolam, ideóque cometa reditum non habet. Tandem ſi ae^2n^2, ſit major quam f^2

DE MUNDI SYSTEMATE. partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantiâ telluris à ſole par-

162. $f^2 p^2 q$, negativa fit expreſſio axis majoris & orbita abit in hyperbolam ac proindè cometa nunquam futurus eſt iterum conſpicuus.

162. Ut prædictæ formulæ ad calculum reducantur, cometarum motus cum telluris motu conferatur. Sit q dupla diſtantia mediocris terræ à Sole, p peripheria circuli cujus diameter q, n annus ſydereus ſeu intervallum 365. dier. $6^{hor.}$ $9'$: fiat mediocris diſtantia telluris à ſole partium 10000000, ideòque $q = 20000000$, & $p = 62831853$, ſpatium Cc unius diei intervallo cometa ponatur deſcripſiſſe. His valoribus ſubſtitutis in formulis præcedentibus erit $x = \frac{5918265995355793 9 \times a}{59182659953557939 - ae^2}$ & $t = \frac{18592780951754022 32 \times a^{\frac{3}{2}}}{\overline{59182659953557939 - ae^2}^{\frac{3}{2}}}$. Jam nihil ampliùs faciendum ſupereſt, niſi ut in caſibus particularibus loco a, & e, ſubſtituantur valores per obſervationem determinati. Utrum verò cometa rediturus ſit vel non cognoſcetur, ſi quantitas ae^2, minor majorve reperiatur numero conſtanti 59182659953557939. Minùs prolixus fiet calculus, ſi diſtantiam mediocrem telluris à ſole ponamus partium 10000, tunc enim erit $x = \frac{591826599 \times a}{591826599 - ae^2}$, & $t = \frac{1859278095 \times a\sqrt{a}}{\overline{591826599 - ae^2} \times \sqrt{591826599 - ae^2}}$. Exemplo ſit cometa qui annis 1729. 1730. apparuit. Ex obſervationibus Clariſſ. Caſſini colligitur die $13^{â}$. Octobris an. 1729. diſtantiam SC cometæ à ſole, fuiſſe partium 42998, exiguam orbitæ portionem diei unius intervallo deſcriptam, fuiſſe partium $122 \frac{452}{10000}$, atque angulum DCS, fuiſſe 82°. $11'$. Hinc invenitur quantitas ae^2 major quam 591826599, ideóque

(161)

partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 (d) revolvi possit. Et ponendo nodum ascendentem in ♋ 2gr. 2′; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ 61gr. 6′. 48″.; perihelium cometæ in hoc plano ♐ 22gr. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7d. 23h. 9′; distantiam perihelii à nodo ascendente in plano eclipticæ 9gr. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: (e) computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex observationibus deducta quam in hoc orbe computata exhibentur in tabulâ sequente.

(161) orbita cometæ est hyperbola, ac proindè expectandus non est hujus cometæ regressus. Cæterùm hæc vera sunt in eâ duntaxat hypothesi quod cometæ duas Kepleri leges observent.

(d) 163. * *Revolvi possit.* Quadrata temporum periodicorum in cometis æquè ac in planetis ponantur ut cubi mediocrium distantiarum à sole, tempus periodicum cometæ dicatur t, tempus periodicum terræ circà solem dicatur T, distantia mediocris terræ à sole sit D, axis major ellipseos à cometa descriptæ sit $2a$, ideóque mediocris distantia cometæ à sole $= a$, erit $T^2 : t^2 = D^3 : a^3$. Fiat D = 10000 partibus T = 365 dieb. 6hor. 9′ = 525969′, t = 575 annis, invenietur $2a$, seu axis major ellipseos à Cometâ descriptæ, partium 1382957, existente mediocri distantiâ telluris à sole earumdem partium 10000. in hoc igitur orbe cometa annis 575 revolvi potest. 163.

(e) * *Computavit motum cometæ.* Ratio computi ineundi patet ex num. 158. 159. vel etiam ex methodo Clariss. D. Bouguer num. 160. & seq.

Tem-

De Mundi Systemate.

Tempus verum		Long. obſ.	Lat. Bor. obſ.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
	d. h.	gr.	gr.	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov.	3.16.47″	♌ 29.51′. 0″	1.17.45″	♌ 29 51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
	5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
	10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
	16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
	18.21.34			18.52.15	1.26.54		
	20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
	23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec.	12. 4.46	♑ 6.32.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
	21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	21.44.42	−1.58	+2.29
	24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	−1.53	+0.30
	26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
	29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
	30. 8.10	17.38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Jan.	5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
	9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
	10. 6. 6	20 40.50	23.43.32	20 40 23	23.43.25	−0.27	−0. 7
	13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
	25. 7.59	♉ 9.35. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	−0.49	−0.24
	30. 8 22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Feb.	2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
	5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
	25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mar.	1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
	5.11.39	29.18. 0	12. 3.26	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
	9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Obſervationes cometæ hujus à principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam deſcripto, quam motus planetarum congruere ſolent cum eorum theoriis, & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejuſque orbem hic rectè definitum fuiſſe.

In tabulâ præcedente omiſimus obſervationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus obſervatus fuit. *Ponthæus* utique & ſocii, *Novem.* 17. ſt. vet. horâ ſextâ matutinâ *Romæ*, id eſt, horâ 5. 10′ *Londini*, filis ad fixas applicatis, cometam obſervarunt in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0gr. 40′. Extant eorum obſervationes in tractatu, quem *Ponthæus* de hoc cometâ in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtolâ ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8gr. 30′.

30′. cum latitudine australi 0gr. 30′. Eâdem horâ *Galletius Avenioni* (id est, hora matutina 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8gr. sine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8gr. 16′. 45″ cum latitudine australi 0gr. 53′. 7″.

Nov. 18. horâ matutinâ 6. 30′ *Romæ* (id est, horâ 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine australi 1gr. 20′. *Cellius* in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine australi 1gr. 00′. *Galletius* autem horâ matutinâ 5. 30′ *Avenioni* cometam vidit in ♎ 13gr. 00′, cum latitudine australi 1gr. 00′. Et *R. P. Ango* in Academiâ *Flexiensi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 5. 9′ *Londini*) cometam vidit in medio inter stellas duas parvas, quarum una media est trium in recta linea in virginis australi manu *Bayero* ψ, & altera est extrema alæ *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12gr. 46′. cum latitudine australi 50′. Eodem die *Bostoniæ* in *Novâ-Angliâ* in latitudine 42½ graduum, horâ quintâ matutinâ, (id est *Londini* horâ matutinâ 9. 44′) cometa visus est prope ♎ 14gr. cum latitudine australi 1gr. 30′, uti à cl. *Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, cometa (observante juvene quodam) distabat à spicâ ♍ quasi 2gr. boreazephyrum versus. Erat autem spica in ♎ 19gr. 23′. 47″ cum lat. austr. 2gr. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. *Bostoniæ* in *Novâ Angliâ*, cometa distabat à spica ♍ gradu uno, differentia latitudinum existente 40′. Eodem die in Insula *Jamaicâ*, cometa distabat à spicâ intervallo quasi gradus unius. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. 38½gr., horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 10ª *Londini*) cometam vidit supra spicam ♍, & cum spicâ propemodum conjunctum, existente distantiâ inter eosdem quasi ¾gr. Et (f) ex his observationibus inter se collatis colligo quod hora 9.44′ *Londini* cometa erat in ♎ 18gr. 50′ cum latitudine australi 1gr. 25′. circiter. Cometa autem

(f) * *Ex his observationibus inter se collatis* via cometæ inter stellas determinatur, & hinc colliguntur cometæ longitudo & latitudo (149.) hor. 9. 44′ Londini, reductione scilicet factâ ad meridianum Londinensem.

163.

De Mundi Systemate.

tem per theoriam jam erat in ♎ 18gr. 52′. 15″ cum latitudine australi 1gr. 26′. 54″.

Nov. 20. D. *Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, horâ sextâ matutinâ *Venetiis* (id est, horâ 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23gr. cum latitudine australi 1gr. 30. Eodem die *Bostoniæ*, distabat cometa à spicâ ♍, 4gr. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & socii hor. mat. 7¼ cometam observarunt in ♎ 27gr. 50′ cum latitudine australi 1gr. 16′, *Cellius* in ♎ 28gr. *Ango* horâ quintâ matutinâ in ♎ 27gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27gr. 51′. Eodem die in insulâ *Jamaicâ* cometa visus est prope principium scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum spicâ virginis, id est, 2gr. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* in *Indiâ Orientali*, (id est ad horam noctis præcedentis 11. 20′ *Londini*) capta est distantia cometæ à spicâ ♍ 7gr. 35′ in orientem. In lineâ rectâ erat inter spicam & lancem, ideoque versabatur in ♎ 26gr. 58′ cum lat. australi 1gr. 11′ circiter; & post horas 5. & 40′ (ad horam scilicet quintam matitunam *Londini*) erat in ♎ 28gr. 12′ cum lat. austr. 1gr. 16. Per theoriam vero cometa jam erat in ♎ 28gr. 10′. 36″, cum latitudine australi 1gr. 53′. 35″.

Nov. 22. Cometa visus est à *Montenaro* in ♏ 2gr. 33′. *Bostoniæ* autem in *Novâ-Angliâ* apparuit in ♏ 3gr. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac prius, id est, 1gr. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♏ 1gr. 50′, ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♏ 3gr. 5′ circiter. Eodem die *Londini* hora mat. 6½ *Hookius* noster cometam vidit in ♏ 3gr. 30′ circiter, idque in lineâ rectâ quæ transit per spicam virginis & cor leonis non exactè quidem, sed à lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea à cometâ per spicam ducta, hoc die & sequentibus transibat per australe latus cordis leonis interposito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & spicam virginis transiens, eclipticam secuit in ♍ 3gr. 46′; in angulo 2gr. 51′.

Et

Et si cometa locatus fuisset in hâc lineâ in ♍ 3gr. ejus latitudo fuisset 2gr 26'. Sed cum cometa consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil distaret ab hâc lineâ boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem spicæ ♍, eratque 1gr. 30' circiter, & consentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuò augebatur, ideoque jam sensibiliter major erat quam 1gr. 30'. Inter limites autem jam constitutos 2gr. 26' & 1gr. 30', magnitudine mediocri latitudo erit 1gr. 58' circiter. Cauda cometæ, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad spicam ♍, declinans aliquantulum à stellâ istâ, juxta *Hookium* in austrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit sensibilis, & cauda æquatori fere parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione solis boream versus.

Nov. 23. st. vet. horâ quintâ matutinâ *Noriburgi* (id est hora 4½ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♍ 8gr. 8', cum latitudine australi 2gr. 31', captis scilicet ejus distantiis à stellis fixis.

Nov. 24. Ante ortum solis cometa visus est à *Montenaro* in ♍ 12gr. 52', ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & spicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2gr. 38'. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hockii*, perpetuò augebatur; ideoque jam paulò major erat quam 1gr. 58'; & magnitudine mediocri, sine notabili errore, statui potest 2gr. 18'. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam & decrevisse volunt, & *Cellius* & observator in *Novâ-Angliâ* eandem ferè magnitudinem retinuisse, scilicet gradus unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præsertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores sunt eæ quæ per positiones cometæ ad fixas à *Montenaro*, *Hockio*, *Angone* & observatore in *Novâ-Angliâ*, & nonnunquam à *Ponthæo* & *Cellio* sunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♍ 11gr. 45';

 ideoque

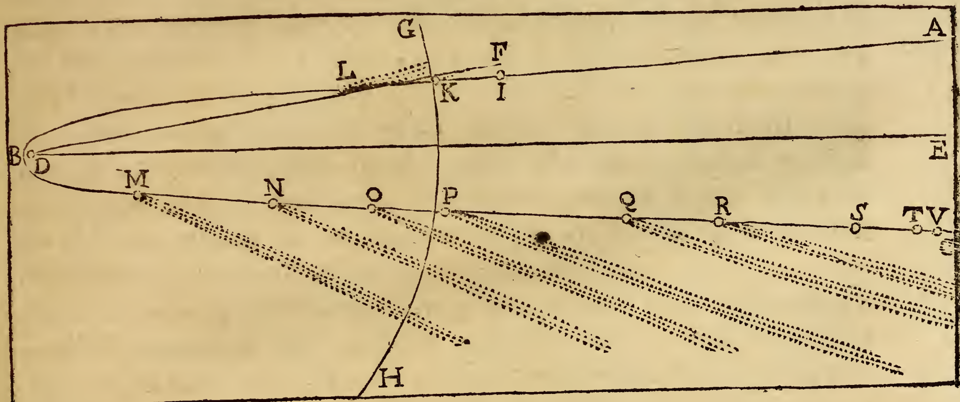
DE MUNDI SYSTEMATE. ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♍ 13gr. circiter. Per theoriam vero cometa jam erat in ♍ 13gr. 22'. 42''.

Nov. 25. Ante ortum ſolis *Montenarus* cometam obſervavit in ♍ 17¾gr. circiter. Et *Cellius* obſervavit eodem tempore quod cometa erat in linea recta inter ſtellam lucidam in dextro ſemore virginis & lancem auſtralem libræ, & hæc recta ſecat viam cometæ in ♍ 18gr. 36'. Per theoriam verò cometa jam erat in ♍ 18⅓gr. circiter.

Congruunt igitur hæ obſervationes cum theoriâ quâtenus congruunt inter ſe, & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto tempore à quarto die *Novembris* ad uſque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis (g) ſecuit planum eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam ſecuit non in oppoſitis cœli partibus, ſed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque curſus cometæ plurimum deflectebatur à circulo maximo. Nam & menſe *Novembri* curſus ejus tribus ſaltem gradibus ab eclipticâ in auſtrum declinabat, & poſtea menſe *Decembri* gradibus 29 vergebat ab eclipticâ in ſeptentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in ſolem & redibat à ſole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut obſervavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per ſigna novem, à leonis ſcilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter ſignum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigeſimum *Novembris* deſcripſit gradus circiter quinque ſingulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26. & *Decemb.* 12, ſpatio ſcilicet dierum quindecim cum ſemiſſe, deſcripſit gradus tantum 40; poſtea vero motu iterum accelerato, deſcripſit gradus ferè quinque ſingulis die-

163. (g) * *Bis ſecuit planum Eccliptica.* Tempus quo cometa ſecat Eccliptieam inveniri poteſt per num. 145. & 154.

diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque easdem observat leges cum theoriâ planetarum, & cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



Cæterùm trajectoriam quam cometa descripsit, & caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi *A B C* denotat trajectoriam cometæ, *D* solem, *D E* trajectoriæ axem, *D F* lineam nodorum, *G H* intersectionem sphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, *I* locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, *K* locum ejusdem *Nov.* 11, *L* locum *Nov.* 19, *M* locum *Dec.* 12, *N* locum *Dec.* 21, *O* locum *Decemb* 29, *P* locum *Jan.* 5. *sequent.* *Q* locum *Jan.* 25, *R* locum *Feb.* 5, *S* locum *Feb.* 25, *T* locum *Mar.* 5, & *V* locum *Mar.* 9. Observationes vero sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4. & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta non nisi semissem gradus unius longa tubo decempedali visa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30gr. longa, solique directè oppo-

De Mundi Systemate.

oppoſita in *Novâ-Angliâ* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, quæ tunc erat in ♍ 9gr. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam *δ* in aquilæ auſtrali alâ, & deſinebat prope ſtellas *A*, *ω*, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ $19\frac{1}{2}$gr. cum latitudine boreali circiter. *Dec.* 11. Cauda ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero α*, *β*,) deſinens in ♑ 26gr. 43′, cum latitudine boreali 38gr. 34′. *Dec.* 12. Cauda tranſibat per medium ſagittæ, nec longè ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4gr. cum latitudine boreali $42\frac{1}{2}$gr. circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5. 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra cygni uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtellâ ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat à ſtellâ illâ 2gr. 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22gr. cum latitudine boreali 61gr. Et hinc longa erat cauda 70gr. circiter. *Dec.* 21. Eadem ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans à *β* & *Schedir*, & diſtantiam ab utrâque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque deſinens in ♈ 24gr. cum latitudine $47\frac{1}{2}$gr. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54gr; ideoque deſinebat in ♉ 19gr. cum latitudine 35gr. *Jan.* 5. Cauda tetigit ſtellam *π* in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & ſtellam *μ* in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes noſtras) longa erat 40gr.; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per ſolem & caput cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce

ce

ce tenuissimâ desinebat è regione stellæ *κ* in latere *Persei*. Distantia termini caudæ à circulo solem & cometam jungente erat 3gr. 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum 8½gr. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & nocte unâ & alterâ sequente ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulò ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accuratè, ideoque declinabat ab oppositione solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit. *Feb.* 25. & deinceps cometa sine caudâ apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quod corpora cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes terræ, solis & planetarum, cometa hicce in transitu suo per viciniam solis statim dissipari debuisset. Est enim calor solis ut radiorum densitas, hoc est, reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à sole. Ideoque cum distantiâ cometæ à centro solis *Decemb.* 8. ubi in perihelio versabatur, esset ad distantiam terræ à centro solis ut 6 ad 1000 circiter, calor solis apud cometam eo tempore erat ad calorem solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si (i) recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor

(i) * *Si rectè conjector.* Hanc Newtoni conjecturam experimenta confirmant. In transact. philosoph. num. 270. describitur tabula caloris gradus exhibens. (Hujus tabulæ constructionem jam exposuimus in not. ad cor. 4. prop. 8. lib. 3.). Ex relatis ab autore experimentis colligitur calorem ferri, quantum levioris ignis auxilio fieri potuit, candefacti, circiter fuisse 2 ½ majorem quam calor aquæ ebullientis. Hinc ignis vehementioris ope aucto calore ferri cadentis, rectè conjectatur Newtonus calorem hujus ferri quasi triplo vel quadruplo majorem fieri quam calor aquæ ebullientis.

De Mundi Systemate.

calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud cometam in perihelio verſantem ex radiis ſolaribus concipere poſſet, quaſi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in perihelio ſuo calorem immenſum ad ſolem concepit, & calorem illum diutiſſimè conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius in aëre conſiſtens vix amitteret. Globus autem major calorem diutiùs conſervaret in ratione diametri, propterea quod ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic terræ æqualis, id eſt, pedes plùs minùs 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio caloris, ob cauſas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: (k) & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porrò notandum eſt quod cometa menſe *Decembri*, ubi ad ſolem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quam antea menſe *Novembri*, ubi perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ è cometis oriuntur ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem ſolis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. (l) Et indè colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu nucleus cometæ per calorem ſuum emittit. Cæ-

163. (k) * *Et optarim rationem veram.* Clariſſ. Hermannus Boerhaave in elementis Chemiæ, diligentiſſimis experimentis ſe inveniſſe refert eò diutiùs calorem in corporibus retineri quo majora ſunt, cæteris paribus. Si autem corpora ejuſdem diametri ejuſdemque caloris, diverſæ ſint denſitatis, quæ denſiora ſunt, caloris quoque ſunt tenaciora; denſitas enim ignem coercet, illiuſque egreſſum ex intimis partibus retardat. Quia verò intimæ corporum partes innumeris modis variari atque inter ſe permiſceri poſſunt, hinc patet in ipſâ caloris conſervatione non leves varietates oriri poſſe. Hæ ſunt fortaſsè latentes cauſæ quæ Newtonum in eam ſuſpicionem induxerunt durationem ſcilicet caloris augeri in minori ratione quam eâ diametri.

(l) * *Et indè colligere videor.* Hanc ſententiam pluribus argumentis deinceps confirmat Newtonus.

Cæterùm de cometarum caudis triplex eſt opinio; eas vel jubar eſſe ſolis per tranſlucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius à capite cometæ in terram, vel denique nubem eſſe ſeu vaporem à capite cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes à ſole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientiâ rerum opticarum. Nam jubar ſolis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aërem ſemper volitantibus: ideoque in aëre fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius eſt & ægriùs ſentitur: in cœlis autem ſine materiâ reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quâtenus in jubare eſt, ſed quâtenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce ſolis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux fixarum & planetarum diſtinctè ad nos tranſmiſſa demonſtrat medium cœleſte nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id, quoniam rariſſimè contingit, adſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aëris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde eſt quòd ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos ſine omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in cometis, cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: ſcien-

De Mundi Systemate.

(m) ſciendum eſt quod lux fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ verò nullæ: cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa. Sic enim cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſuâ vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis & ultrà: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſimâ, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulò ultrà: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de ſolis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui cometa anni 1680. *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$. p. m. *Londini*, verſabatur in ♓ 8gr. 41′, cum latitudine boreali 28gr. 6′, ſole exiſtente in ♑ 18gr. 26′. Et cometa anni 1577. *Dec.* 29 verſabatur in ♓ 8gr. 41′ cum latitudine boreali 28gr. 40′, ſole etiam exiſtente in ♑ 18gr. 26′ circiter. Utroque in caſu terra verſabatur in eodem loco, & cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen caſu cauda cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione ſolis aquilonem verſus; in poſteriore verò (ex obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, ſupereſt ut phænomena caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à ſole averſas aſcen-

163. (m) * *Sciendum eſt* Ut notum eſt ex teleſcopiorum theoriâ apud omnes paſſim rerum opticarum & catoptricarum ſcriptores. Sed eâ potiſſimum legi merentur quæ de lucis intenſitate, viſionis diſtinctione & teleſcopiorum beneficiis dedit Clariſſ. Vir Robert Smith in eximio opere optico.

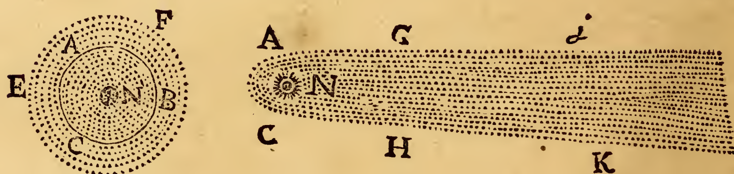
ascendere confirmatur ex (a) legibus quas observant. Ut quod in planis orbium cometarum per solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quòd spectatori in his planis constituto apparent in partibus à sole directè aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem cometæ, ut & ubi caput cometæ ad solem propiùs accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ: Præterea

(a) 164. * *Ex legibus quas observant.* Leges illæ quas observant cometarum caudæ cum prædictâ Newtoni sententiâ apprimè congruunt. Cauda à cometæ capite vaporis instar in altum, id est, in partes à sole aversas assurgens in plano orbis cometæ per solem transeunte jacere debet; in æthere enim quieto nulla est ratio cur ad hanc potius quam ad illam partem deflectat. Quia autem vapor à capite exiens duos motus simul componit, alterum scilicet ascensus recti à sole, alterum verò progressus capitis, hinc fit ut cauda non directe à sole aversa sit, sed aliquantulum inde deviet in eas partes quas cometæ caput in orbe suo progrediens relinquit; si tamen spectatôr in orbis cometici plano per solem transeunte constituatur, deviatio caudæ neutiquam sentitur, quia tota in plano isto jacet. Licet vapor assurgens motum capitis participet, tamen propter aliqualem ætheris resistentiam, minus velociter quam caput ipsum progreditur, & quò altiùs ascendit vapor eò fit rarior, id est, quò longior est cauda eò majorem experitur resistentiam, ideóque præcedens caudæ latus quod scilicet proximus est partibus ad quas tendit cometa, convexum erit, sequens verò concavum ac proindè cauda non à sole duntaxat aversa est, sed etiam incurvatur. Hæc à sole deviatio & curvatura eò minor est quò recta solem cometamque conjungens obliquior est ad cometæ orbitam; si enim cometa directe à sole vel ad solem tenderet, cauda quoque foret recta & à sole directè aversa. Hinc 165.
patet in ipso cometæ perihelio maximam esse caudæ deviationem maximamque curvaturam; tunc enim recta solem & cometam conjungens ad orbem cometæ normalis est. Præatereà ob prædictam licet admodum exiguam ætheris resistentiam, convexa caudæ facies in ætherem incurrens densior est, ac proinde lucidior & distinctius terminata apparebit quam facies concava. Hæc sunt præcipua caudarum phænomena quibus satisfacit Newtoni opinio. Hinc caudas à capitibus oriri & in regiones à sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant.

165. Descriptis opinionibus de cometarum caudis adjungenda est illa quam Clariss. D. De Mairan in eximio opere de aurorâ Boreali his tuetur rationum momentis. Cometas ad solem proximè accedere observationibus compertum est; Hinc Newtonianæ attractionis legibus consentaneum videtur ut aliquam solaris atmosphæræ materiam cometa attrahat Cur autem materia hæc instar comæ vento agitatæ dispergatur & ad solis oppositum dirigatur ex radiorum solarium impulsione oriri potest. Plurimis enim experimentis certum est solares radios omni prorsus impulsionis vi non carere. Clariss Hombergius varia materiæ levissimæ filamenta radiis solaribus in vitri ustorii foco objecta notabiliter impelli observavit Lamellam quoque elasticam ità ligneæ tabulæ affixit ut extremitas una liberè penderet, collectis vitri ustorii ope solaribus radiis expo-

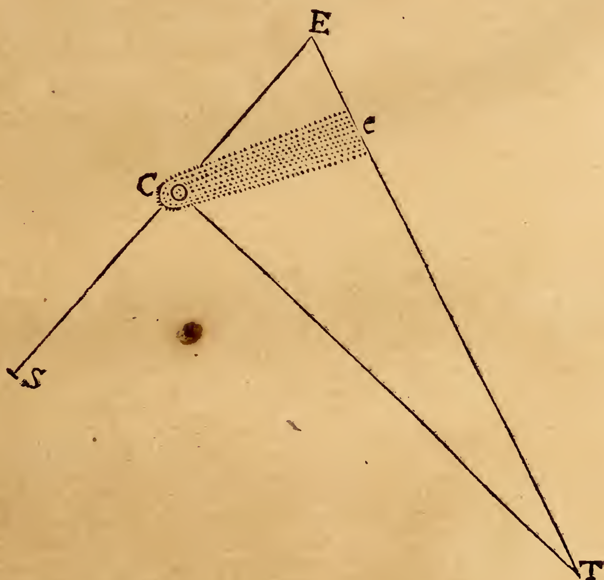
De Mundi Systemate.

terea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideo quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à ſole per caput cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quâ caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſupe-



165. expoſita hæc lamella inſtar penduli ſenſibiliter ibat & redibat. Quamvis autem leviſſima ſit hic apud nos radiorum ſolarium impulſio, maxima tamen eſſe poteſt in ſpatiis liberrimis in quibus cometæ deferuntur, præſertim cum tenuiſſima ſit materia quæ cometarum caudas componit. Jam verò concipiatur cometa N, apparenti cinctus atmoſphærâ E D F, in tranſitu ſcilicet prope ſolem collectâ, ità ut in majori à cometæ nucleo N. diſtantiâ levior rariorque ſemper fiat hæc materia, quemadmodum in apparenti cometarum atmoſphærâ ſolet obſervari. Sphæra interior A B C, ex iis ponatur conſtare particulis quæ radiorum ſolarium impulſioni poſſint reſiſtere, e contrà verò orbis ſuperior A F B D C E, leviores contineat particulas quæ huic impulſioni cedant, manifeſtum eſt radiorum ſolarium impulſione projici verſus ſolis oppoſitionem materiæ veſtigium B G H j K, quod figuram caudarum repræſentat. Ex dictis patet hanc ſententiam cum Newtonianis principiis conſentire; Et quidem Newtonus deſcribens poſteà Kepleri opinionem quæ eâdem ferè eſt, ab eâ non videtur alienus.

ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in ſolem, fumi & vapores aſcendere debent à ſole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel rectà petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia ſolis & juxta corpus fumans Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in



166. Longitudo caudæ hoc modo poteſt inveniri. Sit S ſol, C cometa cujus cauda Ce; ex cognitis ſolis & cometæ locis notus erit angulus TCE, dataque (per obſerv.) deviatione caudæ à ſolis oppoſito, dabitur angulus ECe, ac proindè innoteſcet angulus TCe, quem ſcilicet cauda efficit cum rectâ terram & cometam jungente. Prætereà (per obſerv.) innoteſcit angulus ad terram CTe, quem cauda ſubtendit, quarè (per theoriam cometæ) datâ cometæ diſtantiâ à terrâ, dabitur caudæ longitudo. 172

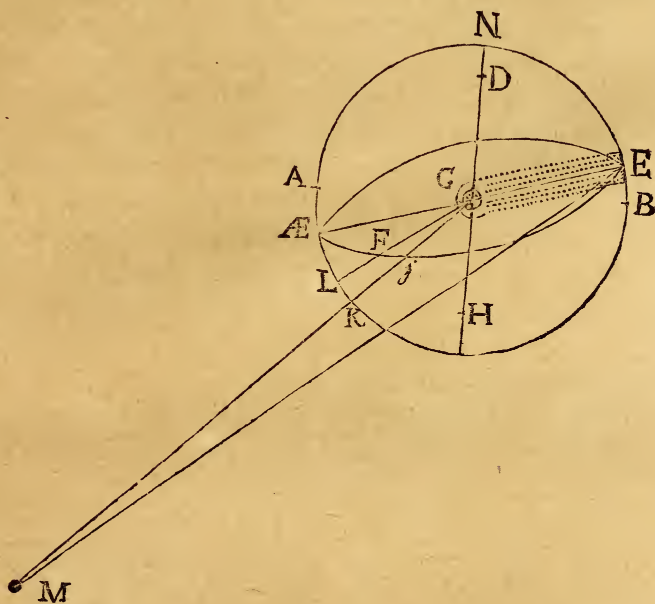
De Mundi Systemate.

in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aëris nostri, & motibus nubium caudas aliquâ ex parte obscurantium oriantur; vel forte a partibus viæ lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex cometarum atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aëris nostri. Nam aër juxta superficiem terræ spatium occupat quasi 850 partibus majus quàm aqua ejusdem ponderis, ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aëris ad summitatem atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea si

167. 167. Novam elegantemque methodum ad cometarum motus in orbe parabolico computandos nobiscum, suá humanitate, communicavit Clariss. Vir & in rebus Mathematicis Versatissimus D. De Chezeaux. Methodum hanc describere longius foret, paucis duntaxat exponemus quá ratione longitudinem atque deviationem caudæ investigat. Sit cometa in puncto G circà quod tanquam centrum describatur sphæra cujus radii GA, GE, sint æquales longitudini caudæ cometæ. Concipiatur in hac sphærá planum Eclipticæ parallelum habens polos in D & H, itemque concipiatur planum AKEB parallelum orbitæ veræ cometæ habens polum unum in G, sit terra in M, ejus longitudo e cometá visa & ad planum orbitæ AKEB reducta, exprimetur per arcum KB, latitudo autem per arcum Kj. Quia verò datur (per observ.) longitudo cometæ é terrá visa, dabitur longitudo terræ e cometá visa; sed datur latitudo cometæ (per observ.) & (per theoriam cometæ) habetur inclinatio plani AKEB, ad planum Eclipticæ, itemque innotescit locus nodi B. Quare (per trigon sphær.) invenietur longitudo terræ respectu plani AKEB, cujus mensura est arcus BNAK, dabiturque latitudo Kj. Jam verò ductâ lineâ ME, ex terrá M, ad extremitatem caudæ E, cujus extremitatis longitudo & latitudo é terra visæ, (per observ) notæ sunt, agatur GF parallela rectæ EM, eodem planè modo ac suprà innotescet positio puncti F in superficie sphæræ respectu plani AKEB, descriptoque arcu circuli maximi GFL, invenientur arcus BNAL & FL. Sed in triangulo sphærico GjF, datis latere Gj, complemento scilicet ad jK, & latere GF, complemento ad FL, atque latere Fj, mensurâ anguli FGj, qui æqualis est angulo GME, invenietur angulus GFj. Tandem concipiatur planum circuli maximi transiens per puncta F, j, per centrum G, commune sphæræ & cometæ atque per extremitatem caudæ F, cujusque sectio cum plano ANB, sit recta FGÆ, formabitur alterum triangulum sphæricum ÆFL, cujus

si columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis de-matur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Indè verò (per regulam (b) multis ex-perimentis confirmatam, quod compressio aëris sit ut pondus at-mosphæræ incumbentis, quodque gravitas sit reciprocè ut qua-dratum



jus jam innotescunt angulus ÆFL & latus FL, quarè dabitur latus ÆL, ac proindè etiam dabitur arcus BAÆ, ob datum arcum BAL; innotescet præterea arcus BE, atquè obtinebitur arcus ÆF, qui additus arcui Fj, dabit arcum Æj, ideóque dabitur arcus Ej, mensura anguli rectilinei jGE, vel MGE. Datis autem in triangulo rectilineo MGE, angulis MGE, GME & latere GM, dabitur latus GE, hoc est, longitudo caudæ. Si itaque habeatur distantia cometæ à terrá in partibus mediocris distantiæ terræ à sole expressa, in iisdem quoquè partibus obtinebitur longitudo caudæ. Quoniam verò (ex theoriâ cometæ) datur distantia cometæ à nodo ex sole visa, si ex hâc distantiâ subtrahatur arcus BE, habebitur angulus quem recta per solem & cometam ducta comprehendit cum caudâ GE, hoc est, deviatio cometæ à sole. 167.

(b) * *Multis experimentis confirmatam.* Experimenta illa referunt passim rerum Physicarum scriptores, sed præsertim Clariss. Muskembroek in Physicâ. Videantur etiam transactiones Philosophicæ an. 1671, num. 73.

De Mundi Systemate.

dratum diſtantiæ locorum à centro terræ) computationem (c) per corol. prop. XXII. lib II. ineundo, inveni quod aër, ſi aſcendatur à ſuperficie terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quam apud nos in ratione longè majori, quàm ſpatii omnis infra orbem ſaturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus aëris noſtri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes planetarum regiones uſque ad ſphæram ſaturni & longè ultrà. Proindè cum aër adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu atmoſphæra cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quam ſuperficies nuclei deinde cauda adhuc altius aſcendat, debebit cauda eſſe quàm rariſſima. Et quamvis ob longè craſſiorem cometarum atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem ſolem verſus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in ſe mutuò, fieri poſſit ut aër in ſpatiis cœleſtibus inque cometarum caudis non adeò rareſcat; perexiguam tamen quantitatem

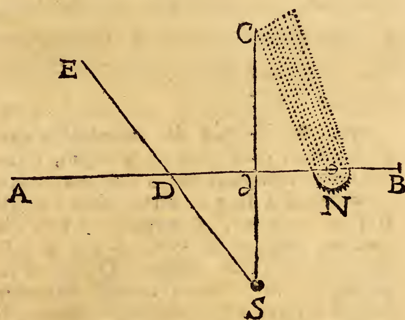
168. (c) 168. * *Per corol. prop. XXII.* Sit (in figurâ prop. XXII.) S centrum terræ, S A ejuſdem ſemidiameter mediocris pedum 19615800 $= r$, A B pedum 850, & ideò S P $= 19616650 = a$, S F $= 2r$, dignitas hyperbolæ $fah = rr$, ideóque A a $= r$, F f $= \frac{1}{2}r$, & B b $= \frac{rr}{a}$ ac proindè A a $-$ F f $= \frac{1}{2}r$ & A a $-$ B b $= \frac{ar - rr}{a}$. Denſitas A H ſeu S t $= m = 33$, denſitas B j, ſeu S u $= n = 32$, & denſitas F N, ſive S Z $= d$. His poſitis, (ex naturâ hyperbolæ per theor. 4. de hyperbolâ), erit area t h n z, ad aream t h i u, ut L. $\frac{m}{d}$ ad L. $\frac{m}{n}$, & (per Cor. Prop. XXII. lib. 2.) erit L. $\frac{m}{d}$: L. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}r : \frac{ar - rr}{a} = a : 2a - 2r$, ideóque L. $\frac{m}{d} = \frac{a}{2a - 2r} \times$ L. $\frac{33}{32}$. Eſt autem $\frac{a}{2a - 2r} = \frac{1961665}{170}$, & ex tabulis vulgaribus L. $\frac{33}{32} = 0.0133639$. Quarè L. $\frac{m}{d} = 154.20879349$. Denſitas ergò aeris in A ſeu in ſuperficie telluris ſe habet ad denſitatem aeris in F, ſeu in diſtantiâ ſemidiametri telluris ab eâdem ſuperficie ut numerus reſpondens logarithmo 154.20879349 ad unitatem. Porrò logarithmo 3.2087100 in tabulis vulgaribus reſpondet numerus 1617 & ideò logarithmo 3.20879349 reſpondere debet numerus unitate fere integrâ major quam 1617. Logarithmo igitur invento 154.20879349 reſpondet numerus major quam 1617 cum 151 zeris adſcriptis. Jam verò ſemidiameter terræ ſit ut prius 19615800 pedum Parallaxis ſolis ponatur 10″ cujus ſinus rectus eſt partium 485 poſito radio partium 10000000. Quoniam ſemidiameter orbis magni eſt ad ſemidiametrum terræ ut radius ad ſinum parallaxis ſolis (30. lib. 3.) erit ſemidiameter orbis magni pedum circiter 500000000000000. Sed ſemidiameter orbis Saturni circiter decuplo major eſt (phœn. 4.) erit igitur hæc ſemidiameter pedum

tatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce solis splendens, crassitudine suâ paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem solis in jubare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, (d) cognosci ferè potest ducendo rectam à termino caudæ

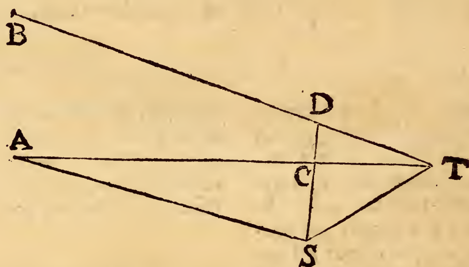
pedum 5000000000000, ideóque diameter ped. 10000000000000, sive digitorum 120000000000000. Est igitur sphæra Saturni ad globum cujus diameter est digitus unus ut præcedentis numeri cubus sive 1728 cum annexis 39 cyphris ad unitatem; sed ratio illa multò minor est ratione densitatum modò inventâ; Quarè globus aëris nostri digitum unum latus eâ cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram Saturni & longè ultrà.

(d) 169. * *Cognosci ferè potest.* Referat S solem, A B trajectoriæ cometicæ portionem. Sit N cometæ nucleus ab A versus B progrediens, C terminus caudæ. Ducatur recta à termino illo C ad solem, punctum d, ubi recta trajectoriam secat, designabit locum ex quo vapor in termino caudæ ascendere cæpit à capite, si vapor ille rectâ ascendat à sole. Quia autem vapor non rectâ ascendit à sole sed vergit versus partes A, quas cometa reliquit (164) agatur recta S E, parallela longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) recta illa à lineâ caudæ divergat, atque trajectoriam cometæ alicubi intersecet putà in D, vapor qui nunc terminum caudæ constituit à nucleo cœpit ascendere dum cometa in trajectoriæ suæ loco D versabatur; hic enim vapor cum motu ascensûs à sole, motum cometæ progressivum quem antè ascensum suum habebat, componit. Sed per varias methodos paulò antè explicatas inveniri potest tempus quo cometa locum D occupavit & potest definiri quanto temporis spatio opus sit ut cometa trajectoriæ portionem D N, longitudine datam, percurrat, ideóque habebitur proximè tempus quo vapor ad terminum caudæ ascendit. Simili modo determinari potest temporis spatium quo vapor ascendit ad datum caudæ punctum. 168.



De Mundi Systemate.

dæ ad ſolem, & notando locum ubi recta illa trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat à ſole, aſcendere cœpit à capite, quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non rectà aſcendit à ſole, ſed motum cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit obliquè. Unde verior erit problematis ſolutio, ut recta illa, quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potiùs (ob motum cur-



170. 170. Ex his quæ de cometarum caudis hactenus dicta ſunt, cometarum, quandiù nobis conſpicui ſunt, maxima poſſibilis diſtantia à ſole & terrâ definiri poteſt. Referat S ſolem, T terram, S T A diſtantiam cometæ à ſole, ſitque A T B, apparens longitudo caudæ. Quoniam lux propagatur à termino caudæ ſecundùm lineam rectam T B, reperitur terminus ille alicubi in lineâ T B, putà in D. Jungatur D S, ſecans lineam T A in C, & quia cauda ſemper opponitur ſoli quam proximè, ideóque ſol, caput cometæ & terminus caudæ jacent in directum, reperitur caput cometæ in C. Rectæ T B, agatur parallela S A, occurrens lineæ TA, in A, caput cometæ C neceſſariò reperietur inter T & A, nam terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ T B, & lineæ omnes ut S D, quæ ab S ad lineam T B duci poſſunt, ſecant lineam TA, alicubi inter T & A. Quarè cometa non poteſt longius abeſſe à terrâ quam intervallo T A, nec à ſole quam intervallo S A ultrà ſolem, vel ST, citrà. Exemplo ſit cometa an 1680. cometa ille die 1[illegible]. Dec. diſtabat 9°. à ſole & longitudo caudæ erat 35°. Quarè conſtituatur triangulum TSA, cujus angulus T æqualis ſit diſtantiæ 9°. & angulus A ſeu angulus A T B æqualis ſit longitudini caudæ 35°., erit S A ad ST, id eſt, limes maximæ poſſibilis diſtantiæ cometæ à ſole ad ſemidiametrum orbis magni ut ſinus anguli T, ad ſinum anguli A, hoc eſt, ut 3. ad 11. circiter. Quarè cometa eo tempore minùs diſtabat à ſole quam $\frac{3}{11}$ partibus diſtantiæ terræ à ſole, & propterea verſabatur aut intrà orbem

curvilineum cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25. ascendere cœperat à capite ante *Dec.* 11. ideóque ascensu suo toto, dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in viciniâ solis celerrimè ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiù apparuit, ex vapore ferè omni constabat, qui à tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non priùs evanuit quam ob nimiam suam tam à sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuò à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. Et (e) hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solùm solida planetarum & cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt ac diutissimè conservant.

As-

bem Mercurii aut inter orbem illum & terram. Rursus die 21. Decembr. distantia cometæ à sole erat $32^\circ \frac{2}{5}$. & longitudo caudæ 70°. ergò ut sinus $32^\circ \frac{2}{5}$. ad sinum 70°, hoc est, ut 4 ad 7, ità erat limes intervalli inter cometam & solem ad distantiam terræ à sole & propterea nondum cometa excesserat ex orbe veneris. Die 28. Decembr. distantia cometæ à sole erat 55°. & longitudo caudæ 56°. Quare, iisdem calculi vestigiis insistendo, limes intervalli inter cometam & solem, nondum æquabat distantiam terræ à sole & propterea cometa nondum excesserat ex orbe telluris. Hâc methodo quam ex Newtoni opusculo de mundi systemate descripsimus, aliorum cometarum distantias limitando inventum est cometas omnes, quandiù se nobis ostendunt, versari intrà spatium sphæricum centro sole & intervallo solis ac terræ vel duplicato vel ad summum triplicato descriptum. 170.

(e) * *Et hinc rursùs colligitur.* Legantur quæ dicta sunt in scholio prop. XI. lib. 2.

De Mundi Systemate.

Ascensum caudarum ex atmosphæris capitum & progressum in partes à sole aversas *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longè tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est à (f) ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ impeditissimis in regionibus nostris à radiis solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à sole ascendere. Cum autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideóque servatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potiùs oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum ascenderit à sole? Nam radii solares non agitant media, quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes eâ actione calefactæ calefacient auram æthercam cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam eâ raritate gravitatem suam specificam, quâ priùs tendebat in solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa solem & eâ actione conantur à sole recedere, at solis atmosphæra & materia cœlorum vel planè quiescit, vel motu solo quem à solis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in viciniâ solis, ubi orbes curviores sunt, & cometæ intra densiorem & eâ ratione graviorem solis atmosphæram consistunt, & caudas quàm longissimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus solem gravitando, movebuntur circa solem in ellipsibus pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in

170. (f) * *Non est a ratione prorsus alienum* (165.).

in solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant à capitibus solem versus, quam gravitas capitum efficere possit, ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel simul in solem cadent, vel simul in ascensu suo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quò minùs caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem à causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque facillimè accipiant & postea liberrimè servent.

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel indè post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potiùs ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & subindè in periheliis cometarum illorum, qui ad usque atmosphæram solis descendent, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarescit ac [illegible]r. Quâ ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deindè paulatim in planetas per gravitatem suam attrahi, & cum eorum atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad constitutionem terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem solis vapores copiosè satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut (g) aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuò suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò crescunt, dein magnâ ex

(g) * *Ut aliqui cum ratione philosophantur.* Horumce philosophorum rationes videre est passim apud omnes cultiores physicos. Legantur transact. philosop. an. 1687. 1694. 1729 & monum. Acad. Paris. an. 1703.

170.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles terræ aridæ in dies augetur, & liquores, niſi aliundè augmentum ſumerent, perpetuò decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porò ſuſpicor ſpiritum illum, qui aëris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipuè venire.

Atmoſphæræ cometarum in deſcenſu eorum in ſolem excurrendo in caudas, diminuuntur, & (eâ certè in parte quæ ſolem reſpicit) anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum à ſole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modo phænomena eorum *Hevelius* rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modo ad ſolem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calo[illegible]atus craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus à ſole ac terrâ diſtantiis obſcurius apparuit poſt perihelium ſuum quam antea. Menſe enim *Decembri* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at menſe *Novembri* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumque viderant, majorem deſcribunt cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigienſi*, *Novem.* 19. cometa hicce luce ſuâ quantumvis plumbeâ & obtusâ, æquabat ſpicam virginis, & clarius micabat quam poſtea. Et *Montenaro Nov.* 20, ſt. vet. cometa apparebat major ſtellis primæ magnitudinis, exiſtente caudâ duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus noſtras incidere, ſcripſit caput ejus menſe *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longè cedere cometæ, qui menſe *Novembri* ante ſolis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur, quod materia capitis ſub initio copioſior eſſet, & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, apparuerint ſub-

obſ-

obſcura & exigua. Nam anno 1668. *Mart.* 5. ſt. nov. horâ ſeptimâ veſpertinâ *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, cometam vidit horizonti proximum ad occaſum ſolis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, caudâ verò ſuprà modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & horizonti ferè parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolùm dies durabat, ſubindè notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Undè etiam in *Luſitaniâ* quartam ferè cœli partem (id eſt, gradus 45) occupaſſe dicitur ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infrà horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt, quod caput à ſole receſſit, eique proximum fuit initio, pro more cometæ anni 1680. Et in chronico *Saxonico* ſimilis legitur cometa anni 1106. *cujus ſtella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio menſis *Februarii*, ac deinceps circa veſperam, ad occaſum ſolis brumalem. Indè verò & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe ſoli vicinum. *A ſole*, inquit *Matthæus Pariſienſis*, *diſtabat quaſi cubito uno*, *ab horâ tertiâ* (rectius ſextâ) *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante ſolem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente vero die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minima fieri poteſt diſtantia ſolem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* (caudæ ſcilicet) *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* (cauda) *jam minus flagraret, reddita eſt* (capiti) *cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* (id eſt, ad 60gr.) *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* (an. 4. olymp. 101.) *& aſcendens*

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

DE MUNDI SYSTEMATE.

dens usque ad cingulum orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui è radiis solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulò superare videbatur, sed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui jovem, alii venerem vel etiam lunam æquasse traduntur.

(h) Diximus cometas esse genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa solem revolventium. Et quemadmodum è planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus & soli propioribus gyrantur, sic etiam cometas, qui in periheliis suis ad solem propiùs accedunt, ut plurimum minores esse, ne solem attractione suâ nimis agitent, rationi consentaneum videtur. (i) Orbium verò transversas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio propositio sequens lumen accendere potest.

PRO-

171. (h) 171. * *Diximus cometas esse genus planetarum*, idque gravissimis rationibus confirmatur. Hâc enim factâ hypothesi, computatisque per methodos præcedentes cometarum trajectoriis, hujusmodi trajectoriæ semper cum phænomenis congruunt quamproximè. Clariss. Halleïus suspicatur cometam an. 1531. ab Appiano observatum, eundem fuisse cum illo qui anno 1607 descriptus est à Keplero & Longomontano & quem Halleïus ipse redeuntem observavit an. 1682. quadrabant enim elementa omnia, solaque periodorum inæqualitas adversari videbatur. Verum tanta non fuit inæqualitas illa ut causis physicis adscribi non possit. Saturni enim motus à cæteris planetis & præsertim à jove ità perturbatur ut per aliquot dies integros incertum sit hujus planetæ tempus periodicum. Rectè etiam animadvertit Clariss. Cassinus in Mon. Paris. 1699. cometam diversis temporibus observatum ideóque pro duobus cometis usurpatum, unum eundemque esse posse, licet non conveniant inter se omnia motuum elementa; fieri scilicet potest ut unus idemque cometa bis observatus non secet Eclipticam sub eodem angulo & in iisdem locis, ut cometæ hujus velocitas in perigæo non sit eadem. Talibus enim erroribus aliisque plurimis Luna est obnoxia. Cæterum Clariss. Halleïus diligenter perpensis motibus cometæ an. 1682. hujus cometæ reditum anno 1758. futurum esse prædixit.

(i) * *Orbium verò transversas diametros & revolutionum tempora periodica.* Hæc duo obtineri possunt per methodum num 160. expositam.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Aſſumatur poſitio plani trajectoriæ, per propoſitionem ſuperiorem inventa; & ſeligantur tria loca cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quàmmaximè diſtantia; ſitque A tempus inter primam & ſecundam, ac B tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo (k) in perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longè à perigæo abeſſe. (l) Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in aſſumpto illo plano trajectoriæ. Deindè per loca illa inventa, circa centrum ſolis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope prop. XXI. lib. I. inſtitutas, deſcribatur ſectio conica: (m) & ejus areæ, radiis à ſole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto D & E; nempe D area inter obſervationem pri-

(k) * *In perigæo verſari convenit.* Verſante enim cometa in perigæo vel ſaltem non longe à perigæo, illius motus magis accurate definitur.

(l) * *Ex his locis apparentibus.* Inveniantur per operationes trigonometricas (ut in prop. præced.) loca tria vera cometæ in aſſumpto illo plano trajectoriæ tanquam accurato, hoc eſt, inveniantur tria prius definiti plani puncta in quibus cometa eandem longitudinem ac latitudinem obtineret quam reverâ habere obſervatur.

(m) * *Ejus areæ.* Ex datâ cometæ ſemitâ ejuſque partium magnitudine reſpectu ſemitæ telluris ejuſque partium, dabitur velocitas quâ cometa illam deſcribit ideóque dabitur tempus quo cometa areas duas jam inventas percurrit. Tempus illud totum dicatur T, capiaturque numerus C, qui ſit ad 1, ut tempus inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam, hoc eſt, ut A ad B. Sumatur prætereà G ad 1, ut areæ inter obſervationem primam & ſecundam ad aream inter obſervationem ſecundam & tertiam, id eſt, ut D ad E; eadem quoque erit ratio inter tempora quibus areæ illæ radiis ad ſolem ductis deſcribentur. Sit S, tempus verum inter obſervationem primam & tertiam. Si reperiatur T = S, & G = C, inventa plani trajectoriæ poſitio vera erit & accurata, nullâ indigens correctione. Sin aliter erit T — S, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam ortus nimirum ex poſitione plani trajectoriæ minus accuratâ, & G — C, erit error ex eâdem cauſâ ortus in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam, ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam, ut patet; nam in utroque caſu unitas uſurpatur pro conſequente rationis inter bina tempora.

 171.

DE MUNDI SYSTEMATE. primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E velocitate cometæ per prop. XVI. lib. I. inventa describi debet.

Oper. 2. (n) Augeatur longitudo nodorum plani trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30, quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut suprà: deinde etiam orbis per loca illa transiens, & (o) ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e, nec non tempus totum t, quo area tota $d+e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbisque per loca illa transiens, (p) ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota $\delta+\varepsilon$ describi debeat.

(q) Jam sit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; sitque S tempus verum inter

171. (n) * *Longitudo nodorum*, per num. 145. inventa

(o) * *Et ejusdem areæ duæ.* Harumce arearum inter tres observationes radiis ad solem ductis descriptarum ratio sit ut g, ad 1; sitque t, tempus totum quo cometa utramque aream describeret. Si deprehendatur t=S & g=C, assumpta plani positio vera erit & accurata. Sin aliter, erit, ut suprà in operatione 1ª, t−S, error in tempore toto inter observationem primam & tertiam, & g−C error in ratione temporis inter observationem primam & secundam ad tempus inter observationem secundam & tertiam. Uterque hic error oritur ex positione non satis accuratâ plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ.

(p) * *Ut & ejusdem areæ duæ.* Sint areæ illæ ut γ ad 1, sitque τ tempus totum quo area tota $\delta+\varepsilon$, describi debeat. Si fuerit $\tau=S$ & $\gamma=C$, assumpta plani trajectoriæ positio vera est & accurata. Sin contrà, erit $\tau-S$, error in tempore toto inter observationem primam & tertiam, & $\gamma-C$, error in ratione temporis inter observationem primam & secundam ad tempus inter observationem secundam & tertiam.

(q) * *Jam sit C ad 1.* Iisdem servatis denominationibus quas adhibet Newtonus, instituatur operatio per regulam falsæ positionis. Ad inveniendum errorem ortum ex assumptâ inclinatione plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, fiat juxta prædictam regulam, ut differentia errorum T−τ ad differentiam positionum T−S, ità

ter observationem primam ac tertiam; & signis + & − probè observatis quærantur numeri m & n, eâ lege, ut sit $2G-2C = mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et si in operatione primâ I designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum eclipticæ & K longitudinem nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo nodi. (r) Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, r & ϱ designent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respectivè: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum

LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROB. XXII.

itâ error Q, ad quartam quantitatem, erit hæc ipsa quantitas $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$, error inclinationis plani in toto scilicet tempore inter observationem primam & tertiam. Simili modo dicatur, $G-\gamma : G-C = Q : \frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$, erit quantitas $\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$ error ejusdem inclinationis in ratione inter bina trium observationum tempora. Similiter error longitudinis nodi in toto tempore inter observationem primam & tertiam invenitur $\frac{T-S}{T-t}\times P$, error verò in ratione inter bina tempora est $\frac{G-C}{G-g}\times P$. Est itaque vera & correcta inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ $I+\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$, sive $I+\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$; & vera longitudo nodi est $K+\frac{T-S}{T-t}\times P$ vel $K+\frac{G-C}{G-g}\times P$. Jam verò quoniam corrigendus est error uterque tam in toto tempore quam in ratione inter bina tempora, ponamus $\frac{T-S}{T-t}\times P$ & $\frac{G-C}{C-g}\times P$, separatim æquari $m\times P$ hoc est $\frac{T-S}{T-t}=m$ & $\frac{G-C}{G-g}=m$.

Ponamus quoque $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$ & $\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q = n\times Q$, id est $\frac{T-S}{T-\tau}=n$, & $\frac{G-C}{G-\gamma}=n$. Hinc proveniet $mT-mt=T-S$ & $mG-mg=G-C$; item $nT-n\tau=T-S$, & $nG-ng=G-C$, undè fit $2T-2S=mT-mt+nT-n\tau$, & $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$. Quarè si tales quærantur numeri m & n, ut sit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S=mT-mt+nT-n\tau$, erit $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$ & $\frac{G-C}{T-\tau}\times Q=n\times Q$. Similiter fiet $\frac{T-S}{T-t}\times P$ & $\frac{G-C}{G-g}\times P=mP$, ac proindè error inclinationis plani trajectoriæ erit nQ & error longitudinis nodi mP. Quarè vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ erit $I+nQ$, & $K+mP$ vera longitudo nodi. Hæc omnia patent ex notis in tres operationes præcedentes.

171.

(r) * *Ac denique.* Nota sint latera recta trium trajectoriarum in operatione primâ, secundâ & tertiâ descriptarum. Designet R, latus rectum primæ trajectoriæ, r secundæ, ϱ tertiæ, & trajectoriæ quam cometa describit desideretur verum latus rectum; per regulam falsæ positionis eâdem planè methodo quam modò adhibui-

verum latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum latus transversum trajectoriæ quam cometa describit. ([s]) Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. *Q. E. I.*

Cæterùm cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem cometam, in eodem orbe revolventem. ([t]) Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypothesi quod sint parabolicæ. Nam hujusmodi trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ cometæ anni 1680, quam cum observationibus suprà contuli, sed etiam ex

eâ

172. hibuimus poterit inveniri. Ut obtineatur vera longitudo nodi, additur ejus longitudini in primo plano excessus longitudinis assumptæ in plano secundo suprà præcedentem ductus in m, & ut habeatur vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additur inclinationi plani primi, excessus inclinationis assumptæ in plano tertio suprà inclinationem præcedentem ductus in n. Sed trajectoria cometæ ejusque latus rectum corrigi debent tum ob correctam longitudinem nodi, tum ob correctam inclinationem plani ad planum Eclipticæ, quare lateri recto trajectoriæ in primo plano descriptæ sivè ipsi R, addi debet $mr - mR$, excessus scilicet lateris recti in plano secundo suprà latus rectum in plano primo ductus in m. Addere insuper oportet $n\rho - nR$, qui est excessus lateris recti in plano tertio suprà latus rectum in primo ductus in n, ideóque erit $R + mr - mR + n\rho - nR$, verum latus rectum. Simili modo patet datis lateribus transversis in operatione primâ, secundâ & tertiâ respectivè $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$, esse verum latus transversum trajectoriæ $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$.

(s) 172. * *Dato autem latere transverso.* Accuratè descriptâ cometæ trajectoriâ (per methodos præced.) si deprehendatur ellipsim solis centro tanquam umbilico descriptam, non verò parabolam per determinata trajectoriæ puncta transire, cometa in orbem redibit & dato latere tranverso trajectoriæ hujus, dabitur tempus periodicum; erit scilicet, quadratum temporis periodici cometæ ad quadratum temporis periodici telluris circà solem ut cubus majoris axis orbitæ cometicæ ad cubum majoris axis orbitæ terrestris (160).

(t) * *Et tum demum* (160).

eâ cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines & latitudines hujus cometæ computavit, sed minùs accuratè. Ex iisdem observationibus *Halleius* noster (u) loca cometæ hujus denuò computavit, & tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum ascendentem in ♊ 21gr. 13′. 55″., inclinationem orbitæ ad planum eclipticæ 21gr. 18′. 40″, distantiam perihelii à nodo in orbitâ 49gr. 27′. 30″. Perihelium in ♌ 8gr. 40′. 30″ cum latitudine austrinâ heliocentricâ 16gr. 1′. 45″. Cometam in perihelio *Novemb.* 24d. 11h. 52′. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13h. 8′ *Gedani*, stylo veteri, & latus rectum parabolæ 410286, existente mediocri terræ à sole distantiâ 100000. Quam probe loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum observationibus, patebit ex tabulâ sequente ab *Halleio* supputatâ.

LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROBL. XXII.

(u) * *Loca cometæ hujus denuò computavit.* Varias computi hujus ineundi methodos suprà tradidimus. 172.

Temp. Appar. Gedani, ſt. vet.	Obſervatæ Cometæ diſtantiæ.	gr.	″	″	Loca obſervata. gr. ′ ″	Loca computata in Orbe. gr. ′ ″
Decemb.						
3^d. 18^h. 29½	à Corde Leonis	46	24	20	Long. ♎ 7. 1. 0	♎ 7. 1.29
	à Spica Virginis	22	52	10	Lat. auſt. 21.39. 0	21.38.50
4 . 18 . 1½	à Corde Leonis	46	2	45	Long. ♎ 16.15. 0	♎ 16. 5
	à Spica Virginis	23	52	40	Lat. auſt. 22.24. 0	22.24. 0
7 . 17 . 48	à Corde Leonis	44	48	0	Long. ♎ 3. 0. 0	♎ 3. 7.33
	à Spica Virginis	27	56	40	Lat. auſt. 25.22 0	25.21.40
17 . 14 . 43	à Corde Leonis	53	15	15	Long. ♌ 2.56 0	♌ 2.56. 0
	ab Hum. Orionis dext.	45	43	30	Lat. auſt. 49 25. 0	49.25. 0
19 . 9 . 25	à Procyone	35	13	50	Long. ♊ 28.40 30	♊ 28.43. 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	52	56	0	Lat. auſt. 45 48 0	45.46. 0
20 . 9 . 53½	à Procyone	40	49	0	Long. ♊ 13 3. 0	♊ 13. 5. 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	40	4	0	Lat. auſt. 39.54. 0	39.53. 0
21 . 9 . 9½	ab Hum. dext. Orionis	26	21	25	Long. ♊ 2.16 0	♊ 2.18.30
	à Lucid. Mandib. Ceti	29	28	0	Lat. auſt. 33.41. 0	33.39.40
22 . 9 . 0	ab Hum. dext. Orionis	29	47	0	Long. ♉ 24 24. 0	♉ 24.27. 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	20	29	30	Lat. auſt. 27.45. 0	27.46 0
26 . 7 . 58	à Lucida Arietis	23	20	0	Long. ♉ 9. 0. 0	♉ 9. 2.28
	ab Aldebaran	26	44	0	Lat. auſt. 12.36. 0	12.34.13
27 . 6 . 45	à Lucida Arietis	20	45	0	Long. ♉ 7. 5.40	♉ 7. 8.45
	ab Aldebaran	28	10	0	Lat. auſt. 10.23. 0	10.23.13
28 . 7 . 39	à Lucida Arietis	18	29	0	Long. ♉ 5.24.45	♉ 5.27. 2
	à Palilicio	29	37	0	Lat. auſt. 8.22.50	8.23.37
31 . 6 . 45	à Cing. Androm.	30	48	10	Long. ♉ 2. 7.40	♉ 2. 8.20
	à Palilicio	32	53	30	Lat. auſt. 4.13. 0	4 16.25
Jan. 1665. 7 . 7 . 37½	à Cing. Androm.	25	11	0	Long. ♈ 28.24.47	♈ 28 24. 0
	à Palilicio	37	12	25	Lat. bor. 0.54. 0	0.53. 0
13 . 7 . 0	à capite Androm.	28	7	10	Long. ♈ 27. 6.54	♈ 27. 6.39
	à Palilicio	38	55	20	Lat. bor. 3. 6.50	3. 7.40
24 . 7 . 29	à Cin. Androm.	20	32	15	Long. ♈ 26.29.15	♈ 26.28.50
	à Palilicio	40	5	0	Lat bor. 5.25 50	5.26. 0
Feb. 7 . 8 . 37					Long. ♈ 27.24.46	♈ 27.24.55
					Lat. bor. 7. 3.26	7. 3 15
22 . 8 . 46					Long. ♈ 28.29.46	♈ 28.29.58
					Lat. bor. 8 12.36	8 10 25
Mar. 1 . 8 . 16					Long. ♈ 29.18.15	♈ 29.18.20
					Lat. bor. 8 36.26	8.36.12
7 . 8 . 37					Long. ♈ 0. 2.48	♉ 0. 2.42
					Lat. bor. 8.56.30	8.56.56

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis quam in ſequentibus vocabo γ, erat in ♈ 28gr. 30′. 15″ cum latitudine boreali 7gr. 8′. 58″. eScunda arietis erat in ♈ 29gr. 17′.

17'. 18'' cum latitudine boreali 8gr. 28'. 16''. Et stella quædam alia septimæ magnitudinis, quam vocabo *A*, erat in ♈ 28gr. 24'. 45'' cum latitudine boreali 8gr. 28'. 33''. Cometa vero *Feb.* 7d. 7'. 30'' *Parisiis* (id est *Feb.* 7d. 8'. 37'' *Gedani*) st. vet. triangulum constituebat cum stellis illis γ & *A* rectangulum ad γ. Et distantia cometæ à stella γ æqualis erat distantiæ stellarum γ & *A*, id est 1gr. 19'. 46'' in circulo magno, atque ideo ea erat 1gr. 20'. 26'' in parallelo latitudinis stellæ γ. Quare si de longitudine stellæ γ detrahatur longitudo 1gr. 20'. 26'', manebit longitudo cometæ ♈ 27gr. 9'. 49''. *Auzoutius* ex hâc suâ observatione cometam posuit in ♈ 27gr. 0' circiter. Et ex schemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26gr. 59' 24''. Ratione mediocri posui eundem in ♈ 27gr. 4'. 46''. Ex eâdem observatione *Auzoutius* latitudinem cometæ jam posuit 7gr. & 4' vel 5' boream versus. Eandem rectius posuisset 7gr. 3'. 29'', existente scilicet differentia latitudinum cometæ & stellæ γ æquali differentiæ longitudinum stellarum γ & *A*.

Feb. 22d. 7h. 30' *Londini*, id est *Feb.* 22d. 8h. 46' *Gedani*, distantia cometæ à stella *A*, juxta observationem *Hookii* à seipso in schemate delineatam, ut & juxta observationes *Auzoutii* à *Petito* in schemate delineatas, erat pars quinta distantiæ inter stellam *A* & primam arietis, seu 15'. 57''. Et distantia cometæ à linea jungente stellam *A* & primam arietis erat pars quarta ejusdem partis quintæ, id est 4'. Ideoque cometa erat in ♈ 28gr. 29'. 46'', cum lat. bor. 8gr. 12'. 36''.

Mart. 1d. 7h. 0' *Londini*, id est *Mart.* 1d. 8h. 16' *Gedani*, cometa observatus fuit prope secundam arietis, existente distantia inter eosdem ad distantiam inter primam & secundam arietis, hoc est ad 1gr. 33', ut 4 ad 45 secundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 secundum *Gottignies*. Unde distantia cometæ à secunda arietis erat 8'. 16'' secundum *Hookium*, vel 8'. 5'' secundum *Gottignies*, vel ratione mediocri 8'. 10''. Cometa vero secundum *Gottignies* jam modo prætergressus fuerat secundam arietis quasi spatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die con-

fecti,

De Mundi Systemate.

fecti, id eſt 1'. 35'' circiter (quocum ſatis conſentit *Auzoutius*) vel paulo minorem ſecundum *Hookium*, puta 1'. Quare ſi ad longitudinem primæ arietis addatur 1', & ad latitudinem ejus 8. 10'', habebitur longitudo cometæ ♈ 29gr. 18', & latitudo borealis 8gr. 36'. 26''.

Mart. 7d. 7h. 30 *Pariſiis* (id eſt *Mart.* 7d. 8h. 37' *Gedani*) ex obſervationibus *Auzoutii* diſtantiâ cometæ à ſecundâ arietis æqualis erat diſtantiæ ſecundæ arietis à ſtellâ *A*, id eſt 52'. 29''. Et differentia longitudinum cometæ & ſecundæ arietis erat 45' vel 46', vel ratione mediocri 45. 30''. Ideoque cometa erat in ♉ 0gr. 2'. 48''. Ex ſchemate obſervationum *Auzoutii*, quod *Petitus* conſtruxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54. Sed ſculptor viam cometæ ſub finem motus ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in ſchemate obſervationum *Auzoutii* à ſe conſtructo incurvationem irregularem correxit, & ſic latitudinem cometæ fecit eſſe 8gr. 55'. 30''. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere poteſt 8gr. 56', vel 8gr. 57'.

Viſus etiam fuit hic cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ 0gr. 18', cum lat. bor. 9gr. 3½ circiter.

Apparuit hic cometa menſes tres, ſignaque ferè ſex deſcripſit, & uno die gradus fere viginti confecit. Curſus ejus à circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus ſub finem ex retrogrado factus eſt directus. Et non obſtante curſu tam inſolito, theoriâ à principio ad finem cum obſervationibus non minus accuratè congruit, quam theoriæ planetarum cum eorum obſervationibus congruere ſolent, ut inſpicienti tabulam patebit. Subducenda tamen ſunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velociſſimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta ſecunda ab angulo inter nodum aſcendentem & perihelium, ſeu conſtituendo (x) angulum illum 49gr. 27'. 18''. Cometæ utriuſque (& hujus & ſuperioris) paral-

172. (x) * *Angulum illum* inter nodum aſcendentem & perihelium invenerat Halleïus 49°. 27'. 30'', conſtituto autem angulo illo 49°. 27'. 18'', computationibuſque repetitis, ſubducta inveniuntur duo minuta prima circiter, ut oportet, & theoriâ à prin-

parallaxis annua insignis fuit, & (y) indè demonstratur motus annuus terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; inclinatio orbitæ ad eclipticam 83gr. 11′; perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; distantia perihelia à sole 56020, existente radio orbis magni 100000, & tempore perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis à *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

1683 Temp. Æquat	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat
d. h. ′	gr ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+1. 0	+0. 7
15.11.15	2.5 .12	11 .37.4	29.34. 0	11 39 43	29.34.50	+1.55	+0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8 40	29.34. 0	+1.34	+0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+1. 3	−1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	−0.53	−1. 7
31 9.42	18. 9 22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26 22.25	−0.39	−0.27
31.14 55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+0. 1	−2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25 17.28	−0.46	+1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23 16.55	24.12.19	−1.25	+1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20 40.32	22.49. 5	−1.51	+2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	−2. 2	−0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	−4.30	−5.32
16.15.10	3.48. 2	0 43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	−1.12	−0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15	♉ 24.49. 5	5. 9.11	−3.48	−2. 4
			Austr		Aust		
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.58	11. 7.12	5.16.58	−0. 2	−0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	−1. 1	−0.28
26 16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	−1 31	+0.20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus ascendens (computante *Hal-*

principio ad finem cum observationibus congruit. Corrigendam esse theoriam duobus minutis primis circiter ex observatione cometæ, ubi motus ejus velocissimus fuit, colligitur.

(y) * *Et indè demonstratur.* † Quâ ratione annua cometarum parallaxis cum telluris quiete conciliari possit legatur apud Ricciolium in almagesto, Tacquetum in Astronomiâ aliosque passim, ubi de Planetarum retrogradationibus agunt.

172

De Mundi Systemate.

Halleio) erat in ♉ 21gr. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 17gr. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2gr 52′. 50″. Diſtantia perihelia à ſole 58328, exiſtente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii *Sept.* 4d. 7h. 39′. Loca verò ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabulâ ſequente.

1682. Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſer.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19. 16. 38	♍ 7. 0. 7	♌ 18. 14. 28	25. 50. 7	♌ 18. 14. 40	25. 49. 55	− 0. 12	+ 0. 12
20. 15. 38	7. 55. 52	24. 46. 23	26. 14. 42	24. 46. 22	26. 12. 52	+ 0 1	+ 1. 50
21. 8. 21	8. 36. 14	29. 37. 15	26. 20. 3	29 38. 2	26. 17. 37	− 0 47	+ 2. 26
22. 8. 8	9. 33. 55	♍ 6. 29. 53	26. 8. 42	♍ 6. 30. 3	26. 7. 12	− 0. 10	+ 1. 30
29. 8. 20	16. 22. 40	♎ 12. 37. 54	18. 37. 47	♎ 12 37. 49	18. 34. 5	+ 0. 5	+ 3. 42
30. 7. 45	17. 19. 41	15. 36. 1	17. 26. 43	15. 35. 18	17. 27. 17	+ 0. 43	− 0. 34
Sept. 1. 7. 33	19. 16. 9	20 30. 53	15. 13. 0	20. 27. 4	15. 9. 49	+ 3. 49	+ 3. 1
4. 7. 22	22. 11. 28	25. 42. 0	12. 23. 48	25 40. 58	12. 22. 0	+ 1. 2	+ 1. 48
5. 7. 32	23. 10. 29	27. 0. 46	11. 33. 8	26 59. 24	11. 33. 51	+ 1. 22	− 0. 43
8. 7. 16	26. 5. 58	29. 58. 44	9. 26. 46	29 58. 45	9. 26. 43	− 0. 1	+ 0. 3
9. 7. 26	27. 5. 9	♏ 0 44. 10	8. 49. 10	♏ 0. 44. 4	8. 48. 25	+ 0. 6	+ 0. 45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus aſcendens (computante D. *Bradleo*, aſtronomiæ apud *Oxonienſes* profeſſore *Saviliano*) erat in ♈ 14gr. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 49gr. 59′. Perihelium in ♉ 12gr. 15′. 20″. Diſtantia perihelia à ſole 998651, exiſtente radio orbis magni 1000000, & tempore æquato perihelii *Septem.* 16d. 16h. 10′. Loca verò cometæ in hoc orbe à *Bradleo* computata, & cum locis à ſeipſo & patruo ſuo D. *Poundio*, & à D. *Halleio* obſervatis collata exhibentur in tabulâ ſequente.

1723. Temp. Æquat.	Comet. Long. Obſervat.	Lat Bor. Obſervat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long	Differ. Latit.
d. h.	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob. 9. 8. 5	♒ 7. 22. 15	5. 2. 0	♒ 7. 21. 26	5. 2. 47	+ 49	− 47
10. 6. 21	6. 41. 2	7. 44. 13	6. 41. 42	7. 43. 18	− 50	+ 55
12. 7. 22	5. 39. 58	11. 55. 0	5. 40. 19	11. 54. 55	− 21	+ 5
14. 8. 57	4. 59. 49	14. 43. 50	5. 0. 37	14. 44. 1	− 48	− 11
15. 6. 35	4. 47. 41	15. 40. 51	4. 47. 45	15. 40. 55	− 4	− 4
21. 6. 22	4. 2. 32	19. 41. 49	4. 2. 21	10. 42. 3	+ 11	− 14
22. 6. 24	3. 59. 2	20. 8. 12	3. 59. 10	20. 8. 17	− 8	− 5
24. 8. 2	3. 55. 29	20. 55. 18	3. 55. 11	20. 55. 9	+ 18	+ 9
29. 8. 56	3. 56. 17	22. 20. 27	3. 56. 42	22. 20. 10	− 25	+ 7
30. 6. 20	3. 58. 9	22. 32. 28	3. 58. 17	22. 32. 12	− 8	+ 16
Nov. 5. 5. 53	4. 16. 30	23. 38. 33	4. 16. 23	23. 38. 7	+ 7	+ 26
8. 7. 6	4. 29. 36	24. 4. 30	4. 29. 54	24. 4. 40	− 18	− 10
14. 6. 20	5. 2. 16	24. 48. 46	5. 2. 51	24. 48. 6	− 35	+ 30
20. 7. 45	5. 42. 20	25. 24. 45	5. 43. 13	25. 25. 17	− 53	− 32
Dec. 7. 6. 45	8. 4. 13	26. 54. 18	8. 3. 55	26. 53. 42	+ 18	+ 36

His exemplis abundè ſatis manifeſtum eſt, quod motus cometarum per theoriam à nobis expoſitam non minus accuratè exhibentur, quam ſolent motus planetarum per eorum theorias. (z) Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum orbium ellipticorum latera tranſverſa & apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, deſcripſit orbem, cujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat 17gr. 2′; perihelium erat in ♒ 2gr. 16′; & diſtantia perihelia à ſole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio *Octob.* 16d. 3h. 50′. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic cometa ſpatio annorum 75, & (a) axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c:75 \times 75}$ ad 1, ſeu 1778 ad

(z) * *Et propterea.* Quomodò hæc omnia fieri poſſint variis methodis ſuprà expoſuimus.

(a) * *Et axis major* orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni ut radix cubica numeri 75 × 75 ad 1 (172). 172.

De Mundi Systemate.

ad 100 circiter. Et (b) diſtantia aphelia cometæ hujus à ſole, erit ad diſtantiam mediocrem terræ à ſole, ut 35 ad 1 circiter. (c) Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellipticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita ſe habebunt, ſi cometa, ſpatio annorum ſeptuaginta quinque, in hoc orbe poſthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altiùs aſcendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam apheliorum à ſole diſtantiam, & longam moram in apheliis, per gravitates in ſe mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proindè non eſt expectandum ut cometa idem in eodem orbe, & iiſdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit ſi mutationes non majores obvenerint, quam quæ à cauſis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, (d) cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, ſed indè migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis ſuis, ubi tardiſſimè moventur, quamlongiſſimè diſtent ab invicem, & ſe mutuò quam minime trahant. Quâ de causâ cometæ, qui altiùs deſcendunt, ideoque tardiſſimè moventur in apheliis, debent altiùs aſcendere.

Co-

173. (b) * *Et diſtantia aphelia.* Quoniam diſtantia perihelia cometæ à ſole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 1000000 erit eadem diſtantia perihelia 29, circiter exiſtente radio orbis magni 100, ac proindé diſtantia aphelia quæ eſt differentia inter axem majorem orbitæ cometicæ 1778 & diſtantiam periheliam 29, erit earumdem partium 1749, ideóque diſtantia aphelia cometæ hujus à ſole erit ad diſtantiam mediocrem terræ à ſole ut 1749 ad 29, hoc eſt, ut 35 ad 1 circiter.

(c) * *Quibus cognitis.* (Per prop. 20. lib. 1).

(d) 173. * *Cur cometæ non comprehendantur Zodiaco* Ex obſervato ſæpè ſæpius cometarum curſu retrogrado deduxit Newtonus cometas non comprehendi Zodiaco more planetarum, ſed indè migrare & motibus variis in omnes cœlorum regiones excurrere. Attamen Clariſſ. Caſſinus in monum. Pariſ. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos reduxit. Verum eo artificio utitur Vir Doctiſſimus ut diſtantiam cometæ à terrâ vel ſole pro arbitrio aſſumat, & modò tellurem inter ſolem & cometam, modò cometam inter ſolem & telluram ac denique ſolem inter cometam & tellurem, pro neceſſitate, collocet. Quâ ratione id fieri poſſit non ſatis intelligitur, niſi ignota omninò fingatur cometarum theoria; conceſſo enim aliquo cometarum ſyſtemate, diſtantias illas pro lubitu uſurpare non licet, ſed ex datis motuum elementis, cometarum diſtantia totaque trajectoria determi-

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat à sole in perihelio suo quam parte sextâ diametri solis; & propter summam velocitatem in viciniâ illâ, & densitatem aliquam atmosphæræ solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari, & propiùs ad solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad solem, incidet is tandem in corpus solis. Sed & in aphelio ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari potest, & subindè in solem

terminantur. Sic Halleïus definivit trajectoriam cometæ qui annis 1664. & 1665. apparuit. Ut autem retrogradum hujus cometæ motum ad directum reducat Clariss. Cassinus talem huic cometæ motum tribuit qui cum Halleii computo nequaquam convenit. Quam probe tamen cum observationibus theoria congruat ostendit tabula paulò antè exhibita. Quamvis itaque retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosâ arte reduxerit Cassinus, non id tamen satis esse arbitramur ut eam rejiciamus cometarum theoriam quæ phænomenis apprimè respondet, atque incerti sinè ullâ theoriâ erremus. Prætereà talem orbitam prædicto cometæ assignat Cassinus ut extrà orbem annuum fere non excurrat; Quod si res ità se haberet, hic cometa in conspectum citò rediisset, cometas enim ad maximam quoque distantiam conspicuos esse constat ex defectu parallaxeos. Nec feliciori successu ad motum directum reduci posse videtur motus retrogradus cometæ an. 1680. Nam prætérquam quod omnem cometarum theoriam fictis ad arbitrium hypothesibus everti necesse sit, in explicatione Cassini gravissima occurrit difficultas cujus vim totam sensit Clariss. Vir. Oporteret scilicet ut cometa ille paulò antè 27am. diem Novembris per nodum descendentem transierit & versus diem 17am. Decembris ad nodum ascendentem pervenerit, ideóque cometa breviori quam unius mensis intervallo, totum spatium quod est infrà planum Ecclipticæ trajecisset. Porrò tanta velocitas caret verisimilitudine, nec conciliari posse videtur cum observatis longo temporis spatio hujus cometæ motibus; hic enim Astronomorum oculis citò sese subduxisset. Singulas explicationes quæ in loco cit. monum. Paris. leguntur percurrere longiùs foret, satis erit addere eas hoc potissimum fine excogitatas fuisse ut nempe servaretur & à gravissimâ objectione liberaretur vorticum hypothesis. Verum his explicationibus cæteroquin ingeniosissimis nondum tamen propositus finis obtineri videtur; hanc enim difficultatem effugientes vorticum patroni, in aliam incurrunt. Oporteret siquidem ut cometarum vortices ipsum saltem telluris vorticem intersecarent, quod sine vorticum perturbatione ac tandem destructione fieri posse non intelligitur. Alias hypotheses finxerunt alii. Quidam cometas habuerunt tanquam planetas non circà solem nostrum, sed circa alium velut centrum revolventes. Nonnulli eos habuerunt velut satellites planetæ cujusdam primarii in nostro vortice constituti, qui tamen ob maximam illius à nobis distantiam conspici non potest, ità ut cometæ seu satellites sese nobis duntaxat conspicuos præbeant, dum in inferiori & telluris proximiori orbitarum suarum parte versantur. Sed à Newtonianâ cometarum theoriâ quæ phænomenis consentanea est nequaquam nos removere debent hypotheses illæ quæ eam duntaxat ob causam subtiliter inventæ sunt ut servaretur vorticum hypothesis quam aliis multis difficultatibus premi passim ostendimus. Cæterum quidquid de hac materiâ diximus & ipsa, prout nobis visum est, rei veritas & commentatorum officium à nobis postulabant. 171

De Mundi Systemate.

ſolem incidere. (e) Sic etiam ſtellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro ſtellis novis haberi. Hujus generis ſunt ſtellæ fixæ, quæ ſubito apparent, & ſub initio quam maximè ſplendent, & ſubindè paulatim evaneſcunt. Talis fuit ſtella in cathedrâ Caſſiopeiæ quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, luſtrando illam cœli partem nocte ſerena minimè vidit; at nocte proximâ (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus ſplendidiorem, & luce ſuâ vix cedentem veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejuſdem menſis ubi maximè ſplenduit; & ex eo tempore paulatim decreſcentem & ſpatio menſium ſexdecim evaneſcentem obſervavit. Menſe *Novembri*, ubi primùm apparuit, venerem luce ſuâ æquabat. Menſe *Decembri*

174. (e) 174. * *Sic etiam ſtellæ fixæ.* De ſtellarum variationibus nonnulla hic afferemus quæ habet Clariſſ. D. De Maupertuis in eximio opuſculo de figuris aſtrorum & in mon. Pariſ. an. 1734. Fixas, quæ ſunt totidem ſoles, variis donatas eſſe figuris & ex iis aliquas ad figuram planam vel planitiem accedere non repugnat. Nam à ſphæroide propemodum ſphærico per innumeros gradus depreſſionis verſus polos tandem devenitur ad planum circulare, ſi continuò varietur ratio vis centrifugæ ad gravitatem, ut patet ex num 56. His poſitis, ratio reddi poterit cur fixæ quædam nunc appareant, nunc evaneſcant, cur mutetur apparens ſtellarum quarumdam magnitudo, nec non etiam cur ſtellæ aliquæ quaſi recens accenſæ oriri viſæ ſint, quædam verò quaſi extinctæ videri deſierint. Si in ſtellarum numero reperiantur aliquæ ad figuram planam accedentes, illæ dum faciem ſuam nobis obvertunt, ſphærarum inſtar apparebunt. Si autem reſpectu noſtri ſitum ſuum mutent, magis vel minus ſtellarum illarum ſplendor decreſcet, prout hoc vel illo modo ſeſe nobis oſtendent, ac tandem exiguæ craſſitiei latus exhibeant & ſatis longe à nobis diſtent, conſpectui noſtro ſeſe omninò ſubducent. Quomodò autem fixæ reſpectu noſtri poſitionem ſuam mutent explicari poteſt, ſi ponamus circà ſtellam compreſſam revolvere planetam aliquam ingentis molis aut cometam in orbitâ valde excentricâ & ad æquatorem ſtellæ inclinata; in hâc enim hypotheſi, planeta ad perihelium ſuum accedens juxtà attractionis leges inclinationem fixæ planæ perturbabit, & hinc fieri poterit ut partem lucidam diſci nobis obverſam conſpiciamus quæ ob exiguam lateris compreſſi craſſitiem oculos noſtros anteà effugiebat. Ex his quoquè intelligitur fieri poſſe ut circà planetam congregetur annulus ſaturni annulo ſimilis, ſi nempè cometa cujus cauda ex vaporibus tenuiſſimis æſtu ſolis in perihelio elevatis componitur, ad planetam aliquem maximè potentem proximè accederet. Hic enim vaporum torrens attractionis vi ad revolvendum circà planetam annuli inſtar poſſet detorqueri; imò impoſſibile non foret ipſum quoquè corpus cometæ circà planetam rapi & ſic planeta ſatellitem acquireret. Haberet autem planeta ſatellitem ſinè annulo, ſi cometa deſtitueretur caudâ, ſed adjicietur etiam annulus, ſi cometa caudam habuerit, atquè annulus aderit ſinè ſatellite, ſi cauda duntaxat à planeta attrahatur. Hæc ſunt quæ ad hunc Newtoni locum præcipuè referuntur; cæterùm in laudatis opuſculis elegantiſſima ſunt problemata quæ conſulat Lector.

bri nonnihil diminuta jovem æquare videbatur. Anno 1573, mense *Januario* minor erat jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evasit æqualis. Mense *Aprili* & *Maio* stellis secundæ magnitudinis, *Junio*, *Julio* & *Augusto* stellis tertiæ magnitudinis, *Septembri*, *Octobri* & *Novembri* stellis quartæ, *Decembri* & anni 1574, mense *Januario* stellis quintæ, & mense *Februario* stellis sextæ magnitudinis æqualis videbatur, & mense *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac splendidus, postea flavus, & anni 1573 mense *Martio* rutilans instar martis aut stellæ aldebaran, *Maio* autem albitudinem sublividam induxit, qualem in saturno cernimus, quem colorem usque in finem servavit, semper tamen obscurior facta. Talis etiam fuit stella in dextro pede serpentarii, quam *Kepleri* discipuli anno 1604, die 30 *Septembris* st. vet. apparere cœpisse observarunt, & luce suâ stellam jovis superasse, cum nocte præcedente minimè apparuisset. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, & spatio mensium quindecim vel sexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam stellâ novâ supra modum splendente *Hipparchus* ad fixas observandas & in catalogum referendas excitatus fuisse dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent & evanescunt, quæque paulatim crescunt, & luce sua fixas tertiæ magnitudinis vix unquam superant, videntur esse generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obscuram per vices ostendere. Vapores autem, qui ex sole & stellis fixis & caudis cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in atmosphæras planetarum & ibi condensari & converti in aquam & spiritus humidos, & subindè per lentum calorem in sales, & sulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & substantias alias terrestres paulatim migrare.

SCHO-

De Mundi Systemate.

SCHOLIUM GENERALE.

(f) Hypothesis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unusquisque radio ad solem ducto areas describat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent esse in duplicatâ ratione distantiarum à sole. Ut periodica planetarum tempora sint in proportione sesquiplicatâ distantiarum à sole, tempora periodica partium vorticis deberent esse in sesquiplicatâ distantiarum proportione. Ut vortices minores circum saturnum, jovem & alios planetas gyrati conserventur & tranquillè natent in vortice solis, tempora periodica partium vorticis solaris deberent esse æqualia. Revolutiones solis & planetarum circum axes suos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus cometarum sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant, & per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valdè eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest, nisi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre nostro, solam aëris resistentiam sentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo *Boyliano*, resistentia cessat, siquidem pluma tenuis & aurum solidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium, quæ sunt suprà atmosphæram terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrimè moveri debent; & propterea planetæ & cometæ in orbibus specie & positione datis secundum leges suprà expositas perpetuò revolvi. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitùs acquirere per leges hasce minimè potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum solem in circulis soli concentricis, eâdem motus directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum terram, jovem & saturnum in circulis concentricis, eâdem motus directio-

174. (f) * *Hypothesis vorticum.* (Prop. 52. lib. 2. cum coroll. schol. prop. 40. lib. 2. & not. 173. lib. huj.).

tione, in planis orbium planetarum quamproximè. (g) Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis mechanicis; siquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes liberè feruntur. Quo motus genere cometæ per orbes planetarum celerrimè & facillimè transeunt, & in apheliis suis ubi tardiores sunt & diutiùs morantur; quàm longissimè distant ab invicem, ut se mutuò quam minimè trahant. Elegantissima hæcce solis, planetarum & cometarum compages non nisi consilio & dominio entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si stellæ fixæ sint centra similium systematum, hæc omnia simili consilio constructa suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux fixarum sit ejusdem naturæ ac lux solis, & systemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum systemata per gravitatem suam in se mutuò cadant, hic eadem immensam ab invicem distantiam posuerit.

LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROBL. XXII.

Hic omnia regit non ut anima mundi, sed ut universorum dominus. Et propter dominium suum, dominus deus (*) Παντοκράτωρ dici solet. Nam deus est vox relativa & ad servos refertur: & deitas est dominatio Dei, non in corpus proprium, uti sentiunt quibus deus est anima mundi, sed in servos. Deus summus est ens æternum, infinitum, absolutè perfectum: sed ens utcunque perfectum sine dominio non est dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus vester, deus *Israelis*, deus deorum, & dominus dominorum: sed non dicimus æternus meus, æter-

(g) * *Et hi omnes motus regulares.* Celeberrimi Viri Joannes & Daniel Bernoullius, prior in physicâ cœlesti, posterior in disquisitionibus Physico-Astronomicis mechanicam horumce motuum causam ex vorticibus repetunt. Sed cum mechanicæ explicationes illæ omnibus obnoxiæ sint difficultatibus quibus vorticum hypothesim premi jam ostendimus, huic rei diutiùs non immorabimur. Satis erit describere verba quæ habet Johan. Bernoullius mentionem faciens de hoc ipso Newtoni loco. (Si causæ illæ non sunt mechanicæ, erunt præternaturales & miraculo tribuendæ; sed magnum Philosophum non decet ad miraculum recurrere, ubi alicujus phænomeni quæritur explicatio.). Numquid pari jure cartesianum Philosophum possumus interrogare quânam causâ mechanicâ vortices secundùm varias directiones ferantur, cur planetarum circumsolarium vortices ab occidente in orientem moveantur? ubi phænomenon aliquod ad primam causam deductum est, hic hærere causamque mechanicam ulteriùs non quærere, magnum Philosophum non dedecet.

(*) Id est Imperator universalis.

174.

De Mundi Systemate.

æternus vester, æternus *Israelis*, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad servos. Vox deus passim (†) significat dominum: sed omnis dominus non est deus. Dominatio entis spiritualis deum constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ sequitur deum verum esse vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus summum esse, vel summè perfectum. Æternus est & infinitus, omnipotens & omnisciens, id est, durat ab æterno in æternum, & adest ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoscit, quæ fiunt aut fieri possunt. Non est æternitas & infinitas, sed æternus & infinitus; non est duratio & spatium, sed durat & adest. Durat semper, & adest ubique, & existendo semper & ubique, durationem & spatium constituit. Cum unaquæque spatii particula sit *semper*, & unumquodque durationis indivisibile momentum *ubique*, certè rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam*, *nusquam*. Omnis anima sentiens diversis temporibus, & in diversis sensuum, & motuum organis eadem est persona indivisibilis. Partes dantur successivæ in duratione, coexistentes in spatio, neutræ in persona hominis seu principio ejus cogitante; & multò minùs in substantia cogitante dei. Omnis homo, quatenus res sentiens, est unus & idem homo durante vitâ suâ in omnibus & singulis sensuum organis. Deus est unus & idem deus semper & ubique. Omnipræsens est non per *virtutem* solam, sed etiam per *substantiam*: nam virtus sine substantia subsistere non potest. In ipso (‡) continentur & moventur universa, sed sine mutuâ passione. Deus nihil

(†) *Pocokus* noster vocem *dei* deducit à voce *Arabicâ du*, (& in casu aliquo *di*,) quæ dominum significat. Et hoc sensu principes vocantur dii, *Psal.* lxxxiv. 6 & *Joan.* x. 45. Et *Moses* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod.* iv. 16. & vii. 1.) Et eodem sensu animæ principum mortuorum olim à gentibus vocabantur dii, sed falso propter defectum dominii. (*Nota Autoris*).

(‡) Ita sentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Naturâ deorum, *lib.* 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius*, Georgic. *lib.* iv. *v* 220. & Æneid *lib.* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* 1. sub initio *Aratus* in Phænom. sub initio. Ita etiam scriptores sacri ut *Paulus* in Act. xvii. 27. 28. *Johannes* in Evang xiv. 2. *Moses* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Psal. cxxxix. 7. 8. 9. *Salmon* 1. Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12. 13.

nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentiâ dei. Deum ſummum neceſſariò exiſtere in confeſſo eſt: Et eâdem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi, & agendi, ſed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, ſic nos ideam non habemus modorum, quibus deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figurâ corporeâ prorſus deſtituitur, ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus ſubſtantia minimè cognoſcimus. Videmus tantùm corporum figuras & colores, audimus tantùm ſonos, tangimus tantùm ſuperficies externas, olfacimus odores ſolos, & guſtamus ſapores: intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nullâ actione reflexâ cognoſcimus; & multò minùs ideam habemus ſubſtantiæ dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ejus & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras & cauſas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut ſervi, & deus ſine dominio, providentiâ, & cauſis finalibus nihil aliud eſt quam fatum & natura. A cæcâ neceſſitate metaphyſicâ, quæ utique eadem eſt ſemper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diverſitas, ab ideis & voluntate entis neceſſariò exiſtentis ſolummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, iraſci, pugnare, fabricare, condere, conſtruere. Nam ſermo omnis de deo à rebus humanis per ſimilitudinem aliquam deſumitur, non perfectam quidem, ſed aliqualem tamen. Et hæc de deo, de

13. 14. *Jeremias* xxiii. 23. 24. Fingebant autem idololatræ ſolem, lunam, & aſtra, animas hominum & alias mundi partes eſſe partes dei ſummi & ideò colendas ſed falsò. (*Nota Autoris*).

De Mundi Systemate. de quo utique ex phænomenis disserere, ad philosophiam naturalem pertinet.

Hactenus phænomena cælorum & maris nostri per vim gravitatis exposui, sed causam gravitatis nondùm assignavi. Oritur utique hæc vis à causâ aliquâ, quæ penetrat ad usque centra solis & planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum, in quas agit (ut solent causæ mechanicæ) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; & cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicatâ ratione distantiarum. Gravitas in solem componitur ex gravitatibus in singulas solis particulas, & recedendo à sole decrescit accuratè in duplicatâ ratione distantiarum ad usque orbem saturni, (h) ut ex quiete apheliorum planetarum manifestum est, & ad usque ultima cometarum aphelia, si modo aphelia illa quiescant. Rationem verò harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondùm potui deducere, & hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypothesis* vocanda est; & hypotheses seu metaphysicæ, seu physicæ, seu qualitatum occultarum, seu mechanicæ, in *philosophiâ experimentali* locum non habent. In hâc philosophiâ propositiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quod gravitas reverà existat, & agat secundum leges à nobis expositas, & ad corporum cælestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuò attrahunt, & contiguæ factæ cohærent: & corpora electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuscula vicina; & lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & sensatio omnis excitatur, & membra ani-

174. (h) * *Ut ex quiete apheliorum.* (Prop. 2. lib. huj.).

animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus ſpiritus per ſolida nervorum capillamenta ab externis ſenſuum organis ad cerebrum & à cerebro in muſculos propagatis. (i) Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus ſpiritus accuratè determinari & monſtrari debent.

(i) * *Sed hæc paucis exponi non poſſunt.* De hoc ſubtiliſſimo ſpiritu plurimas quæſtiones ſibi proponit Newtonus in tractatu opticæ. 174

FINIS.



INDEX LIBRI TERTII.

INDEX PROPOSITIONUM TOTIUS OPERIS.

IN TOMO PRIMO.

Prop.

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI PRIMI.

INDEX LIBRI SECUNDI.

PROPOSITIONUM

IN TOMO SECUNDO.

Pro-

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI SECUNDI.

INDEX
PROPOSITIONUM
LIBRI TERTII
IN TOMO III. PARTE PRIMA.

IN TOMO III. PARTE SECUNDA.

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI TERTII, ET TOTIUS OPERIS.





